担当教員：川平 友規

講義第 12 回（6/12）：3 変数の微分積分

配布日：6/12/2020　Version：1.1

●● 6 月 12 日の講義内課題 ●●

３変数関数の偏微分

問題 12-1. (全微分) xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ 上の関数 $f(x,y,z)$ が点 (a,b,c) において全微分可能であることの定義を書け．

問題 12-2. (偏微分) x,y,z を変数とする次の関数の偏導関数を求めよ．

(1) $f(x,y,z) = xyz$

(2) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

３変数関数の積分

問題 12-3. (累次積分) 以下は左辺の重積分を累次積分に書き直したものである．閉領域 D を集合の形で表し，さらに積分の値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\iiint_D (x+y+z)\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_{-1}^1 (x+y+z)\,dz$

(2) $\displaystyle\iiint_D z\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{x+1} dy \int_0^{x+y} z\,dz$

問題 12-4. (有界集合の体積) $\mathbb{R}^3$ 内の集合 K の体積の定義を述べよ．

問題 12-5. (ヤコビアン) 以下の C^1 級関数 $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ が定める変数変換のヤコビアンを書け．

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v+w \\ uv+vw+wu \\ uvw \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ w \end{pmatrix}$

問題 12-6. (極座標変換) 3 次元の極座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

（そのヤコビアンは $r^2\sin\theta$ である）を用いて，閉領域 $D = \left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2\right\}$ 上の積分 $\displaystyle\iiint_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ の値を求めよ．(答．πR^4)

●● 6 月 12 日の講義ノート ●●

参考書の該当箇所：[川平] なし [三宅] なし

内積と外積

まず空間ベクトルの内積と，3 次元ベクトル特有の積である,「外積」の性質をまとめておく.

定義 (内積と外積) 空間ベクトル

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

に対し，以下のように定める：

- $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の**内積**：
$$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} := a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$
- $\vec{a}$ の**長さ**：
$$\boldsymbol{|\vec{a}| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$
- $\vec{a}$ の**外積**：
$$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)}$$

例題 12.1 (内積と外積の性質) $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積と外積について，以下の性質を示せ．ただし，θ $(0 \le \theta \le \pi)$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度とする．

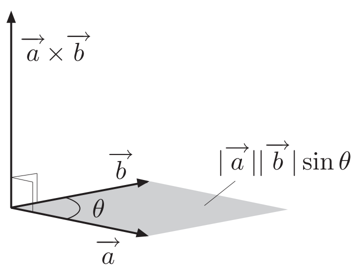
(1) $\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}$.

(2) $\boldsymbol{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta}$. とくに，この値は $\vec{0}$，$\vec{a}$，$\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ を頂点にもつ平行四辺形の面積に等しい．

(3) $\vec{a}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき，外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直．

解答のスケッチ (1) は平面ベクトルと同様．(余弦定理 $|\vec{a}|$ を用いる．高校の教科書を参照．)
(2) は次の式変形による：

$$\begin{aligned}
&|\vec{a} \times \vec{b}|^2 \\
=&(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
=&(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
=&|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\
=&|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\left(1 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}\right) \\
=&|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - \cos^2\theta) \\
=&|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta.
\end{aligned}$$



(3) $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ と $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ を定義どおりに成分の値を用いて計算すると，ともに 0 となることが確認できる． ■

命題 12.1 (内積一定の集合) 空間ベクトル $\vec{A}\neq\vec{0}$ と垂直な平面で $\vec{a}$ を通るものは

$$\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \vec{A}\cdot\vec{x}=\vec{A}\cdot\vec{a}\right\}$$

と表される．また，すべての実数 k に対し，集合

$$E_k=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \vec{A}\cdot\vec{x}=k\right\}$$

は $\vec{A}$ に垂直な平面である．

証明. $\vec{x}\neq\vec{a}$ がそのような平面にあることの必要十分条件は，$\vec{A}\perp(\vec{x}-\vec{a})$．よって $\vec{A}\cdot(\vec{x}-\vec{a})=0$ であればよい．

また，与えられた実数 k に対し，$\vec{a_k}:=k\vec{A}/|\vec{A}|^2$ と定めると，$k=\vec{A}\cdot\vec{a_k}$ を満たす．よって $E_k=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \vec{A}\cdot\vec{x}=\vec{A}\cdot\vec{a_k}\right\}$ と表される． ■

全微分と偏微分

以下，3 変数関数 $y=f(x_1,x_2,x_3)$ を考える[1]．以下，表記を簡単にするために，ベクトル変数 $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ を用いて $y=f(\vec{x})$ とも表すことにする．

連続性. まずは関数の連続性を定義する．

定義 (関数の極限と連続性) 関数 $y=f(\vec{x})$ とベクトル $\vec{a}$ に対し，$|\vec{x}-\vec{a}|$ が限りなく 0 に近づくとき，$f(\vec{x})$ がある定数 A に限りなく近づくものとする．このとき，$f(\vec{x})$ は $\vec{x}\to\vec{a}$ のとき A に**収束する**といい，

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})=A \qquad \text{または} \qquad f(\vec{x})\to A \ \ (\vec{x}\to\vec{a})$$

と表す．また，$f(\vec{x})\to f(\vec{a})$ $(\vec{x}\to\vec{a})$ が成り立つとき，関数 $f(\vec{x})$ は $\vec{a}$ において**連続**であるという．

全微分可能性. 関数が「全微分可能」であるとは，1 次関数で近似できることであった．$\vec{A}=(A_1,A_2,A_3)$ をベクトル定数，B を実数の定数とするとき，3 変数関数の 1 次関数は

$$y=A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+B=\vec{A}\cdot\vec{x}+B$$

の形となる．また，ランダウの記号を次のように拡張しておく：少なくとも関数 $\vec{a}$ を含む領域上で定義された関数 $E(\vec{x})$ が のとき $\dfrac{E(\vec{x})}{|\vec{x}-\vec{a}|}\to 0$ $(\vec{x}\to\vec{a})$ を満たすとき，

$$E(\vec{x})=o(\vec{x}-\vec{a}) \qquad (\vec{x}\to\vec{a})$$

と表す．これらを用いて，全微分可能性を次のように定義する：

[1] もちろん $w=f(x,y,z)$ のように表してもよいが，こちらのほうが n 変数の場合を類推しやすい．

定義 （関数の全微分可能性） 関数 $y = f(\vec{x})$ が $\vec{a}$ において**全微分可能**であるとは，あるベクトル定数 $\vec{A}$ が存在して，$|\vec{x} - \vec{a}| \to 0$ のとき

$$\boldsymbol{f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \vec{A} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + o(|\vec{x} - \vec{a}|)} \tag{12.1}$$

と表されることをいう．このとき，ベクトル $\vec{A}$ を関数 $y = f(\vec{x})$ の**勾配ベクトル**とよび，$\boldsymbol{\vec{A} = \nabla f(\vec{a})}$ とも表す．

例題 12.2 (全微分可能性) 関数 $w = f(x, y, z) = xyz$ は $(1, -1, 2)$ で全微分可能であることを示せ．また，この点での勾配ベクトルを求めよ．

解答. $\Delta x = x - 1$，$\Delta y = y + 1$，$\Delta z = z - 2$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (1 + \Delta x)(-1 + \Delta y)(2 + \Delta z) \\ &= -2 - 2\Delta x + 2\Delta y - \Delta z + \underline{2\Delta x\Delta y + \Delta y\Delta z - \Delta z\Delta x + \Delta x\Delta y\Delta z} \\ &= f(1, -1, 2) + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \underline{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2})}. \end{aligned}$$

ただし，下線部の計算では $|\Delta x|, |\Delta y|, |\Delta z|$ がそれぞれ $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ よりも小さいことを用いた．これをベクトルの記号に直せば式 (12.1) の形となるので，全微分可能である．とくに，勾配ベクトルは $(-2, 2, -1)$.
■

定義 （関数の偏微分可能性） 関数 $y = f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3)$ が $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ において**偏微分可能**であるとは，各 $k = 1, 2, 3$ に対し極限

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{h} &= A_1, \\ \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h, a_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{h} &= A_2, \\ \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, a_3 + h) - f(a_1, a_2, a_3)}{h} &= A_3 \end{aligned}$$

がそれぞれ存在することをいう．A_k はそれぞれ（x_k に関する）**偏微分係数**とよばれる．また，関数 $y = f(\vec{x})$ が定義域上の各点で偏微分可能であるとき，各 $\vec{x}$ に x_k に関する偏微分係数を対応させる関数を $y = f(\vec{x})$ の x_k に関する**偏導関数**とよび，$\boldsymbol{\dfrac{\partial y}{\partial x_k}}$，$\boldsymbol{y_{x_k}}$，$\boldsymbol{f_{x_k}(\vec{x})}$，$\boldsymbol{f_{x_k}(x_1, x_2, x_3)}$，$\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x})}$，$\boldsymbol{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, x_3)}$ などと表される．

「n 階偏導関数」,「C^n 級関数」も 2 変数関数の場合と同様に定義される．

例題 12.3 (全微分可能性と連続性・偏微分可能性) 関数 $y = f(\vec{x})$ がある点 $\vec{a}$ で全微分可能であれば，連続であり，偏微分可能でもあることを示せ．とくに，勾配ベクトルは

$$\boldsymbol{\nabla f(\vec{a}) = (f_{x_1}(\vec{a}), f_{x_2}(\vec{a}), f_{x_3}(\vec{a}))} \tag{12.2}$$

と表されることを示せ．

解答. 式 (12.1) より明らかに $\vec{x} \to \vec{a}$ のとき $f(\vec{x}) \to f(\vec{a})$．よって連続である．また，$\vec{x} = \vec{a} + (h, 0, 0)$ として $h \to 0$ とすれば，$f(\vec{x}) - f(\vec{a}) = A_1 h + o(h)$ となる．これは $f_{x_1}(\vec{a}) = A_1$ を意味する．他の成分も同様である．$\nabla f(\vec{a}) = (A_1, A_2, A_3)$ より勾配ベクトルの表現を得る． ■

次の事実も 2 変数の場合と同様である（証明略）

定理 12.2 (C^1 級関数と全微分可能性，偏微分の順序交換) 関数 $y = f(\vec{x})$ が定義域上で C^1 級であれば，全微分可能である．また，C^2 級であれば 2 階偏導関数について偏微分の順序を交換してよい．すなわち，$f_{x_1 x_2} = f_{x_2 x_1}$ 等が成り立つ．

以下では話を簡単にするため，扱う関数は C^∞ 級であり，すべて好きなだけ微分（偏微分）できるものとしよう．

例題 12.4 (合成関数の微分) 曲線 $\vec{x} = \vec{x}(t)$ に対し，関数 $y = f(\vec{x})$ との合成関数 $F(t) = f(\vec{x}(t))$ の微分は勾配ベクトルと速度ベクトルの内積

$$\boldsymbol{F'(t) = \nabla f(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'(t)}$$

で与えられることを示せ：ただしダッシュ ($'$) は t による微分 $\dfrac{d}{dt}$ を表す．

解答のスケッチ. $t \to t_0$ のとき $\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \vec{x}'(t_0)(t - t_0) + \vec{E}(t)$ （ただし $\vec{E}(t)$ の各成分は $o(|t - t_0|)$）と表される．式 (12.1) より $\vec{x}(t) \to \vec{x}(t_0)$ のとき

$$\begin{aligned} f(\vec{x}(t)) - f(\vec{x}(t_0)) &= \nabla f(\vec{x}(t_0)) \cdot \Big(\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)\Big) + o(|\vec{x}(t) - \vec{x}(t_0)|) \\ &= \nabla f \cdot (\vec{x}(t_0)) \cdot \vec{x}'(t_0)(t - t_0) + o(|t - t_0|). \end{aligned}$$

これは題意の等式を意味する． ■

3 重積分

xyz 空間の直方体

$$D := \{(x, y, z) \mid a_1 \le x \le b_1,\ a_2 \le y \le b_2,\ a_3 \le z \le b_3\}$$

を 3 次元の**区画**とよび，記号 $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ で表すことにする．このような区画上の関数 $w = f(x, y, z)$ について，積分を考えよう．

アイディアは 2 変数の場合と同様である．

- 区間 $[a_1, b_1]$ を l 分割する点 $a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = b_1$,
- 区間 $[a_2, b_2]$ を m 分割する点 $a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b_2$,
- 区間 $[a_3, b_3]$ を n 分割する点 $a_3 = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = b_3$,

を選び，計 lmn 個の小区画

$$D_{ijk} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$$

から代表点 $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ を選び，**リーマン和**

$$\sum_{i,j,k} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

（ただし $1 \leq i \leq l-1$, $1 \leq j \leq m-1$, $1 \leq k \leq n-1$）を考える．各区間の分割の最大幅が 0 に近づくように分割点を増やしていくとき，（分割点や代表点の取り方に依存せず）ある実数 I が存在してリーマン和が I に近づくならば，関数 $f(x,y,z)$ は区画 D 上で**積分可能**であるといい，

$$I = \iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

と表す．

実際の計算には，たとえば次の公式が使える：

定理 12.3（3 変数の累次積分） 関数 $f(x,y,z)$ が区画 $D = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$ 上で連続であれば積分可能であり，次の等式が成り立つ：

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

右辺を**累次積分**とよぶ．この定理の条件下では，積分の順序を交換してもよい．

例題 12.5（3 重積分の計算） $D = [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$ とするとき，$\iiint_D (x+y+z)\,dxdydz$ を求めよ．

解答． 定理 12.3 より，

$$\begin{aligned}
\iiint_D (x+y+z)\,dxdydz &= \int_0^a \left(\int_0^b \left(\int_0^c (x+y+z)\,dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^a \left(\int_0^b \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^c dy \right) dx \\
&= \int_0^a \left(\int_0^b \left(cx + cy + \frac{c^2}{2} \right) dy \right) dx \\
&= \int_0^a \left[cxy + \frac{cy^2}{2} + \frac{c^2 y}{2} \right]_0^b dx \\
&= \int_0^a \left(bcx + \frac{b^2 c}{2} + \frac{bc^2}{2} \right) dx \\
&= \left[\frac{bcx^2}{2} + \frac{bc(b+c)x}{2} \right]_0^a \\
&= \frac{abc}{2}(a+b+c).
\end{aligned}$$

■

区画以外の積分． 関数 $f(x,y,z)$ の定義域 D が区画でない有界閉領域であるとき，D を含む区画 $\tilde{D}$ をとり，D の外側では関数 $f(x,y,z) = 0$ とおくことで，関数 $f(x,y,z)$ を区画 $\tilde{D}$ 上の関数と思うことができる．そのような関数が区画 $\tilde{D}$ 上で積分可能であるとき，$f(x,y,z)$ は D 上の積分可能であるとみなし，$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz := \iiint_{\tilde{D}} f(x,y,z)\,dxdydz$ として定義する．

例題 12.6（区画以外での 3 重積分） $D = \{(x,y,z) \mid x,y,z \geq 0, x+y+z \leq \pi\}$ とするとき，$\iiint_D \sin(x+y+z)\,dxdydz$ を求めよ．

解答. 2 変数の場合と同様に，累次積分に置き換えて計算する．

$$\begin{aligned}\iiint_D \sin(x+y+z)\,dxdydz &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi-x}\left(\int_0^{\pi-x-y}\sin(x+y+z)\,dz\right)dy\right)dx\\ &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi-x}\Big[-\cos(x+y+z)\Big]_0^{\pi-x-y}dy\right)dx\\ &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi-x}(1-\cos(x+y))\,dy\right)dx\\ &= \int_0^{\pi}\Big[1+-\cos(x+y)\Big]_0^{\pi-x}dx\\ &= \int_0^{\pi}(\pi-x-\sin x)\,dx = \frac{\pi^2}{2}-2\end{aligned}$$

■

体積の定式化. 「面積」の概念と同様に,「体積」も重積分を用いることで定式化できる．

> **定義 （空間内の集合の体積）** $\mathbb{R}^3$ 内の集合 D に対し定数関数 $f(x,y,z)=1$ が D 上で積分可能であるとき D は**体積確定**であるといい，その**体積**を $\mathrm{Vol}\,(D) := \iiint_D dxdydz$ で定める．

前回，2 変数関数の「グラフに囲まれる部分の体積」を重積分で定義した．次の公式は，それを正当化するものである（証明略）：

> **定理 12.4 (曲面ではさまれた部分の体積)** xy 平面上の領域 D 上の連続関数 $\phi_1(x,y)$ と $\phi_2(x,y)$ が $\phi_1(x,y)\geq\phi_2(x,y)$ を満たすとき，それらの 3 次元グラフで囲まれる部分
>
> $$K=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D, \phi_1(x,y)\leq z\leq\phi_2(x,y)\}$$
>
> の体積は
>
> $$\mathbf{Vol}\,(\boldsymbol{K}) = \iint_{\boldsymbol{D}}\{\boldsymbol{\phi_2(x,y)-\phi_1(x,y)}\}\,\boldsymbol{dxdy}$$
>
> で与えられる．

変数変換とヤコビアン

変数 x,y,z がそれぞれ変数 u,v,w の C^1 級関数であるとき，変数変換 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\Phi\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(u,v,w)\\y(u,v,w)\\z(u,v,w)\end{pmatrix}$ を考えることができる．

このとき，変数 u,v,w の C^1 級関数

$$\frac{\boldsymbol{\partial(x,y,z)}}{\boldsymbol{\partial(u,v,w)}} := \boldsymbol{x_uy_vz_w+x_vy_wz_u+x_wy_uz_v-x_wy_vz_u-x_vy_uz_w-x_uy_wz_v}$$

を**ヤコビアン**とよぶ[2]．2 変数の場合と同様に，C^1 級の変数変換は局所的に「ヤコビ行列による 1 次変換」によって近似される．また，ヤコビアンの絶対値はその 1 次変換による「局所的な体積の拡大率」となる．

積分に関しては，次の公式が成り立つ（証明略）：

定理 12.5 (3 変数関数の積分の変数変換) 変数変換 $(x,y,z)=\Phi(u,v,w)$ によって領域 E が領域 D に対応するとき，

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydy=\iiint_E f(\Phi(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw.$$

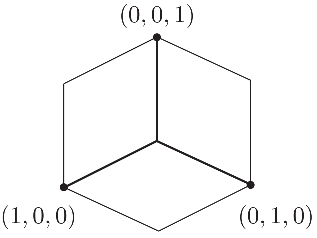
例題 12.7 (1 次変換) $D=\{(x,y,z)\mid 0\le x+y+z\le 1, 0\le y+z\le 1, 0\le z\le 1\}$ で表される平行 6 面体の体積を求めよ．

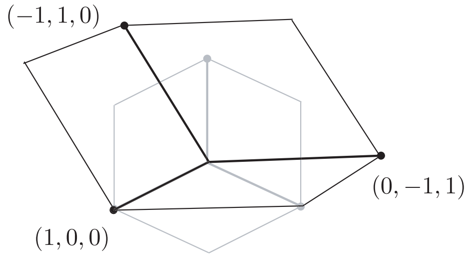
解答． $\mathrm{Vol}\,(D)=\iiint_D dxdydz$ を計算すればよい．$u=x+y+z$，$v=y+z$，$w=z$ とおくと，変数変換 $(x,y,z)=\Phi(u,v,w)=(u-v,v-w,w)$ が定まる[3]．このとき，ヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=1$ （定数関数）であり，Φ は区画 $E=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ を D に写すので，求める体積は

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\,(K)=\iiint_D 1\cdot dxdydz&=\iiint_E 1\cdot|1|\,dudvdw\\&=\int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^1 1\cdot dw\right)dv\right)du\\&=1.\end{aligned}$$

■

注意（D の形）． この平行 6 面体 D が実際にどのような形をしているのか，式から想像するのは意外と難しい．線形代数で学ぶ「1 次変換」の考え方に慣れていれば，E のヤコビ行列 $D\Phi$ による像としてある程度の形がわかる．具体的にいえば，D とはベクトル $(1,0,0),(-1,1,0),(0,-1,1)$ によって張られる平行 6 面体である．





[2]行列 $D\Phi=\begin{pmatrix}x_u & x_v & x_w\\ y_u & y_v & y_w\\ z_u & z_v & z_w\end{pmatrix}$ を**ヤコビ行列**とよび，ヤコビアンとはその行列式 $\det D\Phi$ として定義される．行列や行列式について，詳しくは線形代数で学ぶ．

[3]このときヤコビ行列は $D\Phi=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$．

担当教員：川平 友規

例題 12.8 (空間の極座標変換) 空間の座標変換

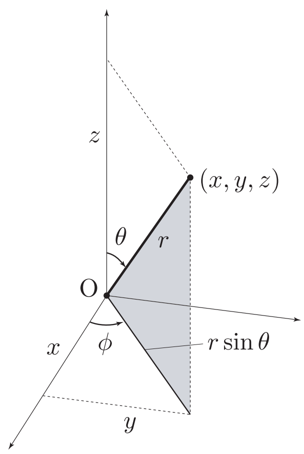
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$

を用いて，半径 $R>0$ の球体の体積を求めよ．

解答． $D=\left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2\right\}$ の体積は $\mathrm{Vol}\,(D)=\iiint_D dxdydz$ で与えられる．空間の極座標変換により，$r\theta\phi$ 空間の区画 $E=[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$ が D に写る．このとき，ヤコビアンは $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=r^2\sin\theta$ となる[4]．よって求める体積は

$$\begin{aligned}\iiint_D 1\cdot dxdydz &= \iiint_E 1\cdot|r^2\sin\theta|\,drd\theta d\phi \\ &= \int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} r^2\sin\theta d\phi\right)d\theta\right)dr \\ &= \int_0^R r^2dr\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi \\ &= \frac{R^2}{3}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

■



別解（変数変換を用いない）． 累次積分を用いて，

$$\begin{aligned}\iiint_D 1\cdot dxdydz &= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dz\right)dy\right)dx \\ &= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\right)dx\end{aligned}$$

ここで括弧の中の積分は半径 $\sqrt{R^2-x^2}$ の円板の面積なので，上の式に続けて

$$=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)\,dx=\pi\left[R^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

■

[4]ヤコビ行列は $D\Phi=\begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\phi \\ y_r & y_\theta & y_\phi \\ z_r & z_\theta & z_\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\sin\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}$ となる．