担当教員：川平 友規

講義第 6 回（5/22）：多変数関数の偏微分と高階偏導関数

配布日：5/22/2020　Version：1.1

●● 5 月 22 日の講義内課題 ●●

偏微分（前回やり残したので再掲）

問題 6-1.（定義，偏微分可能性）

(1) 領域 D 上で定義された関数 $z = f(x, y)$ が $(a, b) \in D$ において偏微分可能であることの定義を書け．

(2) 領域 D 上で定義された関数 $z = f(x, y)$ が D 上で偏微分可能であることの定義を書け．

問題 6-2.（偏導関数の計算）

次の関数の偏導関数（f_x と f_y）を求めよ．

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$　　(2) $f(x, y) = (x + y^2)^3$

(3) $f(x, y) = e^{x-y}$　　(4) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

問題 6-3.（偏微分 vs 全微分）

偏微分可能ならば全微分可能である，と言えるか？

高階偏微分

問題 6-4.（定義）

(1) 領域 D 上で定義された関数 $z = f(x, y)$ に対し，記号 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ および記号 $f_{yxx}(x, y)$ の定義を書け．

(2) n を負でない整数とする．領域 D 上で定義された関数 $z = f(x, y)$ が C^n 級（関数）であることの定義を書け．

(3) 領域 D 上で定義された関数 $z = f(x, y)$ が C^∞ 級であることの定義を書け．

問題 6-5.

各 $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し，n 回偏微分可能だが，C^n 級ではない例は存在するか？

問題 6-6.（高階偏導関数の計算）

次の関数の 2 階偏導関数（f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy}）を求めよ．

(1) $f(x, y) = x^7 y^3$　　(2) $f(x, y) = e^x \cos y$

●● 5 月 22 日の講義ノート（前回終わらなかった偏微分の部分も再録しています）●●

参考書の該当箇所：[川平] 18 章と 22 章の 22.1 節，[三宅]4.1 と 4.3

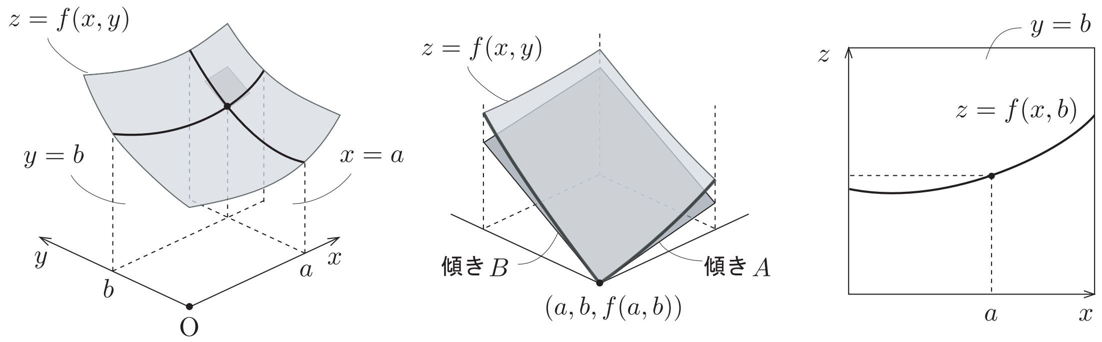
全微分の係数の意味

関数 $z=f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で「全微分可能」であるとは，$(x,y)\to(a,b)$ のとき，次の式 (6.1) を満たす定数 A, B が存在することであった：

$$\boldsymbol{f(x,y)=f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)+o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)} \tag{6.1}$$

まずはこの係数 A と B の幾何学的な意味を調べておこう．

$z=f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であり，式 (6.1) が成り立ったと仮定する．このとき，$z=f(x,y)$ の 3 次元グラフを $(a,b,f(a,b))$ のあたりで拡大していくと，接平面 $z=f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)$ のように見えてくるはずである．



そこで，前回の 1 次関数に対する考察を参考にして，$z=f(x,y)$ の 3 次元グラフの平面 $y=b$ と平面 $x=a$ による断面に着目してみよう．

まず平面 $y=b$ による断面は $z=f(x,b)$（x のみの関数）で与えられ，$(x,b)\to(a,b)$ のとき式 (6.1) は

$$\begin{aligned} & f(x,b)=f(a,b)+A(x-a)+B\cdot 0+o\left(\sqrt{(x-a)^2}\right) \\ \iff\quad & f(x,b)=f(a,b)+A(x-a)+o(|x-a|) \end{aligned}$$

と表現される．よって A は $z=f(x,b)$ の $x=a$ における微分係数であり，$x\to a$ のとき，

$$\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}=A+\frac{o(|x-a|)}{x-a}\to A.$$

同様に，平面 $x=a$ による断面は $z=f(a,y)$ （y のみの関数）で与えられ，$(a,y)\to(a,b)$ のとき式 (6.1) は

$$f(a,y)=f(a,b)+B(y-b)+o(|y-b|)$$

と表現されることから，係数 A と B について次の命題を得る：

命題 6.1 (全微分の係数の意味) 関数 $z=f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であり，式 (6.1) が成り立つとき，

$$A=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} \quad \text{かつ} \quad B=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}. \tag{6.2}$$

また，$z=f(x,y)$ の 3 次元グラフは次を満たす：

- 平面 $y=b$ による断面 $z=f(x,b)$ は，$(a,b,f(a,b))$ において傾き A の接線をもつ．
- 平面 $x=a$ による断面 $z=f(a,y)$ は，$(a,b,f(a,b))$ において傾き B の接線をもつ．

この式 (6.2) を用いれば，係数 A と B だけをピンポイントで計算できる，ということである．

偏微分

式 (6.2) より，(一般には全微分可能とは限らない）関数 $z=f(x,y)$ について，次のように「偏微分係数」を定義する．

定義 (偏微分) 関数 $z=f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で**偏微分可能**であるとは，ふたつの極限

$$\boldsymbol{A=\lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}} \quad \textbf{と} \quad \boldsymbol{B=\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}} \tag{6.3}$$

が存在することをいう．このとき，A と B を $f(x,y)$ の (a,b) における**偏微分係数**とよび，

$$\boldsymbol{A=f_x(a,b), \qquad B=f_y(a,b)}$$

と表す．関数 $z=f(x,y)$ が集合 D 上のすべての点で偏微分可能であるとき，**$f(x,y)$ は D 上で偏微分可能**であるという．

注意． $A=f_x(a,b)$ は「x 偏微分係数」，$B=f_y(a,b)$ は「y 偏微分係数」とよび区別することもある．

定義 (偏導関数) 関数 $z=f(x,y)$ が定義域上で偏微分可能であるとき，関数

$$(a,b)\mapsto f_x(a,b), \qquad (a,b)\mapsto f_y(a,b),$$

をともに $f(x,y)$ の**偏導関数**とよび，それぞれ次のように表す：

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{z_x=f_x(x,y)} & \boldsymbol{z_y=f_y(x,y)} \\ \boldsymbol{\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)} & \boldsymbol{\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)} \\ \boldsymbol{\partial_x z=\partial_x f(x,y)} & \boldsymbol{\partial_y z=\partial_y f(x,y)} \end{array}$$

注意． $z_x=f_x(x,y)$ は「x 偏導関数」，$z_y=f_y(x,y)$ は「y 偏導関数」とよび区別することもあ

る．また，偏微分係数 $f_x(a,b)$ も

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \quad \partial_x f(a,b), \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)}$$

といった多様な表現が可能である．

例 1（偏微分の計算）． 偏微分係数の求め方はいたって単純である．

たとえば $z=f(x,y)=x^2y^3$ としよう．z_x は「y を定数だと思って固定し」関数 $x\mapsto z=x^2y^3$ を x に関して微分すればよい．よって $z_x=(2x)y^3=2xy^3$．

同様に z_y は「x は定数だと思って固定し」関数 $y\mapsto z=x^2y^3$ を y に関して微分すればよい．よって $z_y=x^2(3y^2)=3x^2y^2$．

例題 6.1 (導関数の計算) 次の関数の偏導関数を求めよ．
(1) $z=Ax+By+C$　(2) $z=x^2+y^2$　(3) $z=\sin(x^2+y^3)$

解答． (1) $z_x=A$，$z_y=B$. (2) $z_x=2x$，$z_y=2y$ (3) $z_x=2x\cos(x^2+y^3)$，$z_y=3y^2\cos(x^2+y^3)$. ■

全微分 vs. 偏微分

全微分と偏微分の関係を詳しく調べてみよう．結論からいうと，全微分可能であれば偏微分可能だが，その逆が成り立つとは限らない．しかし，偏導関数が連続関数であれば，全微分可能性が導かれるのである．

まず命題 6.1 より，全微分可能性から偏微分可能性が導かれることがわかる：

定理 6.2 (全微分可能なら偏微分可能) $z=f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能であれば，偏微分可能である．とくに式 (6.1) が成り立つとき，

$$\boldsymbol{A=f_x(a,b)} \;\; \text{かつ} \;\; \boldsymbol{B=f_y(a,b)}.$$

残念ながら，定理 6.2 の逆は成り立たない．偏微分ができても全微分ができない例が存在するからである．

偏微分可能性 と C^1 級関数． 関数が全微分可能であることを保証するには，偏微分可能性にもっと強い条件を付け加えなくてはならない．そこで，1 変数関数のときと同様に，2 変数の「C^1 級関数」を定義する[1]：

定義 (C^1 級関数) 関数 $z=f(x,y)$ が $\boldsymbol{C^1}$ **級**であるとは，定義域内のすべての点で偏微分可能であり，偏導関数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$ がともに連続関数であることをいう．

下線部に対する注意． 偏微分可能性は 1 点における性質であったが，まずそれが定義域内の「すべての点」において満たされている．さらに，得られた偏微分係数が定義域内で連続的に変化することが要請されているから，条件はかなり厳しくなっている．

しかし，多項式関数や三角関数・指数関数を合成したような関数など，私たちが「ふつうに」目にする関数はだいたい C^1 級であるから，あまり気にする必要はない．

C^1 級ならば全微分可能． 「C^1 級関数」であれば，「全微分可能」である．

[1] 「C^2 級」,「C^3 級」などの等級もあとで必要になる．

定理 6.3 (C^1 級ならば全微分可能) 関数 $z=f(x,y)$ が定義域上で C^1 級ならば，全微分可能である．とくに，$(x,y)\to(a,b)$ のとき

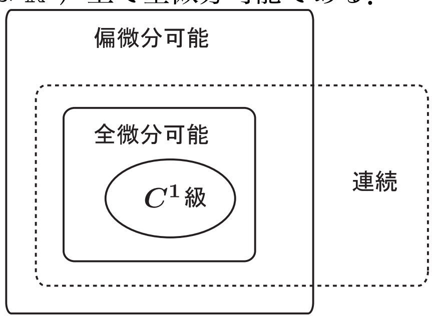
$$\boldsymbol{f(x,y)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)} \\ \boldsymbol{+o\Big(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\Big).} \tag{6.4}$$

標語的には「偏導関数が連続関数であれば全微分可能」ということである．偏導関数の形を見るだけで全微分可能性が確認できるので，判定法としてはとても使い勝手がよい

例 2. すべての多項式は全微分可能である．$\sin(1+3x+y^2)$ や $e^{\cos(1+x-y)}$ なども，連続な偏導関数をもつことが簡単に確認できるから，定義域（この場合は $\mathbb{R}^2$）上で全微分可能である．

注意. 関数の全微分可能性，偏微分可能性，連続性の関係は右の図のようにまとめることができる．

一般にある点で「全微分可能ならば偏微分可能」であり，「全微分可能ならば連続」であるが，これらの逆は成り立たない．さらに厄介なことに，「連続性」と「偏微分可能性」の間には包含関係がない．



証明（定理 6.3）. $\Delta x:=x-a$, $\Delta y=y-b$, $A=f_x(a,b)$，$B=f_y(a,b)$ とおく．$f(x,y)$ が C^1 級という仮定のもと，式 (6.1) を示せばよい．すなわち，$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ のとき

$$E(x,y)\ :=\ \frac{|f(x,y)-\{f(a,b)+A\Delta x+B\Delta y\}|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\ \to\ 0$$

であることを示せばよい．y を固定して平均値の定理を用いると，x と a の間の実数 c_1 と，y と b の間の実数 c_2 が存在して，

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(a,b) &= \{f(x,y)-f(a,y)\}+\{f(a,y)-f(a,b)\} \\ &= f_x(c_1,y)(x-a)+f_y(a,c_2)(y-b) \\ &= f_x(c_1,y)\Delta x+f_y(a,c_2)\Delta y \end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} E(x,y) &= \frac{|(f_x(c_1,y)-A)\Delta x+(f_y(a,c_2)-B)\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \\ &\le |f_x(c_1,y)-A|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+|f_y(a,c_2)-B|\frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \\ &\le |f_x(c_1,y)-f_x(a,b)|\cdot 1+|f_y(a,c_2)-f_y(a,b)|\cdot 1\ \to\ 0. \qquad ((x,y)\to(a,b)) \end{aligned}$$

ただし，最初の不等号では三角不等式を，次の不等号では偏導関数の連続性と $(x,y)\to(a,b)$ のとき $(c_1,c_2)\to(a,b)$ であることを用いた． ■

高階の偏導関数

1 変数関数のときと同様に，2 変数関数にも「滑らかさ」に応じた等級をつけるのがならわしである．ただの連続関数（そのグラフはガタガタしているかもしれない）を最低レベルの「滑らかさ」として，

$$\text{連続}=C^0\text{級}<C^1\text{級}<C^2\text{級}<\cdots<C^\infty\text{級}$$

といった等級を定義しよう．

まず関数 $z=f(x,y)$ が「C^1 級」とは,「偏導関数 f_x, f_y が存在し，それぞれ連続」であることをいうのであった．f_x, f_y はとくに **1 階偏導関数**ともよばれる．

さらに f_x, f_y の偏導関数

$$(f_x)_x=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad (f_x)_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\quad \cdots$$

が存在するとき，これらは

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\quad \cdots$$

のように表され，$f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ を $f(x,y)$ の **2 階偏導関数**とよぶ．

2 階偏導関数もそれぞれ偏微分可能であれば,

$$f_{xxx}=((f_x)_x)_x=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3},\quad f_{xyy}=((f_x)_y)_y=\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x},$$
$$f_{xyx}=((f_x)_y)_x=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x},\quad \cdots$$

など，$2^3(=8)$ 通りの **3 階偏導関数**が定まる．一般の n **階偏導関数**も同様である．

定義 （C^n 級と C^∞ 級） 整数 $n=0,1,2,3,\cdots$ に対し，

- $f(x,y)$ が C^n **級**であるとは，n 階以下の偏導関数がすべて存在し，それらがすべて連続であることをいう．
- $f(x,y)$ が C^∞ **級**であるとは，任意の n について C^n 級であることをいう．

具体例をみてみよう．以下の例はすべて C^∞ 級の関数である．

例 3. $z=x^3+y^3$ のとき，$z_x=3x^2$, $z_y=3y^2$．よって 2 階偏導関数は

$$z_{xx}=6x,\quad z_{xy}=0,\quad z_{yx}=0,\quad z_{yy}=6y.$$

また，$z_{xxx}=z_{yyy}=6$ であり，それ以外の 3 階偏導関数はすべて 0 である．

例 4. $z=x^3y^5$ のとき，$z_x=3x^2y^5$, $z_y=5x^3y^4$．よって 2 階偏導関数は

$$z_{xx}=6xy^5,\quad z_{xy}=15x^2y^4,\quad z_{yx}=15x^2y^4,\quad z_{yy}=20x^3y^3.$$

例 5. $z=\sin xy^2$ のとき，$z_x=y^2\cos xy^2$, $z_y=2xy\cos xy^2$．よって 2 階偏導関数は

$$z_{xx}=-y^4\sin xy^2,\qquad z_{xy}=2y\cos xy^2-2xy^3\sin xy^2,$$
$$z_{yx}=-2xy^3\sin xy^2+2y\cos xy^2,\qquad z_{yy}=2x\cos xy^2-4x^2y^2\sin xy^2.$$

以上の例ではすべて $z_{xy}=z_{yx}$ が成り立っているが，これは定理であり，偶然ではない：

定理 6.4 (偏微分の順序交換) 関数 $z=f(x,y)$ が C^2 級であれば,

$$\boldsymbol{f_{xy}=f_{yx}}.$$

とくに，C^∞ 級関数であれば偏微分の順序は自由に交換できる．

例 6. たとえば C^∞ 級関数では

$$f_{xxyy} = f_{xyxy} = f_{yxxy} = \cdots$$

などが成り立つ．n 階偏導関数は 2^n 個存在するが，実際には（x についての偏微分が n 回のうち何回かに応じて）$n+1$ 通りの関数しか現れないのである．

定理 6.4 の証明. (a,b) を $f(x,y)$ の定義域から任意に選んで固定する．また，(a,b) に十分近い (x,y) に対し，$\Delta x := x-a$, $\Delta y = y-b$ とおく．

さて唐突だが，

$$Q = \{f(x,y) - f(x,b)\} - \{f(a,y) - f(a,b)\} \tag{6.5}$$

という量を考えてみよう．これは

$$Q = \{f(x,y) - f(a,y)\} - \{f(x,b) - f(a,b)\} \tag{6.6}$$

と書いても同じことである．いま $K(x,y) := f(x,y) - f(x,b)$ とおくと式 (6.5) の左辺は $K(x,y) - K(a,y)$ であり，平均値の定理より適当な a' が x と a の間に存在して

$$K(x,y) - K(a,y) \ = \ K_x(a',y)\Delta x \ = \ \{f_x(a',y) - f_x(a',b)\}\Delta x$$

と書ける．さらに $y \mapsto f_x(a',y)$ に平均値の定理を適用すると，

$$f_x(a',y) - f_x(a',b) \ = \ f_{xy}(a',b')\Delta y$$

となる b' が y と b の間に存在するから，結果として式 (6.5) の Q は $f_{xy}(a',b')\Delta y\Delta x$ と表される．

次に $L(x,y) := f(x,y) - f(a,y)$ とおいて式 (6.6) に関して同様の議論を行えば，適当な a'' と b'' がそれぞれ x と a の間と y と b の間に存在して，式 (6.6) の右辺は $f_{yx}(a'',b'')\Delta x\Delta y$ と書けることがわかる．すなわち $Q = f_{xy}(a',b')\Delta x\Delta y = f_{yx}(a'',b'')\Delta x\Delta y$ である．いま，$f(x,y)$ が C^2 級 であることから f_{xy} および f_{yx} は連続関数である．$\Delta x, \Delta y \neq 0$ を満たしつつ $(x,y) \to (a,b)$ とすれば，(a',b'), $(a'',b'') \to (a,b)$ であるから，求める関係式 $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ を得る． ■