担当教員：川平 友規

# 講義第 1 回（5/4）：写像と関数，いろいろな関数

配布日：4/19/2020　Version：1.1

## 区間と関数

**問題 1-1.** 以下の区間を $\{x \in \mathbb{R} \mid (x \text{ の条件})\}$ の形で表せ．

(1) $[1,2]$　(2) $[-\pi,\pi)$　(3) $(-1,\infty)$　(4) $(-\infty,1]$

**問題 1-2.** 以下の関数の値域を求めよ．

(1) $\mathbb{R}$ 上の関数 $y=\cos x$　(2) $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上の関数 $y=\tan x$

(3) 区間 $[-2,2]$ 上の関数 $y=\dfrac{1}{1+x^2}$　(4) $\mathbb{R}$ 上の関数 $y=x^2-4x+1$

## 連続関数と初等関数

**問題 1-3.** $x=a$ を含む区間 $I$ 上で定義された関数 $y=f(x)$ が $x=a$ において連続であることの定義をかけ．

**問題 1-4.** 区間 $I$ 上で定義された関数 $y=f(x)$ が（$I$ 上の）連続関数であることの定義をかけ．

**問題 1-5.** $[-1,1]$ 上で定義域された関数 $y=f(x)$ で，$x=0$ で連続ではないものを 1 つ挙げよ．

**問題 1-6.** $I=[-1,1]$ 上で定義域された関数 $y=f(x)$ で，$I$ 上のすべての $x$ において連続ではないものを 1 つ挙げよ．

**問題 1-7.** $\mathbb{R}$ 上の関数 $y=f(x)$ を $x\neq 0$ のとき $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，$x=0$ のとき $f(0)=0$ と定める．この関数は $x=0$ において連続だと言えるか？

**問題 1-8.** $\mathbb{R}$ 上の関数 $y=f(x)$ を $x\neq 0$ のとき $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$x=0$ のとき $f(0)=0$ と定める．この関数は $x=0$ において連続だと言えるか？

## 逆三角関数

**問題 1-9.** 次の値を求めよ．

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\,0$　(2) $\mathrm{Sin}^{-1}\,\dfrac{1}{2}$　(3) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

(4) $\mathrm{Cos}^{-1}\,0$　(5) $\mathrm{Cos}^{-1}\,\dfrac{1}{2}$　(6) $\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(7) $\mathrm{Tan}^{-1}\,0$　(8) $\mathrm{Tan}^{-1}\sqrt{3}$　(9) $\mathrm{Tan}^{-1}(-1)$

**問題 1-10.** $\mathrm{Cos}^{-1}\,\dfrac{4}{5}=\mathrm{Sin}^{-1}\,\dfrac{3}{5}$ を示せ．

**問題 1-11.**

(1) $\mathrm{Sin}^{-1}\left(\sin\dfrac{9}{4}\pi\right)$ の値を求めよ．

(2) $y=\mathrm{Sin}^{-1}(\sin x)$ $(-\pi\le x\le\pi)$ のグラフをかけ．

## ●● 5 月 4 日の講義ノート ●●

参考書の該当箇所：[三宅]1.2 と 1.3，[川平] 3 章と 5 章

### 区間と関数

まずは関数を記述するために必要な言葉をいくつか導入する．

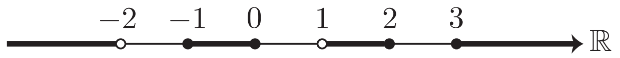
**区間.** 変数が動く範囲を指定するときに便利な「区間」という言葉を導入しよう．

**定義 （区間）** $a < b$ を満たす実数 $a$，$b$ に対し，以下の形の集合を**区間**という：

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \qquad (a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$
$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\} \qquad [a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$$
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\} \qquad (-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\} \qquad (-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$$
$$(-\infty,\infty) := \mathbb{R} \text{（実数全体）}$$

とくに $\boldsymbol{(a,b)}$ の形の区間を**開区間**とよび，$\boldsymbol{[a,b]}$ の形の区間を**閉区間**とよぶ．また， $\infty$ のかわりに $+\infty$ と書くこともある．

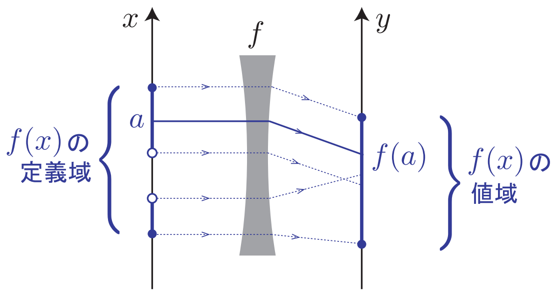
たとえば，下の図は左から $(-\infty,-2)$，$[-1,0]$ $(1,2]$，$[3,\infty)$ を表している．




**関数.** 「関数」とは何だったか，おさらいしておこう[1]．

ある変数 $x$ に対し，$x$ の値に依存して決まる実数 $f(x)$ を考え，それを別の変数 $y$ に割り当てる．そのような「しくみ」を**関数** $y = f(x)$ とよぶ．$x$ は自由に変化させてよいので**独立変数**とよばれ，$y$ は $x$ に依存して変化するので**従属変数**とよばれる[2]．「$x$ は自由」といっても，関数によっては制限が加わる．たとえば $y = 1/x$ では $x \neq 0$ である．一般に，関数 $f(a)$ の値が定義されているような実数 $a$ 全体からなる集合を関数 $y = f(x)$ の**定義域**とよぶ．また，関数がとりうる値をすべて集めた集合を関数 $y = f(x)$ の**値域**とよぶ．たとえば $y = \sin x$ の定義域は $(-\infty,\infty)$ であり，値域は区間 $[-1,1]$ である．

現代の数学では，関数とはプロジェクターのように，スクリーン上の数の集合を（レンズを通して）別のスクリーン上へ「写す」ものだと解釈することが多い．そのため，関数 $y = f(x)$ が与えられたとき，「関数 $f$ は $x$ を $y$ に**写す**」といった表現もしばしば用いられる．この考え方から派生して，関数を




$$\boldsymbol{f : x \mapsto f(x), \quad x \stackrel{f}{\longmapsto} f(x)}$$

[1]英語の function（機能） が中国語で「函数」（hánshù）と音訳され，日本に渡って「関数」となった．(かつては日本でも「函数」と書いた．)
また，関数 $y = f(x)$ はあとで学ぶ「多変数関数」と区別するために，**1 変数関数**ともよばれる．
[2]$y$ の $x$ への依存性を強調するときには，$y = f(x)$ のかわりに $y = y(x)$ とも書く．

といった記号で表すことも多い．たとえば，関数 $y=f(x)=x^2$ を

$$f: x \mapsto x^2, \quad x \xmapsto{f} y=x^2$$

といった具合に表現するのである．

**注意.** 一般に，集合 $X$ の元に対し集合 $Y$ の元をひとつ対応させる「しくみ」$f$ を「$X$ から $Y$ への**写像** $f$」といい，$f: X \to Y$ と表す．元 $x \in X$ に $y \in Y$ が対応するとき，$f: x \mapsto y$，$y=f(x)$ などと表す．これは関数の概念を一般化したものである．

### 関数の極限

高校でも学んだ極限の概念をおさらいしておこう．

**定義 （関数の極限と収束）** 関数 $f(x)$ が<u>定数 $a$ のまわりで定義されている</u>とする．関数 $f(x)$ が $\boldsymbol{x \to a}$ **のとき** $\boldsymbol{A}$ **に収束する**とは，変数 $x$ が $a$ に<u>限りなく近づく</u>とき $f(x)$ が実数 $A$ に<u>限りなく近づく</u>ことをいい，これを

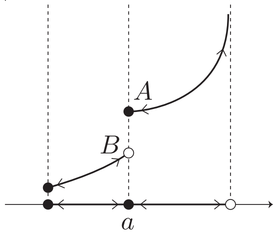
$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{もしくは} \quad f(x) \to A \quad (x \to a) \tag{1.1}$$

と表す．このとき，$A$ を関数 $f(x)$ の $x \to a$ における**極限**とよぶ．

**下線部に関する注意.** まず「定数 $a$ のまわりで定義されている」といったとき，1 点 $x=a$ が $f(x)$ の定義域に入っていないこともある．このとき「$x \to a$」は「$x \neq a$ かつ $x \to a$」と解釈するのがならわしである．たとえば関数 $\dfrac{\sin x}{x}$ は $x=0$ で $\dfrac{0}{0}$ となり定義できないが，おなじみの極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ は上のような配慮により意味をもつ．

また，「限りなく近づく」というのはあいまいな概念であるが，数列の収束性と同様に「誤差を好きなだけ小さくできる」と解釈すればよい．厳密に定式化するには，$\epsilon$ 論法（$\epsilon$-$\delta$ 論法）とよばれる方法を用いる．

**右極限と左極限.** 図のように，区間の端点や関数の値がジャンプするような点での極限を考えるため，「一方向からの極限（片側極限）」を導入しておこう．




**定義 （右極限と左極限）** 関数 $f(x)$ が「$x=a$ において**右極限** $A$ をもつ」とは，変数 $x$ が $x>a$ を満たしながら $a$ に限りなく近づくとき，$f(x)$ がある実数 $A$ に限りなく近づくことをいう．これを

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A \quad \text{もしくは} \quad f(x) \to A \quad (x \to a+0)$$

と表す．同様に，関数 $f(x)$ が「$x=a$ において**左極限** $B$ をもつ」とは，変数 $x$ が $x<a$ を満たしながら $a$ に限りなく近づくとき，$f(x)$ がある実数 $B$ に限りなく近づくことをいう．こちらは

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = B \quad \text{もしくは} \quad f(x) \to B \quad (x \to a-0)$$

と表す．

$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = A$ が成り立つとき，$\lim_{x\to a} f(x) = A$ が成り立つ．

**正負の無限大．** 式 (1.1) のような極限の記号は $a = \pm\infty$ や $A = \pm\infty$ の場合にも適用される．(右極限・左極限も同様．)

たとえば

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty.$$
$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = \infty, \qquad \lim_{x\to\pi/2-0} \tan x = \infty.$$

といった具合である．ただし，「$\pm\infty$ に収束する」とはいわず，「$\pm\infty$ に**発散する**」ということになっている．

**極限の性質．** 以下の公式は高校のころからおなじみであろう（証明略）：

**公式 1.1（極限の四則・はさみうちの原理）** $\lim_{x\to a} f(x) = A$，$\lim_{x\to a} g(x) = B$ のとき，次が成り立つ：

(1) $\lim_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = A + B$.

(2) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.

(3) $B \neq 0$ のとき $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

(4) $f(x) < g(x)$ であれば，$A \leq B$.

(5) $A = B$ かつ $f(x) < h(x) < g(x)$ のとき，

$$\lim_{x\to a} h(x) = A. \quad \text{（はさみうちの原理）}$$

(4) と (5) の不等号 $<$ はいずれも $\leq$ に変えてもよい．さらに，同様の公式は右極限・左極限についても正しい．

**指数関数・正弦関数の極限．** 役に立つおなじみの極限をまとめておこう．

**公式 1.2（指数関数・正弦関数の極限）** $a$ を正の定数とする．

(1) $\lim_{x\to 0} a^x = 1$　　(2) $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

(3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$　　(4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

## 関数の連続性

微分積分学が相手にする（できる）関数はそれなりによい性質をもったものに限られている．たとえば，グラフを描いたときに「ぶつ切れ」になっているよりは，「つながっている」ほうがよい．その「つながっている」状態を表現するのが，関数の「連続性」である：

**定義 （連続性）** 実数 $a$ のまわりで定義された関数 $y=f(x)$ が **$x=a$ において連続**であるとは，$x \to a$ のとき $f(x) \to f(a)$ となることをいう．すなわち，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

また，$f(x)$ がある区間 $I$ 上のすべての点で連続であるとき，「**関数 $f(x)$ は $I$ 上で連続**」もしくは「**$f(x)$ は $I$ 上の連続関数**」という．

**例 1.** $f(x)=c$（定数），$g(x)=x$ はともに $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ 上の連続関数である．

**例 2.** 関数 $h(x)=\dfrac{1}{x}$ は $(-\infty,0)$ と $(0,\infty)$ 上で連続．($a \neq 0$，$f(x)=1$，$g(x)=x$ として公式 1.1(3) を適用すればよい．)

**例 3.** 一般に，多項式関数，三角関数，指数・対数関数などの初等的な関数はすべて連続である．

例 3 のような初等的な連続関数をいろいろと操作して，新しい連続関数を構成することを考えよう.「操作」として考えられるのは，加減乗除の「四則」と「合成」がもっとも基本的である．さらに,「逆関数」をとる,「積分する」などの方法もある．

ここでは連続関数の「四則」と「合成」についての命題を紹介しておこう．(証明は連続性の定義と公式 1.1 からほとんど明らか．)

**命題 1.3 (連続関数の四則)** 関数 $f(x)$，$g(x)$ が $x=a$ で連続であるとき，その和（差）$f(x) \pm g(x)$ と積 $f(x)g(x)$ は $x=a$ で連続．さらに $g(a) \neq 0$ のとき，商 $f(x)/g(x)$ も $x=a$ で連続．

**命題 1.4 (連続関数の合成)** 定義域上の各点で連続な関数 $y=f(x)$ と $z=g(y)$ に対し，合成関数 $z=g(f(x))$ は定義可能な範囲で連続である．

## 1 対 1 関数と逆関数

ふたつの連続関数の和・差・積・商や，それらを合成したものは（定義可能な範囲で）連続関数であることを学んだ（命題 1.3，命題 1.4）．これらは新しく有用な連続関数を生成するうえで重要な操作だといえる．

同様に,「逆関数をとる」という操作も重要である．たとえば，おなじみの平方根関数 $y=\sqrt{x}$ や対数関数 $y=\log x$ は，それぞれ $y=x^2$ と $y=e^x$ の「逆関数」として与えられるのであった．その手法をおさらいしていこう．

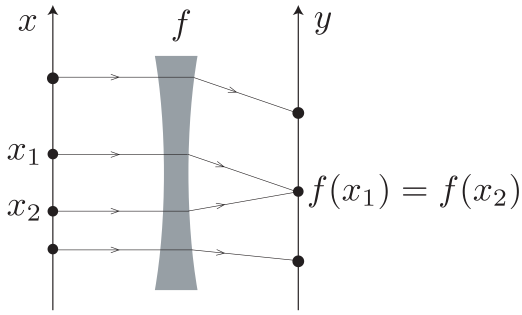
**1 対 1 関数．** 集合 $I$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．(多くの場合，$I$ は区間で考える．)

**定義 （1 対 1 関数）** 関数 $y=f(x)$ が $I$ 上で **1 対 1** であるとは，すべて $x_1, x_2 \in I$ に対し，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ であることをいう．

**注意．**「$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$」は対偶をとると「$f(x_1)=f(x_2)$ ならば $x_1=x_2$」と同値である．(すなわち，命題としての真偽が一致する．)

ようするに，$I$ 上では同じ値を 2 度とらない，ということである．

たとえば，右の図は 1 対 1 で「ない」関数のイメージである．1 対 1 関数では，このように異なる 2 点の像が 1 点に潰（つぶ）れることがあってはいけない．




**例 2.**　$f(x) = x^2$ で定まる関数は，区間 $[0, \infty)$ 上の関数だと考えた場合は 1 対 1 である．なぜなら， $0 \le x_1 < x_2$ のとき $x_1^2 \le x_1 x_2 < x_2^2$ が成り立つので，$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$，よって「$x_1 \ne x_2$ ならば $f(x_1) \ne f(x_2)$」が結論されるからである．(一方，区間 $(-\infty, \infty)$ 上の関数と考えた場合は 1 対 1 でない.)

この性質を一般化してみよう．

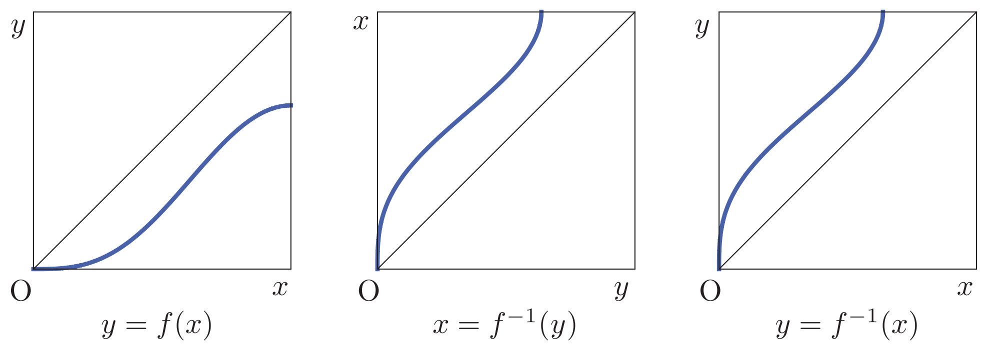
> **定義 （真に単調増加・減少）** 関数 $y = f(x)$ が集合 $I$ 上で**真に単調増加** [**真に単調減少** ] であるとは，すべての $x_1, x_2 \in I$ に対し，$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ [ $f(x_1) > f(x_2)$] が成り立つことをいう．
> このとき，$y = f(x)$ は 1 対 1 関数となる．

**例 3.**　$y = x^2$ は区間 $(-\infty, 0]$ で真に単調減少．区間 $[0, \infty)$ で真に単調増加．区間 $(-\infty, \infty)$ では，そのいずれでもない．

**逆関数.**　以上を踏まえて，1 対 1 関数の「逆関数」を定義しよう[3]．

> **定義 （逆関数）** 関数 $y = f(x)$ が定義域 $I$ 上で 1 対 1 であるとき，その値域に属する各 $y$ に対し，$y = f(x)$ を満たす $I$ の唯一の元 $x$ を対応させる関数が定まる．これを $y = f(x)$ の**逆関数**とよび，$\boldsymbol{x = f^{-1}(y)}$ と表す．もしくは，変数 $x$ と $y$ の役割を入れ替えて，$\boldsymbol{y = f^{-1}(x)}$ と表す．

関数 $y = f(x)$ と 逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは直線 $y = x$ に関して互いに線対称である．




グラフの線対称性から想像されるように，「逆関数」はもとの関数の性質をかなり引き継いでいる（[三宅] p15，[川平] p33）：

[3] 1 対 1 でない関数の逆関数は考えない．

**命題 1.5 (逆関数も連続)** 区間 $[a,b]$ 上で定義された関数 $y=f(x)$ が真に単調増加 [減少] かつ連続であれば，同じく真に単調増加 [減少] かつ連続な逆関数 $x=f^{-1}(y)$ が存在する．とくに，その定義域は $f(a)$ と $f(b)$ の間の閉区間となる．

**例 4（平方根 $\sqrt{\ }$ の定義）．** 関数 $y=f(x)=x^2$ は区間 $[0,\infty)$ 上で真に単調増加かつ連続であるから，命題 1.5 より（$[0,\infty)$ に含まれる任意の閉区間上で）真に単調増加かつ連続な逆関数 $y=f^{-1}(x)$ をもつ．これを

$$\boldsymbol{y=\sqrt{x}} \quad \text{もしくは} \quad \boldsymbol{y=x^{\frac{1}{2}}}$$

と表し，$x$ の**平方根**とよぶのである．$y=\sqrt{x}$ の定義域はやはり $[0,\infty)$ となる．

これでやっと，$\sqrt{2}$ や $\sqrt{\pi}$ といった「平方根」の定義と存在が正当化された．

**例 5（指数関数と対数関数）．** 指数関数 $y=e^x$ は真に単調増加かつ連続である．命題 1.5 より真に単調増加かつ連続な逆関数が存在するから，それを対数関数 $y=\log x$ と定義するのである．

## 指数関数と対数関数

指数関数を次のように定義する[4]．

**定義 (指数関数)** 実数 $x$ に $e$ の $x$ 乗を対応させる関数を**指数関数**とよび，$\boldsymbol{e^x}$ もしくは $\boldsymbol{\exp x}$ のように表す．

より一般に，$a>0$ を固定し実数 $x$ に $a$ の $x$ 乗 $a^x$ を対応させる関数を $a$ **を底とする指数関数**とよぶ．

指数関数は次の性質を持つ：

**定理 1.6 (指数関数の性質)** $a>0$ とする．このとき，以下が成り立つ：

(1) 任意の実数 $x$ に対し，$a^x>0$.

(2) **指数法則：**任意の実数 $x$, $y$ に対し，$\boldsymbol{a^x\cdot a^y=a^{x+y}}$.

(3) $a>1$ のとき，関数 $a^x$ は真に単調増加かつ連続.

(4) $a<1$ のとき，関数 $a^x$ は真に単調減少かつ連続.

(5) $a=1$ のときはつねに $1^x=1$ となり定数関数.

**対数関数.** 定理 1.6 より $a>0,\ a\neq 1$ のとき指数関数の単調性と連続性が得られたから，命題 1.5 より単調かつ連続な逆関数を考えることができる．それが「対数関数」である[5]．

[4] $\exp x$ は「指数」を意味する「exponent」に由来する．
[5] $\log x$ は「対数」を意味する logarithm に由来する．$\ln x$ はラテン語の logarithmus naturalis （英語に直すと natural logarithm，日本語だと「自然な対数」）の略である

**定義 （対数関数）** 指数関数 $y = e^x$ の逆関数を**対数関数**（もしくは**自然対数**）とよび，$\boldsymbol{y = \log x}$ もしくは $\boldsymbol{y = \ln x}$ と表す．

より一般に，$a$ を 1 でない正の数とするとき，$a$ を底とする指数関数 $y = a^x$ の逆関数を $a$ **を底とする対数関数**とよび，$\boldsymbol{y = \log_a x}$ と表す．とくに，$\log_e x = \log x$．

次の定理は命題 1.5 を用いて定理 1.6 を読み替えたものである．

**定理 1.7 (対数関数の性質)** $a > 0, a \neq 1$ とする．このとき，以下が成り立つ：

(1) $y = \log_a x$ は区間 $(0, \infty)$ で定義され，すべての実数値をとる．

(2) 任意の正の実数 $x$，$y$ に対し，$\boldsymbol{\log_a x + \log_a y = \log_a xy}$．

(3) $a > 1$ のとき，関数 $\log_a x$ は真に単調増加かつ連続．

(4) $a < 1$ のとき，関数 $\log_a x$ は真に単調減少かつ連続．

$a > 0$ のとき $a^x = (e^{\log a})^x$，さらに $x > 0$ のとき $\log x = \log a^{\log_a x} = \log_a x \log a$ が成り立つ．これより，次の（微分や積分の計算で役に立つ）公式を得る：

**公式 1.8 (底の変換公式)** $\qquad \boldsymbol{a^x = e^{x \log a}} \qquad \boldsymbol{\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}}$

## 三角・逆三角関数

**三角関数．** まずは高校以来おなじみの「三角関数」についておさらいしておこう[6]．

**定義 （三角関数）** $xy$ 平面上で $x^2 + y^2 = 1$ で定まる単位円を考える．点 $(1, 0)$ から円周上を $\theta$ ラジアン進んだ点 $\mathrm{P}_\theta$ の座標を $\boldsymbol{(\cos\theta, \sin\theta)}$ と表す．

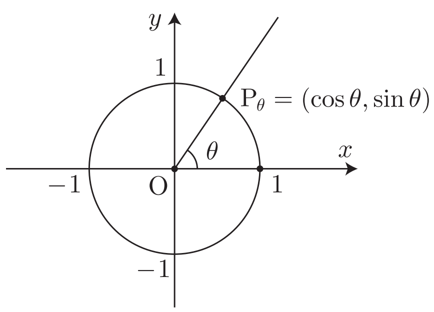
また，$\theta \neq (m + 1/2)\pi$ ($m$ は整数) のとき，線分 $\mathrm{OP}_\theta$ の傾きを $\boldsymbol{\tan\theta}$ で表す．すなわち，$\boldsymbol{\tan\theta := \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$．

実数 $x$ に対し，$\sin x$ は**正弦関数**，$\cos x$ は**余弦関数**，$\tan x$ は**正接関数**とよばれ，これらをあわせて**三角関数**とよぶ．

定義より，周期性

$$\boldsymbol{\sin(x + 2\pi) = \sin x,}$$
$$\boldsymbol{\cos(x + 2\pi) = \cos x,}$$
$$\boldsymbol{\tan(x + \pi) = \tan x}$$

がわかる．

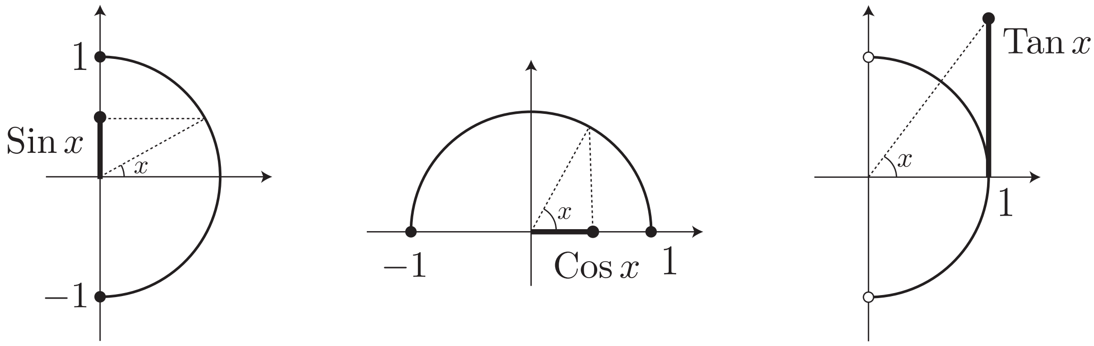


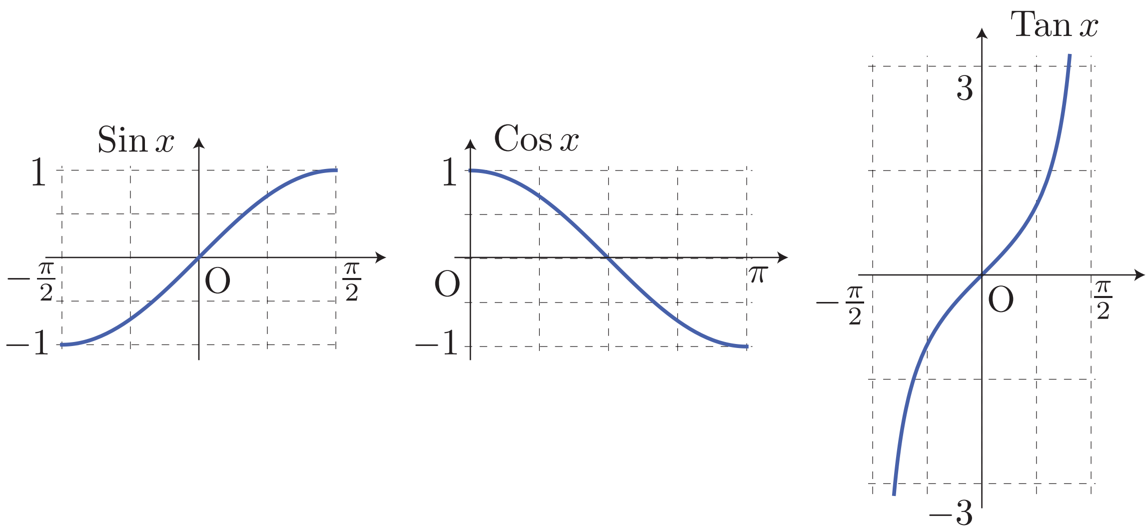

[6]ほかに三角関数とよばれるものとして，余接関数 $\cot x := \dfrac{1}{\tan x}$ （コタンジェント $x$），正割関数 $\sec x := \dfrac{1}{\cos x}$ （セカント $x$），余割関数 $\csc x := \dfrac{1}{\sin x}$ （もしくは $\mathrm{cosec}\, x$，コセカント $x$）がある．

**逆三角関数.** さて三角関数の逆関数を考えたい．三角関数は周期性をもつ（よって同じ値を 2 度以上とる）から，1 対 1 ではない．そこで，三角関数を単調性をもつ区間に制限したものを考える．具体的には，

- $\sin x$ を区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ に制限したものを $\mathbf{Sin}\,\boldsymbol{x}$
- $\cos x$ を区間 $[0, \pi]$ に制限したものを $\mathbf{Cos}\,\boldsymbol{x}$
- $\tan x$ を区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ に制限したものを $\mathbf{Tan}\,\boldsymbol{x}$

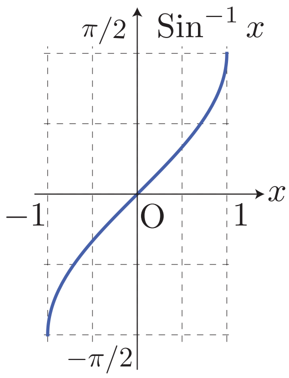
と表すことにすると，$\mathrm{Sin}\,x$ と $\mathrm{Tan}\,x$ は真に単調増加かつ連続，$\mathrm{Cos}\,x$ は真に単調減少かつ連続である．よって 命題 1.5 より，逆関数を考えることができる．それが「逆三角関数」とよばれる関数たちである．

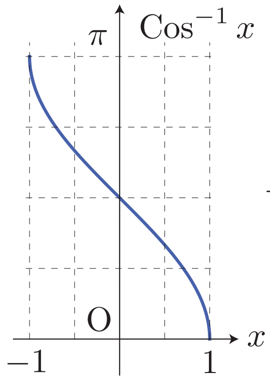


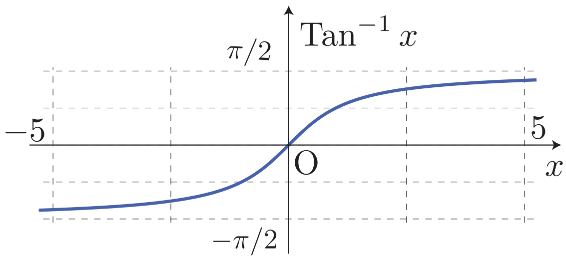




> **定義 （逆三角関数）** 上の $\mathrm{Sin}\,x$，$\mathrm{Cos}\,x$，$\mathrm{Tan}\,x$ の逆関数をそれぞれ $\mathbf{Sin}^{-1}\,\boldsymbol{x}$，$\mathbf{Cos}^{-1}\,\boldsymbol{x}$，$\mathbf{Tan}^{-1}\,\boldsymbol{x}$ と表し，これらをあわせて**逆三角関数**とよぶ．さらに，
>
> - $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ は**逆正弦関数**もしくは**サインインバース** $x$
> - $\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ は**逆余弦関数**もしくは**コサインインバース** $x$,
> - $\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ は**逆正接関数**もしくは**タンジェントインバース** $x$
>
> とよばれる．

**注意.** 逆三角関数 $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$，$\mathrm{Cos}^{-1}\,x$，$\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ はそれぞれ $\boldsymbol{\arcsin x}$，$\boldsymbol{\arccos x}$，$\boldsymbol{\arctan x}$ とも書かれ，それぞれ**アークサイン** $x$，**アークコサイン** $x$，**アークタンジェント** $x$ とよばれることも多い．




逆三角関数の性質をまとめておこう．

**定理 1.9 (逆三角関数の性質)** 逆三角関数は次の性質を持つ：

(1) 関数 $\mathrm{Sin}^{-1}\,x$ は定義域 $[-1,1]$ 上で真に単調増加かつ連続であり，その値域は $[-\pi/2, \pi/2]$.

(2) 関数 $\mathrm{Cos}^{-1}\,x$ は定義域 $[-1,1]$ 上で真に単調減少かつ連続であり，その値域は $[0,\pi]$.

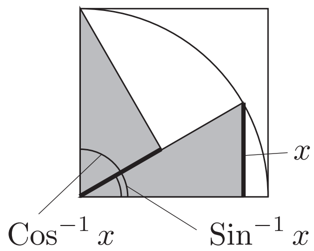
(3) 関数 $\mathrm{Tan}^{-1}\,x$ は定義域 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 上で真に単調増加かつ連続であり，その値域は $(-\pi/2, \pi/2)$.

**例 1.** $\mathrm{Sin}^{-1}\,0 = 0$，$\mathrm{Sin}^{-1}\,1 = \dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$，$\mathrm{Cos}^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{Cos}^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$，$\mathrm{Tan}^{-1}\,1 = \dfrac{\pi}{4}$，$\mathrm{Tan}^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$，など．

**例 2.** $x \in [0,1]$ のとき，

$$\mathrm{Sin}^{-1}\,x + \mathrm{Cos}^{-1}\,x = \frac{\pi}{2}$$

が成り立つ．理由は次の図をぢっと眺めればわかるだろう．
（グラフを見ると $x \in [-1,1]$ で正しいこともわかる.）




**例題 1.1 (逆三角関数の関係式)** 次の関係式を示せ：

(1) $2\mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{10} = \mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{49}{50}$　　(2) $4\mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5} - \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$

**解答.** (1) $\alpha = \mathrm{Sin}^{-1}\dfrac{1}{10}$ とおくと，$\sin\alpha = \dfrac{1}{10}$ $(0<\alpha<\pi/2)$．$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\left(\dfrac{1}{10}\right)^2 = \dfrac{49}{50}$. $0 < 2\alpha < \pi$ であるから，$2\alpha = \mathrm{Cos}^{-1}\dfrac{49}{50}$.

(2) $\alpha = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{5}$ とおくと，$\tan\alpha = \dfrac{1}{5} < 1$．よって $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$．倍角の公式より，$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{5}{12}$，$\tan 4\alpha = \dfrac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \dfrac{120}{119}$．さらに加法定理より，

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan(\pi/4)}{1+\tan 4\alpha\tan(\pi/4)} = \frac{1}{239}.$$

$-\dfrac{\pi}{4} < 4\alpha - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3\pi}{4}$ が成り立つことから，$4\alpha - \dfrac{\pi}{4} = \mathrm{Tan}^{-1}\dfrac{1}{239}$． ■

### 逆双曲線関数

次で与えられる関数を**双曲線関数**とよぶ[7]：

$$\boldsymbol{\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}}$$

双曲線関数に対し，以下が成り立つ（複号同順）：

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$（ただし $\cosh^2 x = (\cosh x)^2$, $\sinh^2 x = (\sinh x)^2$）

(2) $\sinh(x\pm y) = \sinh x\cosh y \pm \cosh x \sinh y$

(3) $\cosh(x\pm y) = \cosh x\cosh y \pm \sinh x \sinh y$

(4) $\tanh(x\pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x\tanh y}$

[7] 日本語ではハイパボリック・サイン $x$，ハイパボリック・コサイン $x$，ハイパボリック・タンジェント $x$ と読む．