[多変数関数の導関数]

例題. (偏導関数) $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ とする．$f(x,y)$ の偏導関数を全て求めよ．

解答例. $z=f(x,y)$ の x 方向偏導関数は，y を固定して，変数 x のみの関数とみて x で微分します．$g(t)=\log t$, $t=h(x)=x^2+y^2$ (y は定数) とみて $z=g(h(x))$ と表されるので

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{1}{t}(2x)=\frac{2x}{x^2+y^2}$$

となります．同様に $z=f(x,y)$ の y 方向偏導関数は，x を定数とみて y で微分して

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\log(x^2+y^2)=\frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

となります．

C37*. (偏微分) 次の関数の各変数についての偏導関数を求めよ．

(1) $f(x,y)=e^{xy}$.
(2) $f(x,y)=\log_x y$, $(x>0, x\neq 1, y>0)$.
(3) $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $(x\neq 0)$.

C38*. (2 階偏微分) 次の関数の 2 階偏導関数を全て求めよ．

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $((x,y)\neq(0,0))$.
(2) $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $(x\neq 0)$.

C39*. (2 階偏微分) 次の関数 w について $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ を求めよ．

(1) $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $((x,y,z)\neq(0,0,0))$.
(2) $w=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $((x,y,z)\neq(0,0,0))$.

C40. (偏微分の交換) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ とおく．

(1) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であることを示せ．
(2) 偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ．
(3) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ $((x,y)\neq(0,0))$ を求めよ．
(4) 2 階偏微分係数 $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ を求めよ．

C41. (ベクトル値関数の回転) $f(x,y,z)$, $A_i(x,y,z)$ $(i=1,2,3)$ を $\mathbb{R}^3$ 上の C^2 級関数，$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\begin{pmatrix}A_1(x,y,z)\\A_2(x,y,z)\\A_3(x,y,z)\end{pmatrix}$ をベクトル値関数とする．次を示せ．ただし $\triangle\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\triangle A_1\\\triangle A_2\\\triangle A_3\end{pmatrix}$.

(1) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f)=\boldsymbol{o}$.
(2) $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})=0$.
(3) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})=\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A})-\triangle\boldsymbol{A}$.

解答と解説.

C37. (偏微分) 次の関数の各変数についての偏導関数を求めよ.

(1) $f(x,y)=e^{xy}$.
(2) $f(x,y)=\log_x y$, $(x>0, x\neq 1, y>0)$.
(3) $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $(x\neq 0)$.

---

(1) $f(x,y)=e^{xy}$ とします. $f(x,y)$ の x 方向の偏導関数は y を定数と見て x についての 1 変数関数と思って微分しますから

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\right)=ye^{xy}$$

となります. 同様に $f(x,y)$ の y 方向の偏導関数では x を定数と見て y について微分しますので

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\right)=xe^{xy}$$

となります.

(2) $f(x,y)=\log_x y=\dfrac{\log y}{\log x}$ とします. これを x で偏微分すると, 商の微分法より

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\log y}{\log x}\right)=\frac{-\frac{1}{x}\log y}{(logx)^2}=-\frac{\log y}{x(\log x)^2}$$

となります. また y で偏微分すると

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\log y}{\log x}\right)=\frac{1}{y\log x}$$

となります.

(3) $g(t)=\tan^{-1}t$ の導関数は $g'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$ なので合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}
f_x(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{d}{dt}\tan^{-1}t\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{x}=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2},\\
f_y(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{d}{dt}\tan^{-1}t\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x}=\frac{1}{1+(y/x)^2}\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

となります.

C38. (2 階偏微分) 次の関数の 2 階偏導関数を全て求めよ.

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $((x,y)\neq(0,0))$.
(2) $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $(x\neq 0)$.

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ を偏微分すると $\dfrac{d}{dt}\sqrt{t}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ なので合成関数の微分法より

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

です．同様に

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

となります．この偏導関数をさらに偏微分します．

$f_x(x,y)$ を x で偏微分すると，積の微分法より

$$\begin{aligned}f_{xx}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}^3}=\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\end{aligned}$$

となります．また $f_x(x,y)$ を y で偏微分すると

$$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=x\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}^3}=-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}$$

となります．同様に $f_y(x,y)$ を x, y でそれぞれ偏微分して

$$\begin{aligned}f_{yx}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3},\\f_{yy}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3}\end{aligned}$$

となります．

(2) **C37**(3) より

$$f_x(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad f_y(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

です．これをさらに偏微分して

$$\begin{aligned}f_{xx}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\\f_{xy}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\\f_{yx}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\\f_{yy}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

となります.

C39. (2 階偏微分) 次の関数 w について $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ を求めよ.

(1) $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $((x,y,z)\neq(0,0,0))$.

(2) $w=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $((x,y,z)\neq(0,0,0))$.

---

(1) $w=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を x で偏微分すると

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

なので，さらに x で偏微分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}=\frac{y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\end{aligned}$$

となります．同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y}&=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},\\ \frac{\partial w}{\partial z}&=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}&=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\end{aligned}$$

となります．したがって

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{(y^2+z^2)+(x^2+z^2)+(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

です.

(2) $w=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ を x で偏微分すると

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}$$

となるのでさらに x で偏微分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}\\ &= -\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} - \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}\right) = \frac{2x^2-y^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}\end{aligned}$$

となります．同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = \frac{-x^2+2y^2-z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5},\\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = \frac{-x^2-y^2+2z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^5}\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad ((x,y,z) \neq (0,0,0))$$

となります．

C40. (偏微分の交換) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ とおく．

(1) $f(x,y)$ は $(0,0)$ で連続であることを示せ．
(2) 編微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ．
(3) 偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ $((x,y) \neq (0,0))$ を求めよ．
(4) 2 階編微分係数 $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ を求めよ．

---

(1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおきます．$(x,y) \to (0,0)$ のとき $r \to 0$ であり，$r \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}|f(x,y)| &= \left|\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^2\cos\theta\sin\theta(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)}{r^2}\right|\\ &= \left|r^2\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\right| = r^2|\cos\theta\sin\theta\cos 2\theta| \leq r^2\end{aligned}$$

をみたします．したがって $r \to 0$ のときはさみうちの原理より

$$\lim_{r\to 0}|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = 0$$

となります．したがって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0 = f(0,0)$$

となり，$f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ で連続です．

(2) 定義より

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h0(h^2-0)}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0, \\ f_y(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k} = 0 \end{aligned}$$

となります．

(3) $(x,y)\neq(0,0)$ では普通に偏微分することができます．

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{(y(x^2-y^2)+xy(2x))(x^2+y^2)-xy(x^2-y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^4+4x^2y^2-y^4)y}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{(x(x^2-y^2)-xy(2y))(x^2+y^2)-xy(x^2-y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^4-4x^2y^2-y^4)x}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

となります．特に $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0 = f_x(0,0)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = 0 = f_y(0,0)$ が成り立ち，$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上連続です．したがって $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 級です．

(4) 定義より

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{0+0-k^5}{k^4}-0}{k} = -1, \\ f_{yx}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{h^5-0-0}{h^4}-0}{h} = 1 \end{aligned}$$

となります．これより $f(x,y)$ は C^2 級ではありません．

C41. (ベクトル値関数の回転) $f(x,y,z)$, $A_i(x,y,z)$ $(i=1,2,3)$ を $\mathbb{R}^3$ 上の C^2 級関数，$\boldsymbol{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} A_1(x,y,z) \\ A_2(x,y,z) \\ A_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ をベクトル値関数とする．次を示せ．ただし $\triangle\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \triangle A_1 \\ \triangle A_2 \\ \triangle A_3 \end{pmatrix}$.

(1) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,f) = \boldsymbol{o}$.

(2) $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = 0$.

(3) $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}) - \triangle\boldsymbol{A}$.

---

(1)

$$\mathrm{grad}\,f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

ですから

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_z}{\partial y} - \dfrac{\partial f_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_x}{\partial z} - \dfrac{\partial f_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x} - \dfrac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{zy} - f_{yz} \\ f_{xz} - f_{zx} \\ f_{yx} - f_{xy} \end{pmatrix}$$

となります. いま f は C^2 級ですから $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xz} = f_{zx}$, $f_{yz} = f_{zx}$ をみたすので

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{o}$$

です.

(2)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_3}{\partial y} - \dfrac{\partial A_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial z} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_2}{\partial x} - \dfrac{\partial A_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y} \\ &= \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

となり A_1, A_2, A_3 は C^2 級なので

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{A}) = 0$$

です.

(3)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_3}{\partial y} - \dfrac{\partial A_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_1}{\partial z} - \dfrac{\partial A_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_2}{\partial x} - \dfrac{\partial A_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

ですから

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{A}) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial A_2}{\partial x}-\dfrac{\partial A_1}{\partial y}\right)-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial A_1}{\partial z}-\dfrac{\partial A_3}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial A_3}{\partial y}-\dfrac{\partial A_2}{\partial z}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial A_2}{\partial x}-\dfrac{\partial A_1}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial A_1}{\partial z}-\dfrac{\partial A_3}{\partial x}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial A_3}{\partial y}-\dfrac{\partial A_2}{\partial z}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial x}+\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial x}-\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial y}-\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial z}+\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial z}-\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial x}+\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial x}-\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial z\partial y}-\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial z}+\dfrac{\partial^2 A_2}{\partial y\partial z}+\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial z^2}-\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 A_3}{\partial z^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial A_1}{\partial x}+\dfrac{\partial A_2}{\partial y}+\dfrac{\partial A_3}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial A_1}{\partial x}+\dfrac{\partial A_2}{\partial y}+\dfrac{\partial A_3}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial A_1}{\partial x}+\dfrac{\partial A_2}{\partial y}+\dfrac{\partial A_3}{\partial z}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_1}{\partial xx}-\dfrac{\partial A_1}{\partial yy}-\dfrac{\partial A_1}{\partial zz} \\ \dfrac{\partial A_2}{\partial xx}-\dfrac{\partial A_2}{\partial yy}-\dfrac{\partial A_2}{\partial zz} \\ \dfrac{\partial A_3}{\partial xx}-\dfrac{\partial A_3}{\partial yy}-\dfrac{\partial A_3}{\partial zz} \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{grad}\left(\frac{\partial A_1}{\partial x}+\frac{\partial A_2}{\partial y}+\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)-\begin{pmatrix} \triangle A_1 \\ \triangle A_2 \\ \triangle A_3 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{A})-\triangle\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

です.

補足説明.

$y = f(x_1, \ldots, x_n)$ を n 変数関数とします．これを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ として

$$y = f(\boldsymbol{x})$$

と表すこともあります．

いま $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ は C^1 級とします．このとき偏導関数が存在するのでそれらを並べてできるベクトルを

$$\operatorname{grad} f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_{x_n}(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

を $f(x_1, \ldots, x_n)$ の**勾配**といいます．$\operatorname{grad} f$ は点 $(x_1, \ldots, x_n)$ に対してベクトルを対応させます．この対応 (写像) は

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

と表されます．また ∇ を

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$\operatorname{grad} f = \nabla f$$

と表すこともできます．

また

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^n}$$

を**ラプラシアン**といいます．これは

$$\triangle = \nabla \cdot \nabla \text{ (内積)}$$

とも表されます．$f(x_1, \ldots, x_n)$ が C^2 級で $\triangle f = 0$ となるとき f は**調和関数**であるといいます．

いまベクトル

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とし，その大きさを

$$r = \|\boldsymbol{r}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^r}$$

とします．このとき **C39** と同様にして

$$\operatorname{grad} r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$
$$\triangle r = \frac{(n-1)}{r}$$

となります．また $n=2$ のとき

$$\triangle \tan^{-1}\frac{y}{x} = 0 \quad (x \neq 0)$$

となるので $\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ は $x \neq 0$ で調和関数です．さらに $n=3$ のとき

$$\triangle \frac{1}{r} = 0 \quad (\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{o})$$

となるので

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^3}} \ ((x,y,z) \neq (0,0,0))$$

も $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ で調和関数です．

[連鎖公式]

例題. (連鎖公式) $f(x,y)$ は C^2 級とし，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする．$z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ に対して $z_{r\theta}$ を求めよ．

解答例. $f(x,y)$ は x, y を変数とする 2 変数関数であり，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ との合成関数を z とします．z を r で偏微分すると，連鎖公式より

$$z_r = \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta$$

となります．これをさらに θ で偏微分すると，ライプニッツの公式より

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_r}{\partial\theta} &= \frac{\partial f_x}{\partial\theta}\cos\theta + f_x\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial f_y}{\partial\theta}\sin\theta + f_y\frac{\partial\sin\theta}{\partial\theta} \\ &= \frac{\partial f_x}{\partial\theta}\cos\theta - f_x(x,y)\sin\theta + \frac{\partial f_y}{\partial\theta}\sin\theta + f_y(x,y)\cos\theta\end{aligned}$$

です．さらに連鎖公式より

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_x}{\partial\theta} &= \frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = f_{xx}(x,y)(-r\sin\theta) + f_{xy}(x,y)(r\cos\theta), \\ \frac{\partial f_y}{\partial\theta} &= \frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = f_{yx}(x,y)(-r\sin\theta) + f_{yy}(x,y)(r\cos\theta)\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}z_{r\theta} &= (-rf_{xx}(x,y)\sin\theta + rf_{xy}(x,y)\cos\theta)\cos\theta - f_x(x,y)\sin\theta \\ &\quad + (-rf_{yx}(x,y)\sin\theta + rf_{yy}(x,y)\cos\theta)\sin\theta + f_y(x,y)\cos\theta \\ &= -r(f_{xx}(x,y) - f_{yy}(x,y))\sin\theta\cos\theta + rf_{xy}(x,y)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ &\quad - f_x(x,y)\sin\theta + f_y(x,y)\cos\theta\end{aligned}$$

となります．

C42*. (変数変換) $z = f(x,y)$ は C^2 級とする．$x = \dfrac{s^2 - t^2}{2}$, $y = st$ とおくとき $(s,t) \neq (0,0)$ に対して次を示せ．

(1) $z_x^2 + z_y^2 = \dfrac{z_s^2 + z_t^2}{s^2 + t^2}$.　　(2) $z_{xx} + z_{yy} = \dfrac{z_{ss} + z_{tt}}{s^2 + t^2}$.

C43. (極座標変換) $z = f(x,y)$ は C^2 級とし，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする．

(1) z_r, z_θ を計算せよ．

(2) $z_x^2 + z_y^2 = z_r^2 + \dfrac{1}{r^2}z_\theta^2$ であることを示せ．

(3) $z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \dfrac{1}{r}z_r + \dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta}$ を示せ．

C44*. (連鎖公式) $f(x,y,z)$ は x, y, z についての C^1 級関数とし，$x = x(y,z)$ は y, z についての C^1 級関数とする．

(1) $g(y,z) = f(x(y,z),y,z)$ とするとき $\dfrac{\partial}{\partial y}g(y,z)$ 及び $\dfrac{\partial}{\partial z}g(y,z)$ を計算せよ．

(2) さらに $y = y(z)$ は z の C^1 級関数とする．$h(z) = f(x(y(z),z),y(z),z)$ とするとき $\dfrac{d}{dz}h(z)$ を計算せよ．

解答と解説.

C42. (変数変換) $z=f(x,y)$ は C^2 級とする. $x=\dfrac{s^2-t^2}{2}$, $y=st$ とおくとき $(s,t)\neq(0,0)$ に対して次を示せ.

(1) $z_x^2+z_y^2=\dfrac{z_s^2+z_t^2}{s^2+t^2}$. (2) $z_{xx}+z_{yy}=\dfrac{z_{ss}+z_{tt}}{s^2+t^2}$.

2変数関数 $z=f(x,y)$ と関数 $x=x(t)$, $y=y(t)$ の合成関数 $z=f(x(t),y(t))$ は t の関数と見なせて, z の t について微分すると

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=f_x(x(t),y(t))x'(t)+f_y(x(t),y(t))y'(t)$$

となります. また2変数関数 $z=f(x,y)$ と2変数関数 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ の合成関数 $z=f(x(u,v),y(y,v))$ は (u,v) の関数とみなせて, u,v での偏微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=f_x(x(u,v),y(u,v))x_u(u,v)+f_y(x(u,v),y(u,v))y_u(u,v),\\ \frac{\partial z}{\partial v}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=f_x(x(u,v),y(u,v))x_v(u,v)+f_y(x(u,v),y(u,v))y_v(u,v)\end{aligned}$$

となります.

(1) $x=\dfrac{s^2-t^2}{2}$, $y=st$ より x, y の s, t についての偏微分はそれぞれ

$$x_s=s,\ x_t=-t,\ y_s=t,\ y_t=s$$

となります.

z を s, t で偏微分すると連鎖公式より, それぞれ

$$\begin{aligned}z_s&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=z_xx_s+z_yy_t=sz_x+tz_y,\\ z_t&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}=z_xx_t+z_yy_t=-tz_x+sz_y\end{aligned}$$

です. したがって

$$\begin{aligned}z_s^2+z_t^2&=(sz_x+tz_y)^2+(-tz_x+sz_y)^2\\ &=(s^2z_x^2+2stz_xz_y+t^2z_y^2)+(t^2z_x^2-2stz_xz_y+s^2z_t^2)\\ &=(s^2+t^2)z_x^2+(s^2+t^2)z_y^2=(s^2+t^2)(z_x^2+z_y^2)\end{aligned}$$

が成り立ちます. よって

$$z_x^2+z_y^2=\frac{z_s^2+z_t^2}{s^2+t^2}$$

となります.

(2) z_s をさらに s で偏微分すると

$$
\begin{aligned}
z_{ss} &= \frac{\partial z_s}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(sz_x + tz_y) = z_x + s\frac{\partial z_x}{\partial s} + t\frac{\partial z_y}{\partial s} \\
&= z_x + s\left(\frac{\partial z_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) + t\left(\frac{\partial z_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right) \\
&= z_x + s(sz_{xx} + tz_{xy}) + t(uz_{yx} + tz_{yy}) \\
&= z_x + s^2 z_{xx} + st(z_{xy} + z_{yx}) + t^2 z_{yy}
\end{aligned}
$$

となります．同様に z_t をさらに t で偏微分すると

$$
\begin{aligned}
z_{tt} &= \frac{\partial z_t}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(-tz_x + sz_y) = -z_x - t\frac{\partial z_x}{\partial t} + s\frac{\partial z_y}{\partial t} \\
&= -z_x - t\left(\frac{\partial z_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) + s\left(\frac{\partial z_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right) \\
&= -z_x - t(-tz_{xx} + sz_{xy}) + s(-tz_{yx} + sz_{yy}) \\
&= -z_x + t^2 z_{xx} - st(z_{xy} + z_{yx}) + s^2 z_{yy}
\end{aligned}
$$

となります．ここで z は C^2 級なので $z_{xy} = z_{yx}$ より

$$
\begin{aligned}
z_{ss} + z_{tt} &= z_x - z_x + (s^2 + t^2)z_{xx} + 2(st - st)z_{xy} + (s^2 + t^2)z_{yy} \\
&= (s^2 + t^2)(z_{xx} + z_{yy})
\end{aligned}
$$

ですので

$$
z_{xx} + z_{yy} = \frac{z_{ss} + z_{tt}}{s^2 + t^2}
$$

が成り立ちます．

C43. (極座標変換) $z = f(x, y)$ は C^2 級とし，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする．

(1) z_r, z_θ を計算せよ．

(2) $z_x^2 + z_y^2 = z_r^2 + \dfrac{1}{r^2}z_\theta^2$ であることを示せ．

(3) $z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \dfrac{1}{r}z_r + \dfrac{1}{r^2}z_{\theta\theta}$ を示せ．

---

(1) z は x, y の関数であり，x, y はともに r, θ の関数なので連鎖公式より

$$
\begin{aligned}
z_r &= \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \\
z_\theta &= \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}
\end{aligned}
$$

です．いま $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ なので

$$
x_r = \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \quad x_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad y_r = \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \quad y_\theta = \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta
$$

より

$$\begin{aligned} z_r &= z_x \cos\theta + z_y \sin\theta, \\ z_\theta &= -r z_x \sin\theta + r z_y \cos\theta \end{aligned}$$

となります.

(2) 右辺を計算します.

$$\begin{aligned} z_r^2 &= (z_x \cos\theta + z_y \sin\theta)^2 = z_x^2 \cos^2\theta + 2 z_x z_y \cos\theta \sin\theta + z_y^2 \sin^2\theta, \\ z_\theta^2 &= (-r z_x \sin\theta + r z_y \cos\theta)^2 = r^2 (z_x^2 \sin^2\theta - 2 z_x z_y \cos\theta \sin\theta + z_y^2 \cos^2\theta) \end{aligned}$$

より

$$z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2 = z_x^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + z_y^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta) = z_x^2 + z_y^2$$

です.

(3) z は C^2 級なので $z_{xy} = z_{yx}$ です. $z_r = z_x \cos\theta + z_y \sin\theta$ を r で偏微分すると，連鎖公式より

$$\begin{aligned} z_{rr} &= \frac{\partial z_r}{\partial r} = \frac{\partial z_x}{\partial r} \cos\theta + \frac{\partial z_y}{\partial r} \sin\theta \\ &= \left(\frac{\partial z_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \cos\theta + \left(\frac{\partial z_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \sin\theta \\ &= (z_{xx} \cos\theta + z_{xy} \sin\theta) \cos\theta + (z_{yx} \cos\theta + z_{yy} \sin\theta) \sin\theta \\ &= z_{xx} \cos^2\theta + 2 z_{xy} \cos\theta \sin\theta + z_{yy} \sin^2\theta \end{aligned}$$

となります. 同様に $z_{\theta\theta}$ は

$$\begin{aligned} z_{\theta\theta} &= \frac{\partial z_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (-r z_x \sin\theta + r z_y \cos\theta) \\ &= -r \frac{\partial z_x}{\partial \theta} \sin\theta - r z_x \cos\theta + r \frac{\partial z_y}{\partial \theta} \cos\theta - r z_y \sin\theta \\ &= -r \left(\frac{\partial z_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \sin\theta + r \left(\frac{\partial z_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \cos\theta - r z_x \cos\theta - r z_y \sin\theta \\ &= -r (-r z_{xx} \sin\theta + r z_{xy} \cos\theta) \sin\theta + r (-r z_{yx} \sin\theta + r z_{yy} \cos\theta) \cos\theta \\ &\quad - r z_x \cos\theta - r z_y \sin\theta \\ &= r^2 z_{xx} \sin^2\theta - 2 r^2 z_{xy} \cos\theta \sin\theta + r^2 z_{yy} \cos^2\theta - r z_x \cos\theta - r z_y \sin\theta \end{aligned}$$

となります. したがって

$$\begin{aligned} & z_{rr} + \frac{1}{r} z_r + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta} \\ &= z_{xx} \cos^2\theta + 2 z_{xy} \cos\theta \sin\theta + z_{yy} \sin^2\theta + \frac{1}{r} (z_x \cos\theta + z_y \sin\theta) \\ &\quad + z_{xx} \sin^2\theta - 2 z_{xy} \cos\theta \sin\theta + z_{yy} \cos^2\theta - \frac{1}{r} z_x \cos\theta - \frac{1}{r} z_y \sin\theta \\ &= z_{xx} + z_{yy} \end{aligned}$$

が成り立ちます.

C44. (連鎖公式) $f(x,y,z)$ は x, y, z についての C^1 級関数とし，$x=x(y,z)$ は y, z についての C^1 級関数とする.

(1) $g(y,z)=f(x(y,z),y,z)$ とするとき $\dfrac{\partial}{\partial y}g(y,z)$ 及び $\dfrac{\partial}{\partial z}g(y,z)$ を計算せよ.

(2) さらに $y=y(z)$ は z の C^1 級関数とする．$h(z)=f(x(y(z),z),y(z),z)$ とするとき $\dfrac{d}{dz}h(z)$ を計算せよ.

---

(1) $x=x(y,z)$ は y の関数と見ているので $f(x,y,z)$ のうち x と y の部分について偏微分することになります．したがって

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}g(y,z)&=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z)\\&=f_x(x(y,z),y,z)x_y(y,z)+f_y(x(y,z),y,z)\end{aligned}$$

となります．同様に z での偏微分は $f(x,y,z)$ の $x=x(y,z)$ と z について行われ

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}g(y,z)&=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z)\\&=f_x(x(y,z),y,z)x_z(y,z)+f_z(x(y,z),y,z)\end{aligned}$$

となります.

(2) $x=x(y,z)$ は y, z の関数であり，$y=y(z)$ は z の関数なので (1) より

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{\partial x}{\partial y}\frac{dy}{dz}+\frac{\partial x}{\partial z}$$

となります．したがって

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}h(z)&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dz}+\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\frac{dy}{dz}+\frac{\partial x}{\partial z}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dz}+\frac{\partial f}{\partial z}\\&=f_x(x,y,z)(x_y(y,z)y'(z)+x_z(y,z))+f_y(x,y,z)y'(z)+f_z(x,y,z)\end{aligned}$$

となります.

補足説明.

連鎖公式.

$z=f(x,y)$ を C^1 級とし，$x=x(t), y=y(t)$ も C^1 級とします．これらの合成によって

$$z=f(x,y)=f(x(t),y(t))$$

は t についての 1 変数関数となりますから z を t で微分することができます．このとき z の t についての導関数は

(10.1)
$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}=f_x(x,y)x'(t)+f_y(x,y)y'(t)=Df(x,y)\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}$$

となります (例えば $f(x,y)=x^2+y^3$ として確かめてみましょう).

x,y がそれぞれ u,v C^1 級の関数のとき $z=f(x(u,v),y(u,v))$ は u,v についての 2 変数関数となります．このとき z は u,v での偏導関数が考えられて，それぞれ

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}&=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=f_x(x,y)x_u(u,v)+f_y(u,v)y_u(u,v),\\ \frac{\partial z}{\partial v}&=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=f_x(x,y)x_v(u,v)+f_y(u,v)y_v(u,v)\end{aligned}$$

となります．偏微分は，その他の変数を定数と見て微分することですから (10.1) から導くことができます．これは行列を用いて

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix} \tag{10.2}$$

と表されます.

また「偏微分するという写像」$\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ について表すと

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}&=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial y},\\ \frac{\partial z}{\partial v}&=\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial y}\end{aligned}$$

より

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u}\\ \dfrac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}z=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}z=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}z$$

と表され,

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial u}\\ \dfrac{\partial}{\partial v}\end{pmatrix}z=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}$$

となります．したがって

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \neq 0$$

のとき

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} \\ \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}$$

となります．よって z に作用させて

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} \\ \dfrac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

となります．この式を用いて $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$ を $\dfrac{\partial}{\partial u}, \dfrac{\partial}{\partial v}$ を用いて表すことができます．