第2章　微分積分の基礎のキソ

この章では，多様体の解析に必要な微分積分，とくに多変数関数の扱いについて，基礎のキソを確認する．多様体の基礎を理解するのに必要な微積分は，意外なほど少ない．とくに積分は当面は必要ないので，ここでは微分のみを解説する．ただひとつ，重要なポイントは，

『関数を究極まで局所的に捉え，線形部分を取り出す』

ことである．

2.1　1次近似から線形近似へ

普通の1次元関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を考えよう．とくに，$f\in C^1(\mathbb{R})$ と仮定する．[1] すると，$x=p$ のまわりで Taylor 展開できて，

$$f(x) \ = \ \underline{f(p)+f'(p)(x-p)}+o(|x-p|)$$

が成り立つのであった．下線部はちょうど f のグラフの，$x=p$ における接線の方程式を表す1次関数である．また，記号 $o(|x-p|)$ の部分は本来

$$e(x) \ := \ f(x)-\big\{f(p)+f'(p)(x-p)\big\}$$

といったふうに関数の形で書かれるべき，接線からの「誤差部分」である．一般に

$$\frac{e(x)}{|x-p|} \ \to \ 0 \quad (x\to p)$$

がなりたつとき，これを $e(x)=o(|x-p|)$ と書くのであった．$|x-p|$ という量は，$x=p$ を中心に関数（グラフ）をみる際の基本スケール（視野の幅）である．小さなスケールで眺めるほど，誤差 $e(x)$ は相対的に早く小さくなり，無視できるほどになる．もはや誤差部分 $e(x)$ の関数としての形には関心が薄れ，その程度（大きさ）だけを $o(|x-p|)$ と表現するのである．[2]

以上を踏まえて，もう一度 Taylor 展開の式に戻ってみよう．この式は，関数 f を眺めるスケールを小さくすればするほど，下線部の表す1次関数（直線の式）の表す量の割合が相対的に高くなり，関数（グラフ）自体も1次関数（直線）に見えてくる，ということを示しているのである（図 2.1）．

[1] 一般に r 階微分 $f^{(r)}$ が存在して，かつ連続関数である場合 $f\in C^r(\mathbb{R})$ と書き，C^r 級関数と呼ぶのであった．

[2] たとえば $x\to 0$ のとき $\sin x = x - x^3/6 + o(|x|^3)$ といった書き方をするのであった．$o(|x^3|)$ が誤差の大きさを表現している．

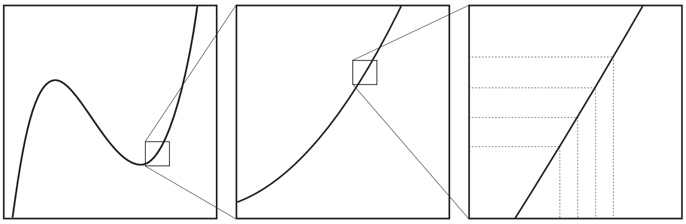

図 2.1: 1 次近似の概念図．グラフを拡大すると，直線のように見えるであろう．

線形近似． 今度は，$y=f(x),\ q=f(p)$ とし，変数変換を施して

$$\begin{aligned} X &:= x-p \quad (p \text{ からみた } x \text{ の位置}) \\ Y &:= y-q \quad (q \text{ からみた } y \text{ の位置}) \end{aligned}$$

としてみよう．さらに，p を選ぶと具体的に決まる実数値 $f'(p)$ を $a \in \mathbb{R}$ で表すと，上の 1 次近似式は

$$\begin{aligned} y &= \underline{q+a(x-p)}+o(|x-p|) \\ \Longleftrightarrow \quad Y &= aX+o(|X|) = (\text{比例関数}) + (\text{誤差}) \end{aligned}$$

と書ける．比例関数 $Y=aX$ の部分は，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への線形写像ともいえる．

これは何をやっているか，イメージを膨らませてみよう．グラフを顕微鏡で見ることを考えてみる．顕微鏡をのぞくと，円形の視野に中心が原点になるよう XY 座標が書いてある．さらに，ライフルのスコープをあわせる気分で，視野の中心を $(x,y)=(p,q)$ まで平行移動させるのである．顕微鏡の拡大率が十分におおきければ，そのグラフは XY 座標に関してあたかも比例関数（線形関数） $Y=aX$ のように見えるであろう．(図 2.2)．その誤差は，拡大率を上げることで検知できないほど小さくできるのである．

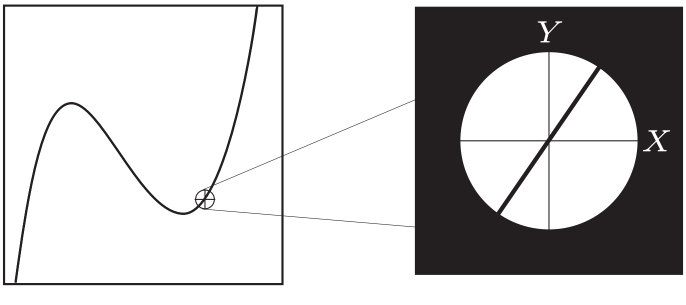

図 2.2: 線形近似の概念図．顕微鏡の視野の中心をグラフ上の点に定めると，あたかも比例関数のように見える．

標語的に，『C^1 関数は局所的に線形関数＋誤差に見える』ことがわかる．これこそ，多様体の解析の根底にある考え方だといえる．

2.1.1　2次元，あるいは一般次元の場合

次に2次元の C^1 関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を考えてみよう．[3] 2次元の関数はグラフを3次元 $\mathbb{R}^3$ 内に描くことができるが，高次元の関数ではグラフを想像するのが極端に難しくなる．そこで，f は「地形図 $\mathbb{R}^2$ の上に海抜高度を与える関数」のように考えよう．こうすれば，f は等高線を描くことで概ね把握でき，$\mathbb{R}^2$ より大きな空間を考える必要がない．高次元化する場合も，こちらのほうが無理が少ないだろう．

さて，関数 f の1次近似を考える．$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ を（ベクトルの）変数とし，そこでの f の値を $f(\boldsymbol{x})=y\in\mathbb{R}$ のように表すことにする．$\boldsymbol{p}=(p_1,p_2)\in\mathbb{R}^2$ を定点として固定すれば，(すなわち，実数 p_1,p_2 を具体的に選び固定すれば）多変数微分の初歩である2変数 Taylor 展開は

$$y \;=\; f(\boldsymbol{x}) \;=\; \underline{f(\boldsymbol{p})+f_{x_1}(\boldsymbol{p})(x_1-p_1)+f_{x_2}(\boldsymbol{p})(x_2-p_2)}+o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|)$$

となる．ただし，$f_{x_1}(\boldsymbol{p})$ は x_1 に関する偏微分の $\boldsymbol{p}$ における値（$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p})$ とも書かれる）であり，関数 f と定点 $\boldsymbol{p}$ によって決まる具体的な実数値である．これを a_1 で表す．同様に，$a_2:=f_{x_2}(\boldsymbol{p})$ と表す．ついでに $q:=f(\boldsymbol{p})$ と表せば，下線部は

$$y \;=\; \underline{q+a_1(x_1-p_1)+a_2(x_2-p_2)}$$

という1次関数の式になる．[4] 誤差部分 $o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|)$ についても確認しておこう．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{p}$ の間の距離は

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| \;:=\; \sqrt{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2}$$

であり，上の Taylor 展開を眺める視野のスケールである．$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{p}$ のとき（$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\to 0$ であればどんな風に近づいてもかまわない），

$$\frac{\text{誤差}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} \;=\; \frac{f(x)-\{q+a_1(x_1-p_1)+a_2(x_2-p_2)\}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|} \;\to\; 0$$

が成り立つとき，誤差部分を $o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|)$ と表しているのである．

もう一度，Taylor 展開の式

$$y \;=\; \underline{q+a_1(x_1-p_1)+a_2(x_2-p_2)}+o(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|)$$

が意味するところは，「関数を眺めるスケール $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}$ が小さくなれば，下線部の1次関数の占める割合が相対的に高くなり，その関数自体も1次関数のように見える」ということである．まさに，1次近似式なのである．

図2.3はその様子を表現している．やっていることは図2.1と根本的に同じである．

---

[3] 変数 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)$ の各成分についての偏微分関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})$ および $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})$ が存在し，かつ連続である場合，f を C^1 級と呼ぶのであった．

[4] この関数のグラフを3次元に描いたとき，点 (p_1,p_2,q) における接平面の方程式である．しかし，このような考え方はしないのであった．

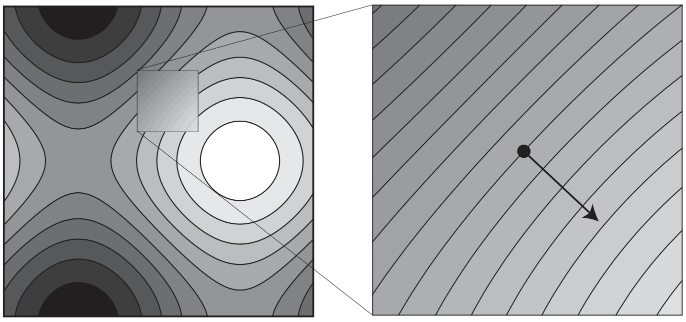

図 2.3: ある 2 次元関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ の等高線（等温線，等圧線，etc.）．白が一番高く，黒が一番低い．（等高線そのものは座標系を書かなくても「存在している」．）適当な点のまわりで拡大すると，等高線はほぼ等間隔に配置される．矢印は勾配ベクトル．

線形近似へ． ここで，関数を $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ を中心とした座標で表現してみよう．変数変換

$$X_1 := x_1 - p_1, \quad X_2 := x_2 - p_2, \quad Y := y - q$$

を施すと，上の一次近似式は

$$\begin{aligned} Y &= a_1X_1 + a_2X_2 + o(\|\boldsymbol{X}\|) \\ \Longleftrightarrow \quad Y &= (a_1 \ \ a_2)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + o(\|\boldsymbol{X}\|) \ = \ (\text{線形関数}) + (\text{誤差}) \end{aligned}$$

の形となる．ただし，$\boldsymbol{X} := (X_1, X_2) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}$ である．さらに $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ とすれば，この式は

$$Y \ = \ \underline{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{X}} + o(\|\boldsymbol{X}\|)$$

となる．下線部は「内積測定器」，すなわち線形汎関数である．やはり，『C^1 関数は局所的に線形関数＋誤差に見える』のである．

もう一度図 2.3 を眺めてみよう．等高線と直交するように描かれたベクトルが $\boldsymbol{a}$ に他ならない．（あとで「勾配ベクトル」と呼ばれるものである．）なぜこのベクトルが f の等高線と直交するのか．そのヒントは，すでに前章の「内積測定器」の部分で十分に与えられているから，読者はぜひ自力で答えをだし，納得していただきたい．

一般次元の場合：まとめに替えて． 一般の C^1 関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の線形近似式を見ておこう．とくに意味はないが，$n = 8$ とする．$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_8) \in \mathbb{R}^8$ を（ベクトルの）変数とし，そこでの関数 f の値を $f(\boldsymbol{x}) =: y \in \mathbb{R}$ と表すことにする．$\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_8) \in \mathbb{R}^8$ を定点（具体的な定数値からなるベクトル）とすれば，$\boldsymbol{p}$ における関数 f の 1 次 Taylor 展開は

$$\begin{aligned} y \ = \ f(\boldsymbol{x}) &= \underline{f(\boldsymbol{p}) + f_{x_1}(\boldsymbol{p})(x_1 - p_1) + \cdots + f_{x_8}(\boldsymbol{p})(x_8 - p_8)} + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|) \\ &= \underline{(1\,\text{次関数})} + \ (\text{誤差}) \end{aligned}$$

となる．ただし

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\| \ := \ \sqrt{(x_1-p_1)^2+\cdots+(x_8-p_8)^2}$$

は，Taylor 展開を眺めるときのスケール（顕微鏡の視野の幅）である．

ここで $q:=f(\boldsymbol{p})$，$a_k:=f_{x_k}(\boldsymbol{p})$ $(k=1,2,\ldots,8)$ とおくと，これらは与えられた関数 f とベクトル $\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^8$ から決まる具体的な定数値である．視野の中心を原点と思うために，変数変換

$$\boldsymbol{X} \ := \ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}, \qquad \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_8 \end{pmatrix} \ := \ \begin{pmatrix} x_1-p_1 \\ \vdots \\ x_8-p_8 \end{pmatrix}, \qquad Y:=y-q$$

を施して上の 1 次近似式を変形すれば，次のように線形近似式を得る：

$$\begin{aligned} Y \ &= \ a_1X_1+\cdots+a_8X_8+o(\|\boldsymbol{X}\|) \\ \iff Y \ &= \ (a_1 \ \cdots \ a_8)\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_2 \end{pmatrix}+o(\|\boldsymbol{X}\|) \\ \iff Y \ &= \ \underline{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{X}}+o(\|\boldsymbol{X}\|) \ = \ \underline{(\text{線形汎関数})}+(\text{誤差}) \end{aligned}$$

ただし，

$$\boldsymbol{a} \ := \ (a_1,\ldots,a_8) \ = \ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_8}(\boldsymbol{p})\right) \ \in \ \mathbb{R}^8$$

である．このベクトルは関数 f の $\boldsymbol{p}$ における**勾配ベクトル** (gradient vector) と呼ばれ，$\boldsymbol{a}=\mathrm{grad}\,(f,\boldsymbol{p})$ と表される．

$\boldsymbol{a}$ が「勾配」ベクトルと呼ばれる理由は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{X}$ が同じ方向を向いた場合，その内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{X}\approx Y$（$=$ 関数の変化量）が最大になるからである．すなわち，高さの「勾配」がもっとも大きく，登るのが一番大変な方向が $\boldsymbol{a}$ である．[5]

以上のことから，『C^1 関数は局所的に線形汎関数＋誤差に見える』ことが確認される．とくにこの線形汎関数は，勾配ベクトルと，$\boldsymbol{p}$ から見た $\boldsymbol{x}$ の位置を表すベクトル $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}$ との内積を測定する「内積測定器」なのである．

2.2 2 次元から 2 次元へ

次に，2 次元から 2 次元の C^1 写像を「線形近似」することを考えよう．[6]

[5]地図でいうと，等高線がもっとも密になっている方向に対応する．

[6]細かいことだが関数 (function) と写像 (mapping) の違いを明解にしておこう．同じものだと定義する文献もあるが，次のように区別するのが一般的のように思われる：まず，与えられた集合の各元にたいし，ある別の集合の元をひとつずつ対応付けたものが写像である．つぎに，写像の中でも，与えられた集合の各元にたいし，数（実数もしくは複素数）をひとつずつ対応付けるものが関数である．

$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を連続写像とする．変数（ベクトル）を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ とし，その像を $\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ と表そう．このとき，ϕ はもう少し詳しく，

$$\phi(\boldsymbol{x}) \;=\; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

成分ごとに表せる．いま，ϕ は C^1 級写像と仮定しよう．すなわち，関数 $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ がそれぞれ C^1 級である，と仮定する．まずはこれら成分ごとの関数を局所化して，1 次関数を取り出してみよう．

定義域側でベクトル $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$ をひとつ固定し，その像を $\phi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q} = (q_1, q_2)$ とする．このとき，定数値 $a_{11} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{p})$ および $a_{12} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{p})$ が定まり，$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{p}$ のとき Taylor 展開

$$y_1 = f_1(\boldsymbol{x}) \;=\; q_1 + \underline{a_{11}(x_1 - p_1) + a_{12}(x_2 - p_2)} + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|)$$

が成り立つ．同様に，定数値 $a_{21} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{p})$，$a_{22} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{p})$ が定まり

$$y_2 = f_2(\boldsymbol{x}) \;=\; q_2 + \underline{a_{21}(x_1 - p_1) + a_{22}(x_2 - p_2)} + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|)$$

も成り立つ．(下線は f_1 および f_2 の勾配ベクトルとの「内積測定器」部分を表す．)

これらを縦に並べて整理すれば，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + \underline{\begin{pmatrix} a_{11}(x_1 - p_1) + a_{12}(x_2 - p_2) \\ a_{21}(x_1 - p_1) + a_{22}(x_2 - p_2) \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|) \\ o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|) \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} y_1 - q_1 \\ y_2 - q_2 \end{pmatrix} &= \underline{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|) \\ o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

この時点で，線形近似部分がかなり見えてきた．

ふたつの顕微鏡を準備し，1 つは視野の中心を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ にあわせ，もう 1 つは $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{q}$ にあわせる．それぞれの中心からのずれをベクトル

$$\boldsymbol{X} \;:=\; \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{Y} \;:=\; \boldsymbol{y} - \boldsymbol{q}$$

で表せば，上の式より関係式

$$\boldsymbol{Y} \;=\; \underline{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \boldsymbol{X}} + \underline{\underline{\begin{pmatrix} o(\|\boldsymbol{X}\|) \\ o(\|\boldsymbol{X}\|) \end{pmatrix}}}$$

が得られる．ただし，2 重下線部は $\boldsymbol{Y}$ と下線部の間の誤差（「誤差ベクトル」）である．それぞれの成分は視野のスケール $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\| = \|\boldsymbol{X}\|$ と比べ相対的に早く 0 に近づくから，2 重下線部は $\boldsymbol{X}$ と比べ無視できるほどのベクトルである．以下ではこのような「誤差ベクトル」をわざわざ成分ごとに表さずに，$\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|)$ もしくは $\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{X}\|)$ のように表すことにしよう．（この小さな $\boldsymbol{o}$ は，太字の o である．）[7]

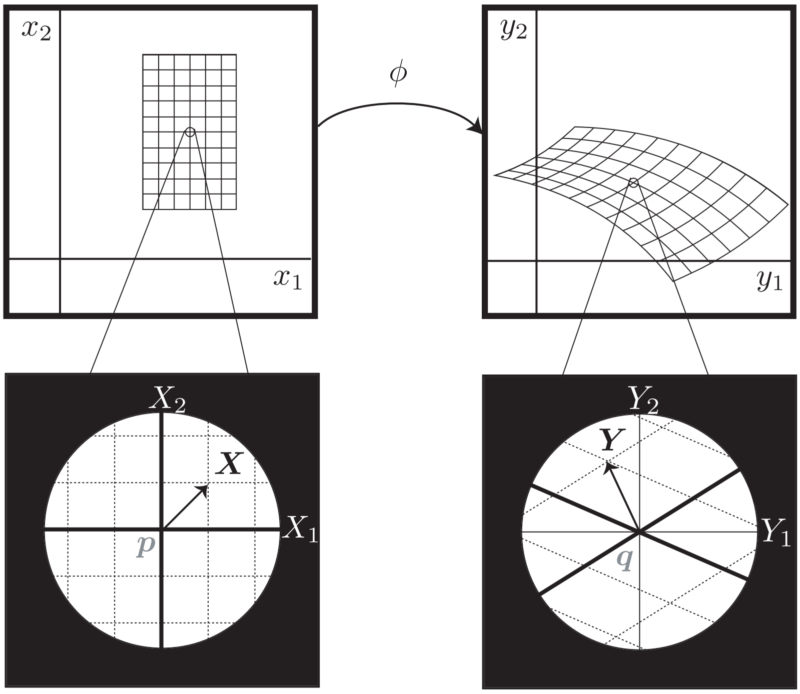

図 2.4: 線形近似の概念図．歪みをともなうような ϕ の作用でも，十分に拡大したふたつの顕微鏡で観測すれば，あたかも線形写像のように見えるだろう．

さていま，ふたつの顕微鏡の拡大率を十分に上げれば，写像 ϕ が $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$ を $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{q}$ に写す様子が，あたかも $\boldsymbol{X}$ を $\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)\boldsymbol{X}$ に写す線形写像のように見える，ということがわかった．

ここで現れる行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}$$

の各成分は，C^1 級写像 $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とベクトル $\boldsymbol{p}$ に応じて具体的な実数値をもつ．(ちょうど，先に見た C^1 級関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の微分係数 $a = f'(p)$ に対応する数値である．) この行列は習慣的に「ヤコビ行列」(Jacobian matrix) と呼ばれたり，単に「微分係数」(differential coefficient) と呼ばれたりする．[8]

ここでは，あとで多様体へ応用することを念頭において，顕微鏡に現れる $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像

$$\boldsymbol{X} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \boldsymbol{X}$$

のことを ϕ の $\boldsymbol{p}$ における**微分** (derivative) と呼ぶことにしよう．

---

[7] 著者はベクトルをボールド体で表現するのは嫌いで，講義ではいつも $\vec{x}$, $\vec{p}$ など矢印を用いている．この $\boldsymbol{o}$ も $\vec{o}$ と書くと感じがでるのだが，一方で $\vec{o}(\|\vec{x}-\vec{p}\|)$ と書くと今度は読みづらい気がする．どうしたものか．

[8] 「微分行列」(differential matrix) と呼んでもよいかもしれない．1 次元も，微分係数 $a \in \mathbb{R}$ は 1×1 行列 (a) である．

ネーミングはとにかく，2 次元の写像を局所化することで線形写像が取り出された，その事実さえ認識できていればこの章の目的は果たされたことになる．

余談（その1）． C^1 級関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が C^0 級関数

$$Df:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad Df(p) \ := \ f'(p)$$

を「導関数」として定めるように，C^1 級写像 $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は C^0 級写像

$$D\phi:\mathbb{R}^2\to M_2(\mathbb{R}),\quad D\phi(\boldsymbol{p}) \ := \ \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{p}) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{p}) \end{pmatrix}$$

を「導関数」として定める．早い話が，f の微分係数が $x=p$ に応じて連続に変化するように，ϕ の「微分行列」も $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$ に応じて連続に変化するのである．

余談（その2）． すぐに分かることだが，

$$D\phi(\boldsymbol{p})\boldsymbol{X} \ = \ \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\,(f_1,\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{X} \\ \mathrm{grad}\,(f_2,\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{X} \end{pmatrix}$$

が成り立つ．すなわち，微分の像の各成分は勾配ベクトルとの「内積測定器」で表現される．

具体例． いま，写像 $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は

$$\phi:\boldsymbol{x} \ \mapsto \ \boldsymbol{y} \ = \ \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \ := \ \begin{pmatrix} \sin(3x_1+2x_2) \\ \sin(x_1+4x_2) \end{pmatrix}$$

で与えられているとする．このとき，原点 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ における微分を求めてみよう．

テーラー展開 $\sin t = t - t^3/3! + o(t^3)$ の t に $3x_1+2x_2,\ x_1+4x_2$ をそれぞれ代入して

$$\begin{aligned} y_1 \ &= \ f_1(\boldsymbol{x}) \ = \ (3x_1+2x_2) - \frac{1}{3!}(3x_1+2x_2)^3 + o((3x_1+2x_2)^3) \\ y_2 \ &= \ f_2(\boldsymbol{x}) \ = \ (x_1+4x_2) - \frac{1}{3!}(x_1+4x_2)^3 + o((x_1+4x_2)^3) \end{aligned}$$

をえる．3 次以上の項は無視できるので結局 $\boldsymbol{x}\approx\boldsymbol{0}$ のとき

$$\begin{aligned} y_1 \ &= \ 3x_1+2x_2+o(\|\boldsymbol{x}\|) \\ y_2 \ &= \ x_1+4x_2+o(\|\boldsymbol{x}\|) \end{aligned}$$

となる．これをまとめると，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \ &= \ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{0}\|) \\ \iff \qquad \boldsymbol{y} \ &= \ A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{x}\|) \end{aligned}$$

である．ただし，$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とおいた．いま，$\phi(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ であることから，$A=D\phi(\boldsymbol{0})$ である．すなわち，ϕ 自体が原点の近くで微分（線形写像） $F:\boldsymbol{x}\mapsto A\boldsymbol{x}$ に近いことになる．これを図示してみると，図 2.5 のようになる．原点の近くではかなり線形写像に近いことが確認できる．

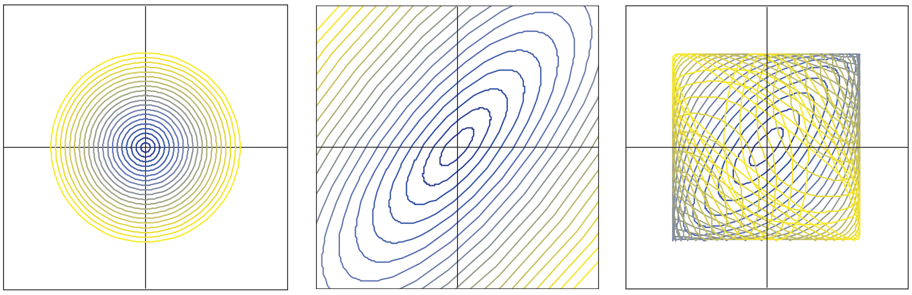

図 2.5: 左は原点中心半径 $k/20$ $(1 \le k \le 20)$ の円たち．中央はそれらを線形写像 F で写したもの．右は ϕ で写したもの．三角関数を使っているので，像は一辺が 2 の正方形の中に納まる．しかし，原点近傍ではほとんど F と変わらない．

2.2.1 一般次元の場合：まとめに替えて

$\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級写像とする．とくに意味は無いが，$m = 7,\ n = 4$ として話を進める．変数（ベクトル）を $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_7)$ とし，その像を $\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_4)$ と表そう．このとき，ϕ は成分ごとに

$$y_i \ = \ f_i(\boldsymbol{x}) \quad (i = 1, \dots, 4)$$

と $\boldsymbol{x}$ の（実質は 7 変数の）C^1 級関数の形で書ける．

具体的にベクトル $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_7)$ を選んで固定し，$\phi(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q} = (q_1, \dots, q_4)$ とすれば，$4 \times 7 = 28$ 個の定数

$$a_{ij} \ := \ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{p}) \quad (1 \le i \le 4,\ 1 \le j \le 7)$$

が定まり，各 $i = 1, \dots, 4$ にたいし $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ における Taylor 展開

$$\begin{aligned} y_i \ &= \ f_i(\boldsymbol{x}) \ = \ q_i + \underline{a_{i1}(x_1 - p_1) + \cdots + a_{i7}(x_7 - p_7)} + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|) \\ \iff \ y_i - q_i \ &= \ \underline{\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{i7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \dots \\ x_7 - p_7 \end{pmatrix}} + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|) \end{aligned}$$

が成り立つ．視点を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}$ および $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{q}$ 中心に移すために，変数変換

$$\boldsymbol{X} \ := \ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{p} \ = \ \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ \vdots \\ x_7 - p_7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Y} \ := \ \boldsymbol{y} - \boldsymbol{q} \ = \ \begin{pmatrix} y_1 - q_1 \\ \vdots \\ y_4 - q_4 \end{pmatrix}$$

を施して上の Taylor 展開の式を縦にまとめれば，

$$\boldsymbol{Y} \ = \ \underline{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{17} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{47} \end{pmatrix}} \boldsymbol{X} + \boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|)$$

を得る．これが写像 ϕ の $\boldsymbol{p}$ における線形近似式である．下線部に現れる行列は C^1 級写像 $\phi : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ とベクトル $\boldsymbol{p}$ によって値が具体的に定まる「微分係数」であり，$D\phi(\boldsymbol{p})$ で表す．[9] また，$\boldsymbol{p}$ ごとに定まる線形写像 $\boldsymbol{X} \mapsto D\phi(\boldsymbol{p})\boldsymbol{X}$ を ϕ の $\boldsymbol{p}$ における **微分** (derivative) と呼び，必要があれば記号 $d\phi : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ で表すことにする．

[9]直感的にわかりづらい記号だが，習慣的な書き方なのである．とにかくその実体はヘビーな，しかし具体的な実数値からなる 4×7 行列であることは忘れないようにしておこう．