担当教員：川平 友規

講義第 4 回（5/15）：多変数関数，極限，連続性

配布日：5/13/2020 Version：1.3

●● 5 月 15 日の講義内課題 ●●

1 次関数

問題 4-1. (1 次関数)

(1) 関数 $z = f(x,y) = 2x + y$ および $k = 0, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 1$ に対し，等高線 $E_k = \{(x,y) \mid f(x,y) = k\}$ を図示せよ．

(2) 関数 $z = f(x,y) = 2x + y$ の 3 次元グラフ（xyz 空間内の，$(x, y, f(x,y))$ の形の点全体からなる集合）上の点 $(0,0,0)$ にボールを静かに置いた．そのボールは（xy 平面で見ると）どのベクトルの方向に転がるか？

(3) $(A,B) \neq (0,0)$ のとき，関数 $z = f(x,y) = C + Ax + By$ の等高線は (A,B) と垂直になることを示せ．

極限

問題 4-2. (開集合と領域) xy 平面 $\mathbb{R}^2$ の「開集合」の定義を書け．また,「領域」の定義を書け．

問題 4-3. (Prove or Disprove)
証明もしくは反証せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は存在する．

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$ は存在する．

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ は存在する．

問題 4-4. (ややこしい例)
$f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ とおく．m を定数とするとき，以下を示せ．

(1) $y = mx$ かつ $(x,y) \to (0,0)$ のとき，$f(x,y)$ は 0 に収束することを示せ．

(2) $y^2 = mx$ かつ $(x,y) \to (0,0)$ のときはどうか？

連続関数

問題 4-5. (点での連続性)
領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b) \in D$ において連続であることの定義を書け．

問題 4-6. (領域上での連続性)
領域 D 上で定義された関数 $f(x,y)$ が D 上で連続であることの定義を書け．

●● 5 月 15 日の講義ノート ●●

参考書の該当箇所：[川平] 15 章と 16 章，[三宅]4.1

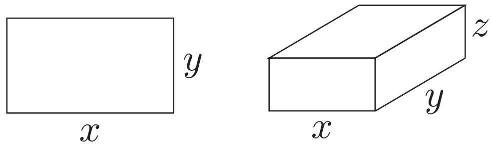
多変数関数の例

多変数関数とは複数の変数をもつ関数のことである．身近な例を挙げてみよう．

- 図（左）のように，底辺 x，高さ y の長方形の面積 S と周の長さ L は

$$S = S(x, y) = xy, \quad L = L(x, y) = 2(x + y)$$

と表される．これらは x と y を独立変数とする **2 変数関数**である．(すなわち，x と y の間に特別な関係はなく，それぞれを自由に変化させることができる.)



- 同じく図（右）のような直方体の体積 V と表面積 A は

$$V = V(x, y, z) = xyz, \quad A = A(x, y, z) = 2(xy + yz + zx).$$

これらは x，y，z を独立変数とする **3 変数関数**である．

- 一般に n 個の独立変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ をもつ $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の形の関数を n **変数関数**という．

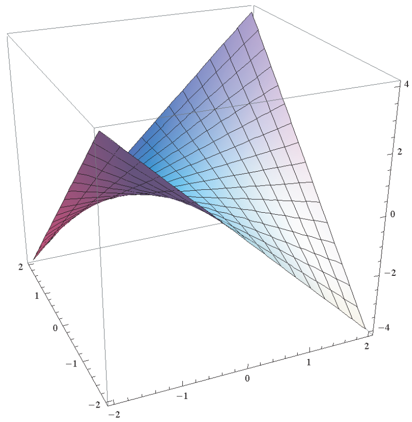
本講義では，おもに 2 変数関数の微分積分を学ぶ．3 変数以上の多変数関数の微分積分へは，2 変数の場合のアナロジー（類推）によって難なく移行できるだろう．

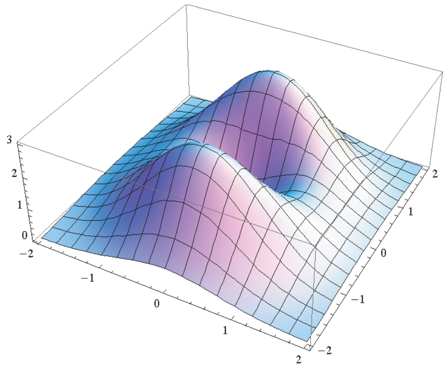
多変数関数のグラフ

n 個の実数の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 全体の集合を n **次元ユークリッド空間**もしくは n **次元数空間**とよび，$\mathbb{R}^n$ で表す．本講義ではとくに断らない限り $\mathbb{R}^2$ を xy 平面とみなし，$\mathbb{R}^3$ を xyz 空間とみなす．

2 変数関数 $z = f(x, y)$ とは，xy 平面 $\mathbb{R}^2$ （の部分集合）上を動く変数 (x, y) にある実数 z を対応付けるものである．したがって，xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ に「3 次元のグラフ」を描くことができる．厳密にいうと，関数 $z = f(x, y)$ の **3 次元グラフ**とは，点 (x, y) が関数 $z = f(x, y)$ の定義域（第 16.1 節参照）をくまなく動いて得られる空間内の点 $(x, y, f(x, y))$ 全体からなる集合を指す．グラフは，何らかの曲面となるのが普通である．

例 1（3 次元グラフ）． 次の図は，$z = xy$ （左）と $z = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ （右）の 3 次元グラフである．





パソコンを用いれば，そのようなグラフを簡単に描かせることができるが，結局は平面（紙やモニターの上）に射影された 2 次元の絵になる．おのずと表現力には限界があり，実際のところあまり役に立たない[1]．

等高線グラフ． 2 変数関数 $z = f(x, y)$ であれば，**等高線グラフ**のほうが有用である[2]．地形図，気圧分布などで用いられるから，なじみがあるグラフだろう．こちらのほうが数学との親和性がよいので，本講義でも頻繁に利用する．

ここでいう「等高線」とは，次のような集合のことである：

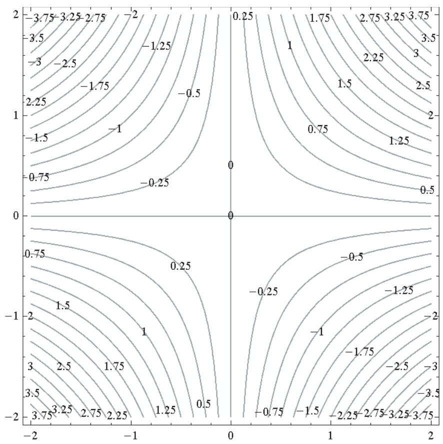
定義（等高線） 2 変数関数 $z = f(x, y)$ と実数 k に対し，集合

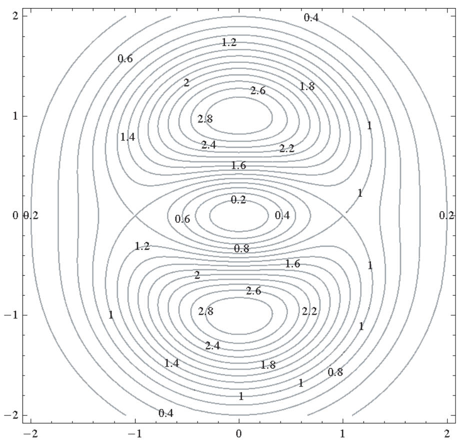
$$\boldsymbol{E_k = \{(x, y) \mid f(x, y) = k\}}$$

を**高さ k の等高線**とよぶ．

注意． 等高線がいつも「線」とは限らない．たとえば定数関数の場合は全 xy 平面であるし，極大値をとる点（山の頂上）では 1 点である．

例 2（等高線グラフ）． 次の図は $z = xy$（左）と $z = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$（右）の等高線グラフである．





等高線が密なところほど関数の値の変化が大きく，粗なところほど変化は緩やかだといえる．

[1] もちろんグラフの形状を把握するにはよいのだが，何らかの量的な情報を得るのは難しい．
[2] 「等位線グラフ」ともいう．

1 次関数とベクトルの内積

1 変数の関数がある点で「微分可能」であることは，関数がその点で「1 次関数で近似される」ことと同じ意味であった（講義第 2 回）．

多変数関数の場合も，その点で「関数が 1 次関数で近似される」ことを「微分可能」であることの定義とする．そのため，多変数の 1 次関数を理解することが，多変数関数の微分の理解と直結しているのである．

もちろん，微分の話をする前に極限や連続性の話をしないといけないが，ウォーミングアップとして，ここでは多変数の 1 次関数がどんなものか探ってみよう．

1 次関数. 1 次関数とは次のような形の関数である（小文字が変数，大文字が定数）：

$$\begin{array}{ll} 1\text{ 変数：} & y = Ax + B \\ 2\text{ 変数：} & z = Ax + By + C \\ 3\text{ 変数：} & w = Ax + By + Cz + D \\ n\text{ 変数：} & y = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n + B \end{array}$$

（$A_1 = \cdots = A_n = 0$ の場合は定数関数になるが，本講義ではこの場合も 1 次関数とよぶことにする.）私たちはまず，**2 変数の 1 次関数 $\boldsymbol{z = Ax + By + C}$** を完全に理解することを目標にしよう．そのために，高校で学んだ平面ベクトルについて復習しておく．

平面ベクトルの内積. ふたつの平面ベクトル[3]

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

の**内積**を

$$\boldsymbol{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 := a_1a_2 + b_1b_2}$$

と定める．内積 $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$ は成分を用いて $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{b_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{b_2} \end{pmatrix}$ と表すこともある．また，ベクトル $\vec{p}_1$ の**長さ**を

$$\boldsymbol{|\vec{p}_1| := \sqrt{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

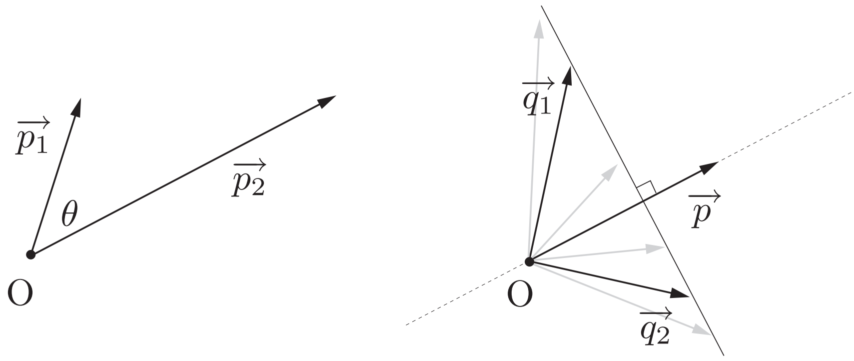
によって定義する．

内積は次の性質を満たす：

> **命題 4.1 (内積の性質)** $\vec{0}$ （ゼロベクトル）でないふたつのベクトル $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ のなす角度を θ $(0 \le \theta \le \pi)$ とするとき，
>
> $$\boldsymbol{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\theta.}$$
>
> さらにベクトル $\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ の長さを固定して θ だけを変化させるとき，
>
> - **$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$ が最大** $\iff$ $\theta = 0$ $\iff$ **$\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ が同じ方向.**
> - **$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$ が 0** $\iff$ $\theta = \pi/2$ $\iff$ **$\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ が直交.**
> - **$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$ が最小** $\iff$ $\theta = \pi$ $\iff$ **$\vec{p}_1$ と $\vec{p}_2$ が逆の方向.**

証明は不要であろう.（この命題は多変数関数の微小変化を定量的に把握する際に暗に用いられる.）

[3]本講義ではとくに断らない限り縦ベクトルと横ベクトルを区別しない．たとえば，$\vec{p}_1 = (a_1, b_1)$ のようにも表す．



1 次関数の等高線を記述するのに必要な命題を述べておこう．

命題 4.2 (内積一定の集合は直線) $\overrightarrow{0}$ でない $\overrightarrow{p}$ と直線 E が直交するとき，E 上にあるすべての位置ベクトル $\overrightarrow{q}$ に対し内積 $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q}$ は一定値をとる．すなわち，$\overrightarrow{q_1}$, $\overrightarrow{q_2}$ が E 上にあるとき，

$$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q_1} = \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q_2}. \tag{4.1}$$

逆に，式 (4.1) が成り立つようなベクトル $\overrightarrow{q_1}$ と $\overrightarrow{q_2}$ （$\overrightarrow{q_1} \neq \overrightarrow{q_2}$）は $\overrightarrow{p}$ と直交する同一直線上にある．

証明は各自の練習問題としよう．

1 次関数と内積. 内積を用いると，1 次関数 $z = Ax + By + C$ とその等高線の幾何学的な意味が明確になる：

命題 4.3 (1 次関数と内積) 1 次関数 $z = Ax + By + C$ は内積を用いて

$$z = C + \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

と表される．とくに $(A, B) \neq (0, 0)$ のとき，高さ k の等高線は

$$E_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k - C \right\} \tag{4.3}$$

と表され，ベクトル (A, B) に直交する直線となる．

証明. 式 (4.2) はただの式変形である．これより，式 (4.3) も明らか．式 (4.3) より，高さ k の等高線はベクトル (A, B) との内積が一定値 $k - C$ となるようなベクトル (x, y) の集合となる．よって 命題 4.2 より，そのような集合はベクトル (A, B) に直交する直線となる． ■

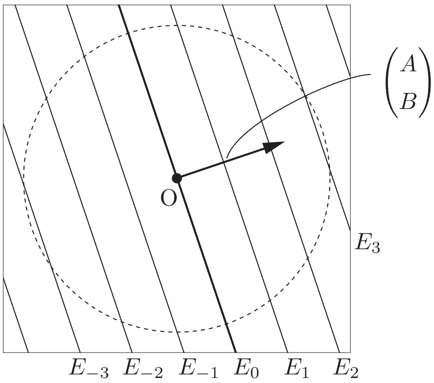
1 次関数の等高線グラフ

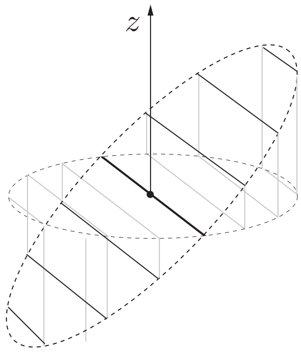
$(A, B) \neq (0, 0)$ をみたす 1 次関数 $z = Ax + By + C$ の等高線グラフを詳しく調べてみよう．

命題 4.3 より，1 次関数 $z = Ax + By + C$ の等高線はすべてベクトル $(A,\ B)$ に垂直な直線であった．さらに特徴的なのは，1 次関数の等高線が次のような「一様性」（等間隔に並ぶこと）をもつことである：

命題 4.4 (1 次関数の等高線は等間隔) 1 次関数 $z = Ax + By + C$ （ただし $(A,\ B) \neq \vec{0}$ ）の高さ k の等高線を E_k とする．真に単調増加な等差数列 $k_1, k_2, \cdots$ （すなわち公差は正）に対し，対応する等高線 E_{k_1}, $E_{k_2}, \ldots$ はベクトル $(A,\ B)$ の方向に等間隔に並ぶ．

下の図の左側は，高さが整数となる等高線を描いた $z = Ax + By$ の等高線グラフである．点線で囲まれた円板に対応する部分を 3 次元グラフにすると，右側のようになる．(すなわち，3 次元グラフは平面である.)．





一般の 1 次関数 $z = Ax + By + C$ の等高線グラフは，このグラフに一斉に高さ C を加えただけである．

証明（命題 4.4）． $C = 0$ の場合を示せば十分であろう．数列の公差を $d > 0$ とすると，$k_2 = k_1 + d$ と表される．いま $(x_0, y_0) := \left(\dfrac{Ad}{A^2 + B^2}, \dfrac{Bd}{A^2 + B^2}\right)$ とおくと，これは $(A,\ B)$ を正の定数倍したベクトルであり，$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = d$ を満たす．このとき，

$$\begin{aligned}
(x, y) \in E_{k_2} &\iff \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k_2 \ (= k_1 + d) \\
&\iff \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k_1 + \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = k_1 \\
&\iff (x - x_0, y - y_0) \in E_{k_1}.
\end{aligned}$$

よって E_{k_2} は E_{k_1} をベクトル (x_0, y_0) 分だけ平行移動させたものである．同様に，E_{k_n} は E_{k_1} をベクトル $((n-1)x_0, (n-1)y_0)$ 分平行移動させたものである．とくに，ベクトル (x_0, y_0) は $(A,\ B)$ の正の定数倍であったから，等高線 E_{k_1}, $E_{k_2}, \ldots$ は $(A,\ B)$ と同じ方向に等間隔で並んでいる． ■

1 次関数の平行移動． 1 変数関数の場合，1 次関数 $y = Ax$ を原点が (a, b) に移るように平行移動したものは

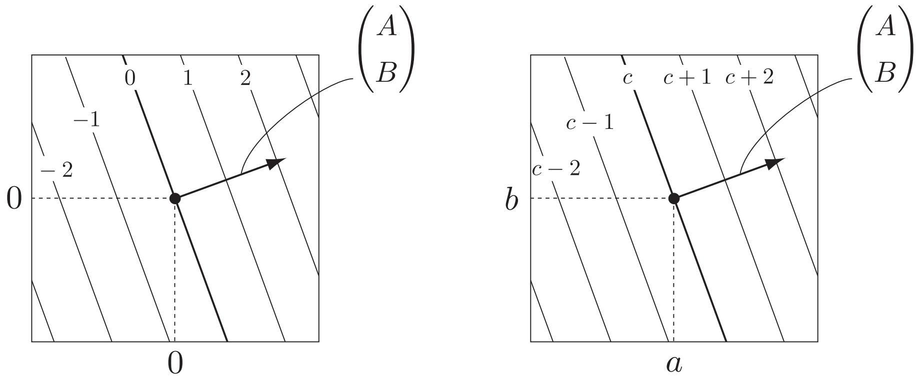
$$y - b = A(x - a) \iff y = b + A(x - a)$$

と表された．同様に，2 変数の 1 次関数 $z = Ax + By$ を原点が (a, b, c) に移るように平行移動させたものは

$$z - c = A(x - a) + B(y - b) \iff z = c + A(x - a) + B(y - b)$$

と表される．あとで考える接平面の方程式はこの形で表現される．また，$z = Ax + By + C$ は $(a, b, c) = (0, 0, C)$ の場合に相当する．

下の図の左側はもとの $z = Ax + By$ の等高線グラフであり，右側はそれを原点が (a, b, c) に移るように平行移動したものの等高線グラフである．



1 次関数の 3 次元グラフ

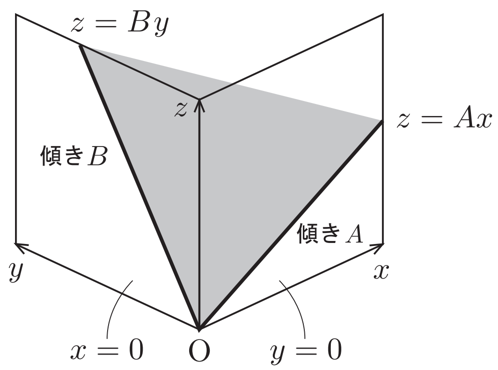
次に 3 次元グラフを考えよう．まずは $C = 0$ とする．先の等高線グラフの考察から，$z = Ax + By$ の 3 次元グラフは原点を通る平面である．

もし $A = B = 0$ であればこれは定数関数 $z = 0$ であるから，グラフは xy 平面に平行である．そこから A もしくは B が変化し 0 でなくなると，グラフはじわじわと傾いていくだろう．その「傾き具合」を理解するために，まずは x, y の係数 A, B の意味を命題の形で述べておく（証明は不要であろう）．

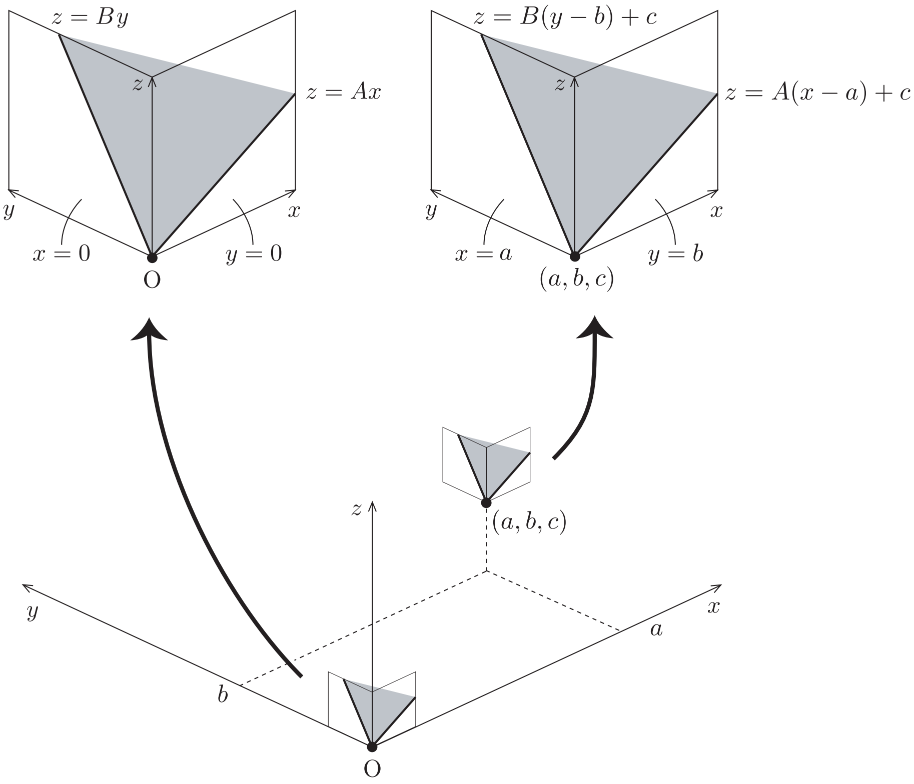
命題 4.5 (1 次関数の係数の意味) 1 次関数 $z = Ax + By$ の 3 次元グラフについて，

- xz 平面（$y = 0$）による切り口（$z = Ax$）は傾き A の直線である．
- yz 平面（$x = 0$）による切り口（$z = By$）は傾き B の直線である．

$z = Ax + By$ の 3 次元グラフはこれら 2 直線（「$y = 0$ かつ $z = Ax$」と「$x = 0$ かつ $z = By$」）を含むことになる．したがって，原点付近での様子（断片）は次の図のようになる：



$z = Ax + By$ の平行移動． 等高線グラフのときと同様に，$z = Ax + By$ をベクトル (a, b, c) 分だけ平行移動させたグラフ $z = c + A(x - a) + B(y - b)$ の 3 次元グラフの断片は次の図のように表現できる．



多変数関数の極限と連続性

言葉の準備

　まずはいくつか新しい言葉を準備しておこう．

（ア）． 1 変数関数は開区間や閉区間に制限して考えることが多かった．2 変数関数の場合も，区間の考えを拡張した「円板」と「区画」（長方形）の 2 種類の平面集合を考える．

　xy 平面上の点 (x_0, y_0) と正の数 r に対し，$\mathbb{R}^2$ 内の集合

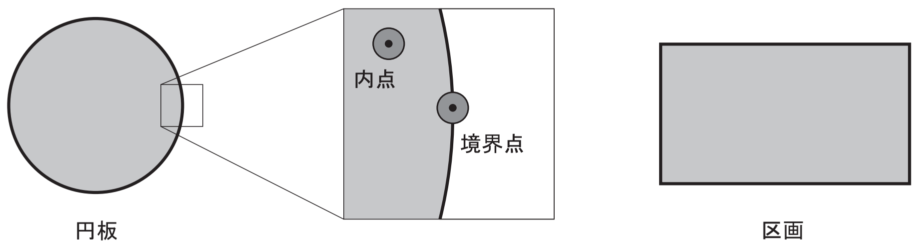
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r\right\} \tag{4.4}$$

を点 (x_0, y_0) 中心，半径 r の**円板**（もしくは**閉円板**）という．

　また，$a < b$ かつ $c < d$，のとき，$\mathbb{R}^2$ 内の長方形集合

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\right\} \tag{4.5}$$

を**区画**（もしくは **閉区画**）とよび，$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \times [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}]$ と表す[4]．



[4] 式 (4.4) および式 (4.5) の中の不等号 $\leq$ をすべて $<$ に変えることで「開円板」や「開区画」を考えることもできるが，本講義では扱わない．

(イ). 次に「開区間」「閉区間」を拡張した概念である「開集合」「閉集合」を定義する．

まず，ある点 (x_0, y_0) が平面集合 E の**内点**であるとは，十分小さな $r > 0$ を選ぶと，(x_0, y_0) を中心とする半径 r の円板がすべて E に属することをいう．また，ある点 (x_0, y_0) が平面集合 E の**境界点**であるとは，(x_0, y_0) を中心とする円板は（どんなに小さな半径であっても）E に属する点と E に属さない点の両方を必ず含むことをいう．集合 E の境界点全体の集合を ∂E と表し，E の**境界**とよぶ．

集合 D のすべての点が集合 D の**開集合**であるとは，D 内のすべての点が集合 D の内点からなることをいう．一方，集合 D が**閉集合**であるとは，D の補集合 $\mathbb{R}^2 - D$ が開集合であることをいう[5]．標語的にいうと，開集合とは「境界点を含まない集合」のことであり，閉集合とは「境界をすべて含む集合」のことである．

(ウ). 平面集合 E が**有界**であるとは，$E \subset D$ を満たす（十分に大きな）区画 D が存在することをいう．

また，平面集合 D が**開領域**（もしくは単に**領域**）であるとは，ひとつながりの開集合であることをいう[6]．開領域 E にその境界 ∂E をつけ加えた閉集合を**閉領域**という．たとえば，円板と区画は閉領域である．

(エ). 1 変数関数 $y = \sqrt{1-x^2}$ が意味をもつのは $-1 \leq x \leq 1$ のみである．このように，関数とその値が定義されうる変数の範囲はペアで考えなくてはならない[7]．

同様に 2 変数関数の場合も，関数 $z = f(x, y)$ の値が定まるような (x, y) の集合を関数 $f(x, y)$ の**定義域**とよぶ．また，実際に関数 $z = f(x, y)$ がとりうる値の集合

$$\{k \in \mathbb{R} \mid f(x,y) = k \text{ となる } (x,y) \text{ が定義域内に存在}\}$$

を $f(x, y)$ の**値域**とよぶ．

例 3. たとえば，

- $z = xy$ の定義域は $\mathbb{R}^2$ 全体，値域は $\mathbb{R}$ （実数全体）．
- $z = \sin \dfrac{1}{x-y}$ の定義域は xy 平面から直線 $y = x$ を除いた集合（開集合）であり，値域は $[-1, 1]$.
- $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ の定義域は単位閉円板 $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$ であり，値域は閉区間 $[0, 1]$.

(オ). 関数 $z = f(x, y)$ は定義域に含まれる変数の組（本講義では**ベクトル変数**とよぶ）(x, y) から $f(x, y)$ という実数を生成し，その値を変数 z に割り当てる「しくみ」であった．現代の数学では，これをプロジェクターのように「関数 f は (x, y) を z に写す」と解釈し，

$$\boldsymbol{f : (x,y) \mapsto z, \quad (x,y) \overset{f}{\longmapsto} z = f(x,y)}$$

のように表すことが多い．

[5] 集合 X, Y に対し $X - Y := \{x \in X \mid x \notin Y\}$ と定義する．
[6] 開集合 D が「ひとつながり」であるとは，D 内の任意の 2 点を結ぶ折れ線が D 内にとれることをいう．
[7] 普段はそれほど神経質にならなくてもよいが，数値実験用にプログラムを書くとき，うっかり定義域外の値を関数に代入してしまいエラーが出る，といったミスはよくある．

2 変数関数の極限

私たちの目的は 2 変数関数の微分積分学を展開することである．まず「微分」を定義するためには，1 変数のときと同様に「極限」の概念が必要である．

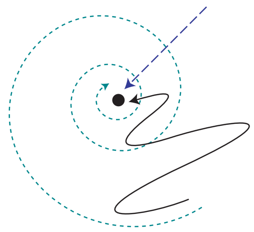
まず「ベクトル変数 (x,y) がベクトル定数 (a,b) に限りなく近づく」という言葉を定式化しよう．

定義（限りなく近づく） $\boldsymbol{(x,y)}$ **が** $\boldsymbol{(a,b)}$ **に限りなく近づく**とは，(x,y) が $(x,y)\neq(a,b)$ を満たし，かつ

$$\left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \to 0$$

となるように変化することをいう．これを $\boldsymbol{(x,y)\to(a,b)}$ と表す．

注意（近づき方はいろいろ）． 1 変数の場合と違って，「近づく」といってもその経路はさまざまである．あらゆる近づき方を考慮しなくてはならない．



定義（極限） $f(x,y)$ を<u>点 (a,b) のまわりで定義された関数</u>とし，A を実数とする．関数 $f(x,y)$ が $\boldsymbol{(x,y)\to(a,b)}$ **のとき** $\boldsymbol{A}$ **に収束する**とは，ベクトル変数 (x,y) が (a,b) に限りなく近づくとき，（その近づき方に依存せずに）$f(x,y)$ が A に限りなく近づくことをいう．この実数 A を関数 $f(x,y)$ の $(x,y)\to(a,b)$ のときの**極限**とよび，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A \quad \text{もしくは} \quad f(x,y)\to A \quad ((x,y)\to(a,b))$$

と表す．

下線部に関する注意． 「点 (a,b) のまわりで定義された関数」$f(x,y)$ といったとき，点 (a,b) そのものが $f(x,y)$ の定義域に入っていないケースも許す．しかし，少なくとも「(a,b) を中心としたある円板から 1 点 (a,b) を除いた集合」は定義域に含まれていると仮定する．下の例 5 も参照せよ．

例 4. $f(x,y)=e^{x+y}$ とおくと，$(x,y)\to(1,1)$ のとき $e^{x+y}\to e^2$ である．

例 5. $f(x,y)=\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ とおくと，$(x,y)\to(0,0)$ のとき $f(x,y)\to 1$ である．（原点 $(0,0)$ はこの関数の定義域には含まれないことに注意．）なぜなら，$t=x^2+y^2$ とおくと $(x,y)\to(0,0)$ のとき $t\to 0$ であり，$f(x,y)=\dfrac{e^t-1}{t}\to 1$ がいえるからである．

極限が存在しない例． ベクトル変数 (x,y) が (a,b) に「限りなく近づく」といっても，さまざまな近づき方が考えられる．一見簡単そうな関数でも，「その近づき方」によって値がまったく変わってしまうこともある．

次の例題を考えてみよう．

例題 4.1（極限の非存在） 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ は存在するか？

解答. 存在しない．$y=0$ のまま $x\to 0$ とするとき，すなわち (x,y) が水平方向から $(0,0)$ に近づくとき，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

同様に $x=0$ のまま $y\to 0$ とするとき，すなわち (x,y) が垂直方向から $(0,0)$ に近づくとき，

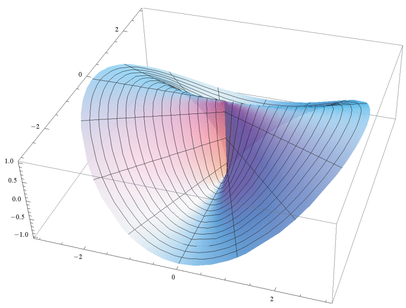
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2}=-1.$$

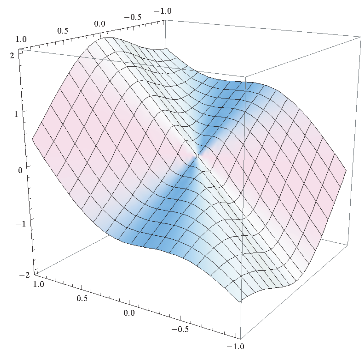
「収束する」というためには「近づき方によらず」一定値に近づかないといけないので，この場合はその条件を満たさない．よって極限は存在しない． ■

説明. 極限が存在できない理由をもう少し詳しく解説しておこう．まず変数 x, y をそれぞれ $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$（ただし $r>0$，$0\le\theta<2\pi$）と表してみよう．θ は一定値に固定し $r\to 0$ とした極限をとると（すなわち，x 軸との角度 θ ラジアンを一定に保ちながら原点に近づくと）

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\cos 2\theta.$$

すなわち，θ に依存して結果が変わってしまうのである．次の図の左側は原点中心半径 3 の円板上で関数 $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ の 3 次元グラフを描いたものである．





極限が存在する例. 次の例題は先ほどの問題によく似ているが，極限が存在する：

> **例題 4.2（極限の存在）** 極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}$ は存在するか？

先の図の右側は区画 $[-1,1]\times[-1,1]$ 上で関数 $\dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}$ の 3 次元グラフを描いたものである．

解答. 存在する．$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくと $|x|\le r$, $|y|\le r$ が成り立つ．よって三角不等式[8]より

$$0\le\left|\frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|\le\frac{|2x^3|+|-y^3|}{|x^2+y^2|}\le\frac{2r^3+r^3}{r^2}=3r.$$

$(x,y)\to(0,0)$ のとき $r\to 0$ であるから，「はさみうちの原理」より

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|=\lim_{r\to 0}3r=0.$$

すなわち $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}=0.$ ■

[8]任意の実数 x, y に対し，$|x|-|y|\le|x+y|\le|x|+|y|$ が成り立つ．これを**三角不等式**という．

極限の性質． 2 変数の極限についても，次が成り立つ：

公式 4.6 (極限と四則) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = B$ であるとき，

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \{f(x,y)+g(x,y)\} = A+B$.

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = AB$.

(3) $B \neq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B}$.

関数の連続性

2 変数関数の連続性も 1 変数の場合と同様に定義する．

定義 (連続性) 少なくとも点 (a,b) を含む円板上で定義された関数 $f(x,y)$ に対し，

$$(x,y)\to(a,b) \text{ のとき } f(x,y)\to f(a,b)$$

すなわち

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

であるとき，関数 $f(x,y)$ は (a,b) で**連続**であるという．

関数 $f(x,y)$ が**集合 D 上で連続**であるとは，D 内のすべての点 (a,b) において $f(x,y)$ が連続であることをいう．

例 6（1 次関数）． すべての 1 次関数 $z=f(x,y)=Ax+By+C$ は xy 平面 $\mathbb{R}^2$ 上で連続である．実際，任意の (a,b) に対し，三角不等式より

$$|f(x,y)-f(a,b)| = |A(x-a)+B(y-b)| \le |A||x-a|+|B||y-b|.$$

$(x,y)\to(a,b)$ のとき $x\to a$ かつ $y\to b$ であるから，上の式は 0 に収束する．よって $f(x,y)\to f(a,b)$.

関数の四則と連続性． 次が成り立つのも，1 変数の場合と同様である．

定理 4.7 (四則と連続性) 関数 $f(x,y)$ と関数 $g(x,y)$ が (a,b) で連続であるとき，和 $f(x,y)+g(x,y)$，積 $f(x,y)g(x,y)$ も (a,b) で連続．さらに $g(a,b)\neq 0$ であるとき，商 $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ も (a,b) で連続．

例 7（多項式）． 定数関数，1 次関数は連続であるから，定理 4.7 より $1+xy$, $1-x^2-3xy^2+y^3$ といった多項式関数も連続となる．また，$\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ などの有理関数も分母が 0 にならない範囲で連続である．

例 8（例 5 の関数）． $f(x,y)=\dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$ は原点で分母が 0 になるので関数の値が定義できないように見えるが，$f(0,0):=1$ と追加で定義すると $\mathbb{R}^2$ 全体で連続な関数となる．

例 9（例題 4.2 の関数）． 同様に $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ と定義すると $\mathbb{R}^2$ 全体で連続な関数となる．

例 10（例題 4.1 の関数）． 今度は $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ と定義してみる．この関数は原点以外の点で連続だが，原点では連続でない．そもそも例題 4.1 より，$f(0,0)$ としてどのような実数を割り当てても平面全体で連続な関数にはできないのである[9]．

有界閉集合上での最大・最小値の存在． 1 変数のときは，閉区間上の連続関数には最大・最小値が存在する，という定理があった．この 2 変数版を証明抜きで紹介しておこう．

> **定理 4.8 (有界閉集合上での最大・最小値の存在)** 有界な閉集合 D 上で連続な関数 $z=f(x,y)$ は最大値と最小値をもつ．

注意． 有界な閉集合は**コンパクト集合**ともよばれる．この定理は「コンパクト集合上の連続関数は最大値・最小値をもつ」という形で述べられることが多い．

また，有界でも閉集合でなければ最大値・最小値が存在しないかもしれない．たとえば原点中心半径 $\pi/2$ の開円板上で定義された関数 $z=\tan\sqrt{x^2+y^2}$ は最大値を持たない．

[9] このような関数は例外的なので，神経質になる必要はない．