担当教員：川平 友規

講義第 9 回（6/1）：重積分と累次積分

配布日：6/2/2020　Version：1.1

●● 6 月 1 日の講義内課題 ●●

言葉の定義

問題 9-1. (面積) $\mathbb{R}^2$ 上の有界集合 D が「面積確定」であることの定義を書け．そのとき，D の面積 $\mathrm{Area}\,(D)$ の定義を与えよ．

問題 9-2. $\mathbb{R}^2$ 上の「タテ線領域」,「ヨコ線領域」とは何か，定義を書け．

言葉の定義

問題 9-3. (積分の定義) 「累次積分」とは，どのような形の積分か述べよ．

問題 9-4. (累次積分) 以下の累次積分を求めよ．

(1) $I = \displaystyle\int_0^1 dx \int_x^{2x} (x^2 + y)\, dy$

(2) $I = \displaystyle\int_1^2 dy \int_0^{y^2} \frac{x}{y}\, dx$

問題 9-5. (積分の順序交換) 積分 $I = \displaystyle\int_0^1 dy \int_{2y}^2 y\sqrt{1+x^3}\, dx$ を求めよ．

問題 9-6. (グラフの間の面積) タテ線領域

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$$

は面積確定であり，その面積は

$$\mathbf{Area}\,(\boldsymbol{D}) = \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\}\, dx$$

で与えられることを示せ．

問題 9-7. (重積分) 与えられた積分領域 D における関数 $f(x, y)$ の積分 $I = \displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$ を計算せよ．

(1) $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

(2) $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2\}$, $f(x, y) = 2x - y$.

(3) $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\right\}$, $f(x, y) = x^2 y$.

●● 6 月 1 日の講義ノート ●●

参考書の該当箇所：[川平] 26 章 [三宅] 5.1

タテ線領域・ヨコ線領域と累次積分

タテ線・ヨコ線. まずは「タテ線領域」「ヨコ線領域」とよばれる集合を定義しよう[1]. 結論からいうと，これらの集合上で定義された連続関数の重積分は 1 変数の積分計算に帰着できるので，計算がしやすいのである：

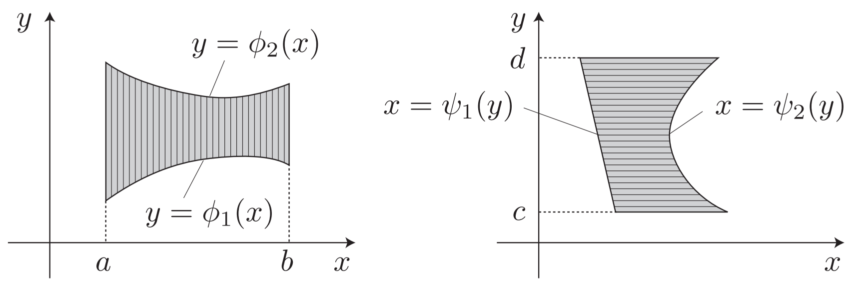
定義 （タテ線領域とヨコ線領域） 関数 $y=\phi_1(x)$，$y=\phi_2(x)$ は区間 $[a,b]$ 上の連続関数で $\phi_1(x)\le\phi_2(x)$ を満たすものとする．このとき，

$$\boldsymbol{D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ \phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\right\}} \tag{9.1}$$

の形で表される平面集合を**タテ線領域**とよぶ．同様に，**ヨコ線領域**とは，区間 $[c,d]$ 上の連続関数 $x=\psi_1(y)$，$x=\psi_2(y)$ で $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$ を満たすものを用いて

$$\boldsymbol{D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\right\}} \tag{9.2}$$

の形で表される平面集合をいう．



このとき次が成り立つ（証明略）：

定理 9.1 (タテ線・ヨコ線領域での重積分) 式 (9.1) のように与えられるタテ線領域 D 上の連続関数 $z=f(x,y)$ は D 上で積分可能であり，次の等式が成り立つ：

$$\boldsymbol{\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx} \tag{9.3}$$

また，式 (9.2) のようなヨコ線領域についても同様の公式が成り立つ．

累次積分. 式 (9.3) は実用上もっとも重要な計算公式であり，右辺のような「積分の積分」には，特別な名前がついている：

[1] もちろん「縦線領域」と書いてもよいが，見易さと書きやすさを考慮して「タテ線」にしている．

定義 （累次積分） 連続関数 $z = f(x, y)$ と式 (9.1) ようなタテ線領域に対し,「積分の積分」

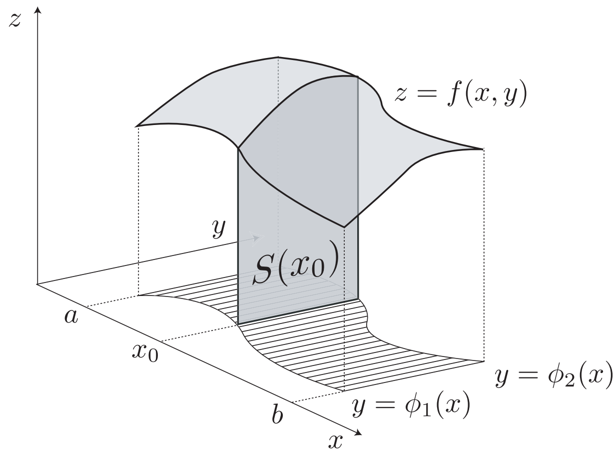
$$\int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx \tag{9.4}$$

を関数 $f(x, y)$ の**累次積分**とよぶ．累次積分は

$$\int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \tag{9.5}$$

のようにも表される．また，変数 x と y の役割を入れ替えることで，ヨコ線領域上の累次積分も同様に定義される．

累次積分の直観的な意味． この累次積分の値は，タテ線領域上の関数 $z = f(x, y)$ の 3 次元グラフと，xy 平面で囲まれる部分 K の「体積」にほかならない[2]．実際，K の平面 $x = x_0$ での切り口の面積 $S(x_0)$ は積分 $\displaystyle\int_{\phi_1(x_0)}^{\phi_2(x_0)} f(x_0, y)\, dy$ で与えられるから，式 (9.4) の累次積分は K の体積が $\displaystyle\int_a^b S(x)\, dx$ で与えられる，という高校数学でもおなじみの事実を示唆している．



計算方法． 式 (9.4) もしくは式 (9.5) の形の累次積分を計算するときは，まずは x をいったん定数だと思って $\displaystyle\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy$ の部分を変数 y に関する積分として計算する．その結果は x を含む式（関数）となるので，それを区間 $[a, b]$ 上でふつうに x で積分すればよい．

例 1（第 8 回の例 1）． 定理 9.1 と累次積分を用いて，区画 $D = [0, 1] \times [0, 1]$ 上の積分 $I = \displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$ を計算してみよう．$\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = 1$（定数関数）とすれば，区画 D もタテ線領域

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

とみなすことができる．よって定理 9.1 より，

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2)\, dy \right) dx.$$

[2]「体積」の概念も「面積」と同様に定義が必要であるが,「3 重積分」を用いればよいとすぐに想像がつくだろう．

カッコ内の積分を x を定数とみなして計算すればよいので，

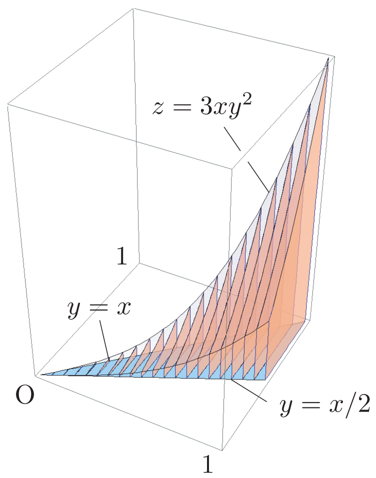
$$I = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

例題 9.1 (累次積分による重積分の計算) 関数 $z = f(x,y) = 3xy^2$ の積分領域 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ x/2 \le y \le x\}$ における重積分を求めよ．

解答. $f(x,y) = 3xy^2$ は D 上で連続なので，定理 9.1 より

$$\begin{aligned}\iint_D 3xy^2\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{x/2}^x 3xy^2\, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[xy^3 \right]_{x/2}^x dx \\ &= \int_0^1 x\{x^3 - (x/2)^3\}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{7x^4}{8}\, dx \\ &= \left[\frac{7x^5}{40} \right]_0^1 = \frac{7}{40}.\end{aligned}$$

■



次に，高校でおなじみの公式を確認しよう．

命題 9.2 (グラフで囲まれた部分の面積) タテ線領域

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$$

は面積確定であり，その面積は

$$\mathbf{Area}\,(D) = \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\}\, dx$$

で与えられる．ヨコ線領域についても同様である．

証明. $f(x,y) = 1$ は D 上で連続なので，定理 9.1 が適用できる．

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}\,(D) = \iint_D 1\, dxdy &= \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} 1\, dy \right) dx = \int_a^b \left[x \right]_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dx \\ &= \int_a^b \{\phi_2(x) - \phi_1(x)\}\, dx.\end{aligned}$$

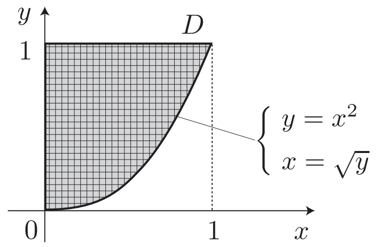
■

積分の順序交換

タテ線領域でありヨコ線領域でもある集合上での重積分は，定理 9.1 より 2 通りの累次積分が考えられる．その性質を利用すると，積分計算がうまくいく場合がある．

例題 9.2（積分の順序交換） 次の積分を求めよ．

$$I = \iint_D xe^{-y^2}\,dxdy, \quad D = \left\{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\right\}$$



失敗例． D はタテ線領域なので，定理 9.1 を適用して

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 xe^{-y^2}\,dy\right) dx = \int_0^1 x\left(\int_{x^2}^1 e^{-y^2}\,dy\right) dx$$

関数 e^{-y^2} の不定積分（原始関数）は初等関数で表現できないことが知られており，これ以上の計算はできない．

解答． D を図示してみると，

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{y}\}$$

とヨコ線領域としても表現できることがわかる．よって定理 9.1 がヨコ線領域に関して適用できて，

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} xe^{-y^2}\,dx\right) dy = \int_0^1 e^{-y^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y}{2}\,dy = \left[-\frac{e^{-y^2}}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}(e^{-1} - 1) = \frac{1 - 1/e}{4}. \end{aligned}$$

■

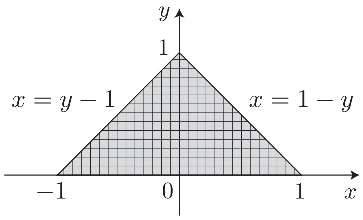
例題 9.3（積分の順序交換 2） ヨコ線領域

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1,\ y - 1 \le x \le 1 - y\}$$

上の連続関数 $f(x, y)$ の積分

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{1-y} f(x, y)\,dx$$

をタテ線領域上の積分として表せ．



解答． まずは積分領域 D を図示してみると，右図のようになる．よって D はふたつのタテ線領域

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) \mid -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le x + 1\} \\ D_2 &= \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le -x + 1\} \end{aligned}$$

の和集合 $D_1 \cup D_2$ と表現できるので，公式 8.2 (1) より

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y)\,dxdy &= \iint_{D_1} f(x, y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)\,dxdy \\ &= \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x, y)\,dy + \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} f(x, y)\,dy. \end{aligned}$$

■