担当教員：川平 友規

講義第 5 回（5/18）：多変数関数の全微分

配布日：5/20/2020 Version：1.2

●● 5 月 18 日の講義内課題 ●●

全微分可能性

問題 5-1.（定義）

(1) 領域 D 上で定義された関数 $z=f(x,y)$ が $(a,b)\in D$ において全微分可能であることの定義を書け．また，勾配ベクトル $\nabla f(a,b)$ とは何か？

(2) 領域 D 上で定義された関数 $z=f(x,y)$ が D 上で全微分可能であることの定義を書け．

問題 5-2.（勾配ベクトルと接平面） 次の関数が与えられた点で全微分可能であることを示せ．また，そこでの接平面の方程式と勾配ベクトルを求めよ．

(1) $z=x^2+y^2$，$(x,y)=(a,b)$

(2) $z=xy$，$(x,y)=(1,1)$

(Hint: 一般に $|XY|\le (X^2+Y^2)/2$，が成り立つ．)

問題 5-3.（ボール） xy 平面上の関数 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ を考える．3 次元グラフ上の点 $(1,2,5)$ にボールを静かに置いた．このボールは（xy 平面上で見たとき）どのベクトルの方向に転がるか？

偏微分（以下，第 6 回に回しました）

問題 5-4.（定義）

(1) 領域 D 上で定義された関数 $z=f(x,y)$ が $(a,b)\in D$ において偏微分可能であることの定義を書け．

(2) 領域 D 上で定義された関数 $z=f(x,y)$ が D 上で偏微分可能であることの定義を書け．

問題 5-5.（偏導関数の計算）

次の関数の偏導関数（f_x と f_y）を求めよ．

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$　　(2) $f(x,y)=(x+y^2)^3$

(3) $f(x,y)=e^{x-y}$　　(4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

問題 5-6.（偏微分 vs 全微分）

偏微分可能ならば全微分可能である，と言えるか？

問題 5-7.（定義）

領域 D 上で定義された関数 $z=f(x,y)$ が C^1 級関数であることの定義を書け．

●● 5月18日の講義ノート（実際の講義で扱えなかった偏微分は来週のノートに回しました）●●

参考書の該当箇所：[川平] 17章と18章，[三宅]4.1と4.2

1次近似と全微分

1変数関数の1次近似. 1変数関数の微分を思い出そう．$y = f(x)$ が $x = a$ で「微分可能」であるとは，ある定数 A が存在し，$x \to a$ のとき

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a) \tag{5.1}$$

が成り立つことをいうのであった（講義第2回）．すなわち，

「x が a に近いとき $f(x)$ は1次関数 $f(a) + A(x-a)$ で近似され，
その誤差は $o(x-a)$ 程度」

ということである．この1次関数 $f(a)+A(x-a)$ は $f(x)$ の $x = a$ における接線の方程式であり，「微分可能な点ではグラフに接線が引ける」という幾何学的な事実の数式による表現となっている．

全微分：多変数関数の1次近似. 式(5.1)をもとにして，2変数関数の微分可能性を定式化しよう．

定義 （全微分可能性） 関数 $z = f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で**全微分可能**であるとは，ある定数 A, B が存在し，$(x,y) \to (a,b)$ のとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f(x,y) = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)} \\ \boldsymbol{+o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)}\end{aligned} \tag{5.2}$$

と表されることをいう．関数 $z = f(x,y)$ が集合 D 上のすべての点で全微分可能であるとき，**$\boldsymbol{f(x,y)}$ は $\boldsymbol{D}$ 上で全微分可能**であるという．

誤差部分の意味. 1次関数からの誤差にあたる $o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$ の部分を正確に定義しておこう．これは2変数関数のランダウ記号であり，基本的な意味は1変数の場合とかわらない．

$f(x,y)$ と1次関数 $f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)$ の誤差の正確な値は関数

$$E(x,y) := f(x,y) - \{f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)\}$$

で与えられる．この関数が $(x,y) \to (a,b)$ のとき

$$\frac{|E(x,y)|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \to 0$$

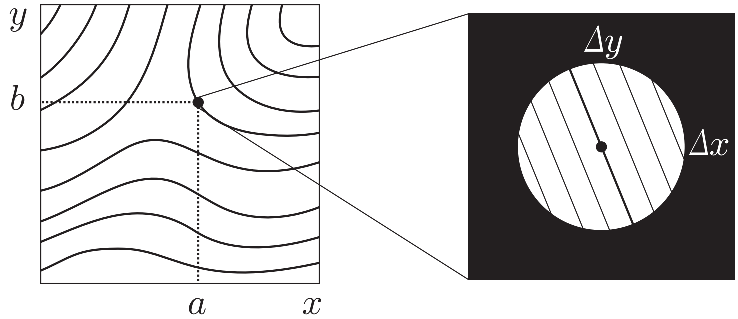
を満たすことを

$$E(x,y) = o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right) \qquad ((x,y) \to (a,b))$$

と表すのである．私たちは，この誤差関数 $E(x,y)$ の具体的な形には興味がない．その大きさが，関数 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ （これは (x,y) と (a,b) の距離）に比べ相対的に速く 0 に収束する，という事実だけに着目するのである．すなわち 式(5.2)は

「(x,y) が (a,b) に十分近いとき，$f(x,y)$ は 1 次関数 $f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)$ で近似され，その誤差は $o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$ 程度」

と解釈される．したがって，顕微鏡で $f(x,y)$ の等高線グラフの (a,b) 付近を十分に拡大すると，誤差は知覚できなくなって，1 次関数 $z=f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)$ の等高線グラフのように見えてくる（下の図．例題 5.1 の等高線グラフも参照）．



例 1. 1 次関数 $z=f(x,y)=Ax+By+C$ はすべての点 (a,b) で全微分可能である．実際，

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(a,b) &= (Ax+By+C)-(Aa+Bb+C) \\ &= A(x-a)+B(y-b) \end{aligned}$$

であるから，誤差ゼロで全微分可能性の式 (5.2) を満たす．

例題 5.1（全微分可能性） 2 次関数 $z=f(x,y)=x^2+y^2$ は点 $(1,2)$ で全微分可能であることを示せ．

解答. $\Delta x=x-1,\ \Delta y=y-2$ とおく．このとき

$$f(x,y)=(\Delta x+1)^2+(\Delta y+2)^2=5+2\Delta x+4\Delta y+\Delta x^2+\Delta y^2$$

であるから，

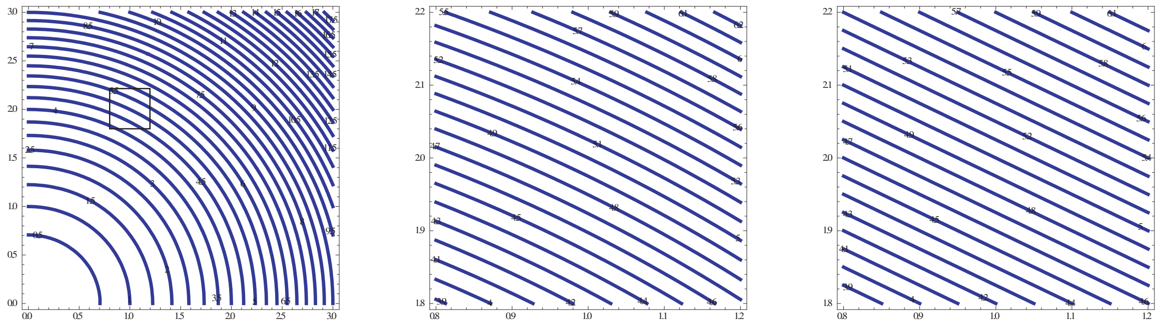
$$f(x,y)=5+2(x-1)+4(y-2)+\underline{(x-1)^2+(y-2)^2}.$$

を得る．$f(1,2)=5$ であり，下線部は $(x,y)\to(1,2)$ のとき

$$\frac{(x-1)^2+(y-2)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\to 0$$

を満たすので，$o\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\right)$ と表される．よって点 $(1,2)$ において全微分可能性の式 (5.2) を満たす． ■

次の図は左から，関数 $z=x^2+y^2$ の区画 $[0,3]\times[0,3]$ における等高線グラフ, 同じ関数の区画 $[0.8,1.2]\times[1.8,2.2]$ での等高線グラフ，1 次関数 $z=5+2(x-1)+4(y-2)$ の区画 $[0.8,1.2]\times[1.8,2.2]$ におけるグラフである．



連続性との関係． 「全微分可能性」の定義には，関数の「連続性」が仮定されていない．1 変数のときと同様に，次の命題から「連続性」が自動的に導かれるからである．

命題 5.1 (全微分可能なら連続) 関数 $z = f(x, y)$ が $(x, y) = (a, b)$ で全微分可能であれば，$(x, y) = (a, b)$ で連続である．

証明． 式 (5.2) より，$(x, y) \to (a, b)$ のとき明らかに $f(x, y) \to f(a, b)$ が成り立つ． ■

接平面

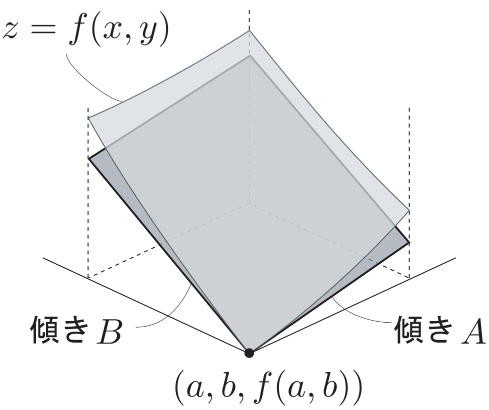
1 変数関数のグラフの「接線」にあたるものとして，2 変数関数のグラフの「接平面」を定義しよう．

定義 (接平面) 関数 $z = f(x, y)$ が (a, b) において全微分可能であり式 (5.2) を満たすとき，1 次関数

$$\boldsymbol{z = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b)} \tag{5.3}$$

を関数 $f(x, y)$ の (a, b) における**接平面の方程式**とよぶ．また，その 3 次元グラフにあたる xyz 空間内の平面を関数 $f(x, y)$ の (a, b) における**接平面**という．

右の図は $z = f(x, y)$ の (a, b) における 3 次元グラフが，接平面によって近似される様子を表現したのもである．



例 2（1 次関数）． 1 次関数 $z = f(x, y) = Ax + By + C$ の点 (a, b) における接平面は自分自身である．実際，次が成り立つ：

$$\begin{aligned} z &= Ax + By + C \\ &= f(a,b) + A(x-a) + B(y-b). \end{aligned}$$

例 3（2 次関数）． 例題 5.1 より，2 次関数 $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ の点 $(1, 2)$ における接平面は $z = 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$ である．

勾配ベクトル

山の斜面に立ち，一歩だけ（たとえば距離にして 50cm）移動する．このとき，高さをもっとも増加させるのはどの方向に進んだときだろうか？

数学の問題として定式化してみよう．自分の周囲の海抜高度を表す関数を $z = f(x, y)$ とする．このとき式 (5.2) はベクトルの内積を用いて

$$f(x,y) = f(a,b) + \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + (\text{誤差})$$

と変形できるから，誤差部分を無視すると

$$f(x,y) - f(a,b) \approx \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

という近似式を得る．この式は「(x, y) の (a, b) からの移動量」

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

と,「海抜高度 $f(x, y)$ の $f(a, b)$ からの増加量」

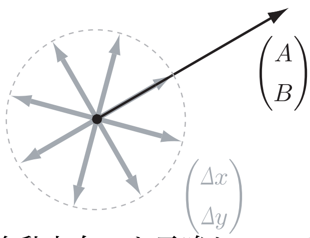
$$\Delta z := f(x, y) - f(a, b)$$

の間に,

$$\Delta z \approx \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

という関係があることを示している．

この式を用いると，先の問題は次のように解釈できる：「移動量 $(\Delta x, \Delta y)$ の大きさをたとえば 50cm で固定したとき，増加量 Δz を最大にするのはベクトル $(\Delta x, \Delta y)$ がどの方向を向いているときか？」



答は簡単である．式 (5.5) 右辺の内積を最大にすればよいのだから，内積の性質より，ベクトル (A, B) と移動量 $(\Delta x, \Delta y)$ が完全に同じ方向であればよい．

すなわち，ベクトル (A, B) は「関数をもっとも増加させる移動方向」を示唆している．山の斜面でいえば，一歩で等高線をもっともたくさんまたぐことができる方向である．それは，もっとも急勾配の方向であり，等高線と垂直な方向である[1]．

このように，ベクトル (A, B) には重要な意味があるので，名前をつけておこう．

定義（勾配ベクトル） 全微分可能性の式 (5.2) から得られる定数の組 (A, B) を関数 $f(x, y)$ の点 (a, b) における**勾配ベクトル**（もしくは単に**勾配**）とよび，$\boldsymbol{\nabla f(a, b)}$ と表す．

∇ は大文字のデルタ（Δ）を逆さにした記号で，**ナブラ** (nabla) と読む[2]．勾配ベクトルは 2 変数関数の「微分係数」に相当する量（ベクトル量）である．

例 4. 例 1 より 1 次関数 $z = f(x, y) = Ax + By + C$ はすべての点 (a, b) で勾配ベクトル (A, B) をもつ．

例 5. 例題 5.1 より，2 次関数 $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ は点 $(1, 2)$ で勾配ベクトル $(2, 4)$ をもつ．

[1] もし点 (a, b) にボールを置くと，$(-A, -B)$ の方向に転がり始める．重力の影響で，高さをもっとも「減少させる」方向に転がり始めるからである．

[2] 勾配ベクトルは $\mathrm{grad}\, f(a, b)$ とも表される．記号 grad は勾配を表す単語 gradient に由来する．