令和 2 年度 第 1Q–第 2Q
解析学概論第一・第二
講義ノート

隠居 良行
（東京工業大学 理学院 数学系）

目 次

第1章　実数と連続性

1.1　実数

この節では有理数の加減乗除と大小を既知として，Dedekind による実数の定義を述べる．その背景にはどのようにすれば連続性を数学的に厳密に取り扱うことができるかという問いがある．

記号

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{n : n \text{ は自然数}\} = \{1, 2, 3, \cdots\}, \\ \mathbb{Z} &= \{n : n \text{ は整数}\}, \\ \mathbb{Q} &= \{r : r \text{ は有理数}\} = \{r = \tfrac{q}{p} : q \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

(a) 実数の定義

有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は加減乗除の演算に関して体をなしているので，$\mathbb{Q}$ を有理数体とよぶ．また，有理数には大小の関係があり，以下のことが成り立つ．

1. 大小関係：$\mathbb{Q}$ の 2 つの元に対して大小関係 $<, >$ が定義されていて，$a, b, c \in \mathbb{Q}$ とするとき，

$$a < b,\ b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$$

が成り立つ．

2. 有理数の稠密性：$\mathbb{Q}$ においては次のような有理数の稠密性が成り立つ．

> $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a < b,$ に対して $a < c < b$ をみたす有理数 $c \in \mathbb{Q}$ が無数に存在する．

たとえば，$c = \frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{c+b}{2}, \cdots,$ と与えると，これらの有理数を r とすると，r は $a < r < b$ をみたし，このような r は与えられ方から無数にあることがわかる．

上記のような有理数の性質に類似のことは数直線上においても見ることができる．有理数の稠密性によって，有理数に対応する直線上の点（有理点）は密に分布している．しかしながら，直線はどの有理数にも対応しない点を無数に含んでいる．隙間が無数にあるのである．つまり，有理数だけでは連続性を表すことができない．このことは，数の体系の拡張の必要性を示唆している．有理点の間の隙間は無理数に対応していることは容易に想像できるであろう．問題はその隙間にどのように無理数を対応させるかである．

いま無理数 α （を知っているとして）が与えられたとすれば，

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} = A \cup A', \quad A \cap A' = \emptyset, \\ A = \{r \in \mathbb{Q} : r < \alpha\}, \\ A' = \{r \in \mathbb{Q} : r > \alpha\} \end{aligned}$$

のように有理数の全体 $\mathbb{Q}$ は A と A' により分割される．このとき，

$$r \in A, \quad s \in A' \quad \Rightarrow \quad r < s \tag{1.1.1}$$

が成り立つ．A, A' の定義より

$$r \in A, \quad s \in A' \quad \Rightarrow \quad r < \alpha < s \tag{1.1.2}$$

を得る．つまり，α は A と A' を分ける境目となっている．

$\mathbb{Q}$ の稠密性により，α は A と A' とによって (1.1.2) をみたすただ 1 つの実数として一意的に定まる．実際，(1.1.2) をみたす α 以外の実数 β が存在したとする．たとえば，$\beta > \alpha$ とすると，$\alpha < t < \beta$ をみたす $t \in \mathbb{Q}$ が存在する．(1.1.2) より $t \notin A, t \notin A'$ となるが，これは $A \cup A' = \mathbb{Q}$ に反する．$\beta < \alpha$ の場合も同様に矛盾が生じる．

無理数 α が 1 つ与えられれば，α は条件 (1.1.1) をみたす A, A' によって $\mathbb{Q}$ を分割する．逆に α は A と A' によってその境目として一意に定まる．そこで，実数を定義するのに，$\mathbb{Q}$ を条件 (1.1.1) をみたす A と A' によって分割し，その境目として実数を定義すればよいであろう．Dedekind は長い間考えた末に，この「逆」に連続性の本質があるという結論に到達した．

定義 1.1.1 **（有理数の切断）**有理数体 $\mathbb{Q}$ を次の 3 つの条件をみたすように空集合でない 2 つの部分集合 A と A' とに分割したとき，A と A' の組を<u>有理数の切断</u>といい，(A, A') で表す．

(i) $\mathbb{Q} = A \cup A', \quad A \cap A' = \emptyset,$

(ii) $r \in A,\, s \in A' \Rightarrow r < s$,

(iii) A に属する最大の有理数はない．
（つまり，$\forall r \in A,\, \exists t \in A$ s.t. $r < t$.）

注意 1.1.2 有理数の切断 (A, A') において，$A' = \mathbb{Q} \setminus A$ であるから，有理数の切断 (A, A') は A によって一意的に定まる．

「$s \in A' \Rightarrow r < s$」の対偶は「$s \leq r \Rightarrow s \in A$」であるから，有理数の切断の条件 (ii) は A だけで決まる次の条件 (iv) と同値である．

(iv) $r \in A$ のとき，$s \leq r,\, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow s \in A.$

同様に，条件 (ii) は A' だけに関する条件 (iv)$'$ と同値である．

(iv)$'$ $r \in A'$ のとき，$s \geq r,\, s \in \mathbb{Q} \Rightarrow s \in A'.$

定義 1.1.3 有理数の切断を<u>実数</u>とよぶ．

記号 実数 (A, A') を α で表したとき，$\alpha = (A, A')$ と書く．

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と表すことにする．

$$\mathbb{R} = \{\alpha : \alpha \text{ は実数 }\}.$$

2 つの実数 $\alpha = (A, A'),\, \beta = (B, B')$ に対して，α と β が等しい $(\alpha = \beta)$ とは，A と B が同じ集合であることを意味する．

有理数の切断 (A, A') について，次の 2 つの場合のどちらかが起こる．

(I) A' に属する最小の有理数がある．

(II) A' に属する最小の有理数はない．

まず，(I) の場合を考える．有理数の切断 (A, A') が (I) をみたすとき，$a = \min A'$ とすれば，

$$A = \{r \in \mathbb{Q} : r < a\}, \quad A' = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq a\}. \tag{1.1.3}$$

このとき，実数 (A, A') は<u>有理数 a に等しい</u>といい，

$$(A, A') = a$$

と書く．有理数 a が任意に与えられたとき，(1.1.3) によって有理数の切断 (A, A') を定義すれば，実数 (A, A') は a に等しい．このとき，実数 (A, A') と有理数 a とを同じものと見なす．したがって，有理数はすべて実数である．

実数 (A, A') は有理数の無限集合 A と A' の組であって，1 個の有理数とはその概念が異なることに注意しておく．

次に (II) の場合を考えよう．有理数の切断 (A, A') が (II) をみたすときには，実数 $\alpha = (A, A')$ はどの有理数とも異なる．このとき，$\alpha = (A, A')$ を <u>無理数</u> という．

問 1.1.4 $A = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : r > 0, r^2 < 2\}$, $A' = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0, r^2 > 2\}$ は，(II) をみたす有理数の切断 (A, A') であることを示せ．

(b) 実数の大小

定義 1.1.5 （実数の大小）$\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ を 2 つの実数とする．$A \subsetneq B$ のとき，α は β より小さい，また，β は α より大きいという．このとき，$\alpha < \beta$, $\beta > \alpha$ と書く．

注意 1.1.6 $\alpha = a$, $\beta = b$ がともに有理数であるとする．このとき，

$$A = \{r \in \mathbb{Q} : r < a\}, \quad B = \{r \in \mathbb{Q} : r < b\}$$

であるから，

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad A \subsetneq B$$

であり，α, β の大小は，a, b の大小と一致する．

定理 1.1.7 α, β を 2 つの実数 とする．このとき，次の 3 つの関係のうち 1 つ，かつただ 1 つだけ成り立つ．

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \alpha < \beta, \\ &\text{(ii)} \quad \alpha = \beta, \\ &\text{(iii)} \quad \alpha > \beta. \end{aligned}$$

証明 $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ とする．上の条件 (i), (ii), (iii) を言い換えると，(i) $\Leftrightarrow A \subsetneq B$, (ii) $\Leftrightarrow A = B$, (iii) $\Leftrightarrow A \supsetneq B$ である．$A \subsetneq B$, $A = B$, $A \supsetneq B$ のどの 2 つも同時に成り立つことはない．したがって，どれか 1 つが成り立つことを示せばよい．

$A \subset B$ または $B \subset A$ が成り立つことを示せばよい．背理法による．$A \subset B$ も $B \subset A$ も成り立たないと仮定する．このとき，

$$\exists a, b \in \mathbb{Q}.\ \text{s.t. } a \in A,\ a \notin B,\ b \in B,\ b \notin A$$

が成り立つ．$a \notin B$ より $a \in B'$ だから，$b < a$. 同様にして，$a > b$ を得る．これは矛盾である． $\square$

定理 1.1.8 α, β, γ を実数とする．このとき次が成り立つ．

$$\alpha < \beta,\ \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma.$$

証明 $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$, $\gamma = (C, C')$ とすると，$A \subsetneq B$, $B \subsetneq C$ であるから，$A \subsetneq C$ が成り立つ．よって，$\alpha < \gamma$ を得る． $\square$

上のように定めた大小関係 $\leq$ に対して，実数 $\alpha = (A, A')$ の特徴づけを与えよう．次の定理は実数 $\alpha = (A, A')$ が A と A' の境目となっていることを示している．

定理 1.1.9 任意の実数 $\alpha = (A, A')$ に対して

$$A = \{r \in \mathbb{Q} : r < \alpha\}, \quad A' = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq \alpha\}.$$

証明 $r \in \mathbb{Q}$ を実数と考えて，次のように有理数の切断

$$r = (R, R'), \quad R = \{s \in \mathbb{Q} : s < r\}, \quad R' = \{s \in \mathbb{Q} : s \geq r\}$$

で表す．

$r < \alpha$ ならば $R \subsetneq A$ である．したがって，$r \in A$ が成り立つ．逆に，$r \in A$ のとき，有理数の切断の条件 (iv) より，$s < r$, $s \in \mathbb{Q} \Rightarrow s \in A$ であるから，$R \subset A$. ところが，$r \notin R$ だから $R \neq A$. ゆえに $R \subsetneq A$, したがって，$r < \alpha$ を得る．

$r \geq \alpha$ ならば $R \supset A$ である．したがって，任意の $s \in A$ に対して，$r \geq s$ であるが，$r \notin R$ ゆえ，$r \notin A$，すなわち，$r \in A'$ が成り立つ．逆に，$r \in A'$ のとき，有理数の切断の条件 (iv)$'$ より， $s \geq r$, $s \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$s \in A'$ であるから，$R' \subset A'$. よって，$R = \mathbb{Q} \setminus R' \supset \mathbb{Q} \setminus A' = A$. ゆえに $r \geq \alpha$ が成り立つ. $\square$

次の定理は $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ において稠密であることを示している.

定理 1.1.10 α, β を実数とする. $\alpha < \beta$ ならば，$\alpha < r < \beta$ をみたす $r \in \mathbb{Q}$ が無数に存在する.

証明 $\alpha = (A, A')$, $\beta = (B, B')$ とする. このとき，$\alpha < \beta$ だから，$A \subsetneq B$ が成り立つ. したがって，$b \notin A, b \in B$ をみたす $b \in \mathbb{Q}$ が存在する. $b \in A'$ だから，定理 1.1.9 より $\alpha \leq b$ を得る.

有理数の切断の条件 (iii) より B に属する最大の有理数はないから，$\exists r \in \mathbb{Q}$ s.t. $b < r, r \in B$ がなりたち，しかもこのような有理数 r は無数に存在する. さらに，定理 1.1.9 より，$r \in B \Leftrightarrow r < \beta$ であるから，$\alpha \leq b < r < \beta$ を得る. $\square$

次の定理は実数は有理数で近似できることを意味する.

定理 1.1.11 $m \in \mathbb{N}$ とする. このとき，任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，

$$a < \alpha \leq a + \frac{1}{m}$$

をみたすような $a \in \mathbb{Q}$ が存在する.

証明 $\alpha = (A, A')$ とする. $r_0 \in A$ を任意に 1 つとる. $n \in \mathbb{N}$ に対して，$r_n = r_0 + \frac{n}{m}$ とおく.

$s \in A'$ とすると，$n > m(s - r_0)$ のとき，$\frac{n}{m} > s - r_0$ であるから，

$$r_n = r_0 + \frac{n}{m} > s.$$

したがって，$r_n \in A'$ であるから，

$$\exists k \in \mathbb{N} \text{ s.t. } r_{k-1} \in A, r_k \in A'.$$

$a = r_{k-1}$ とおくと，$r_k = a + \frac{1}{m}$ であり，$a = r_{k-1} < \alpha \leq r_k = a + \frac{1}{m}$ を得る. $\square$

(c) 実数の連続性

定義 1.1.12 **（実数の切断）**実数の全体 $\mathbb{R}$ を次の (i), (ii) をみたす 2 つの空でない部分集合 A と A' とに分割したとき，A と A' の組 (A, A') を実数の切断という．

$$\text{(i)} \quad \mathbb{R} = A \cup A',\ A \cap A' = \emptyset\ ,$$
$$\text{(ii)} \quad \rho \in A,\ \sigma \in A' \Rightarrow \rho < \sigma\ .$$

注意 1.1.13 (A, A') を実数の切断とする．次が成り立つ．

$$\rho \in A \Rightarrow \text{任意の } \tau < \rho \text{ に対して } \tau \in A,$$
$$\sigma \in A' \Rightarrow \text{任意の } \tau > \sigma \text{ に対して } \tau \in A'.$$

次の定理は実数の連続性を示している．

定理 1.1.14 **（実数の連続性）** (A, A') を実数の切断とすると，A に属する最大の実数が存在するか，または A' に属する最小の実数がする．

注意 1.1.15 定理 1.1.14 は実数の連続性を意味している．実数の切断 (A, A') に対して，

「$\rho \in A,\ \sigma \in A' \Rightarrow \rho \leq \alpha \leq \sigma$」 をみたす実数 α が存在する．

有理数の切断に対して，このことは必ずしも成立しない．この点に有理数の集合と実数の集合の決定的な違いがある．有理数の集合は数直線上に密に詰まっているが，隙間だらけで至るところつながっていない．一方で，数直線は実数の集合で隙間なく埋められていると考えてもよいであろう．

しかし，切断によって定められた「実数」はすでに直線というものから離れた多分に概念的なものであることに注意しよう．(もちろん直線という実体があればあるが.) したがって，たとえ直線が不連続であったとしても，実数は連続的につながっているのである．なお，実数を定義する方法は「切断」以外にもあることを注意しておく．たとえば，後に述べる Cauchy 列（基本列ともいう）を用いた「有理数の完備化」による方法などが知られている．

定理 1.1.14 の証明 $\tilde{A} = A \cap \mathbb{Q}$, $\tilde{A}' = A' \cap \mathbb{Q}$ とおく．もし，$\tilde{A}$ に属する最大の有理数 a が存在するならば，a は A に属する最大の実数である．実際，$\exists \rho \in A$ s.t. $a < \rho$ とすると，定理 1.1.10 より，$\exists r \in \mathbb{Q}$ s.t.

$a < r < \rho$ が成り立つ．$r \in A$ であるから，$r \in \tilde{A}$. これは a が $\tilde{A}$ の最大数であることに反する．したがって，$\tilde{A}$ に属する最大の有理数 a が存在すれば，a は A に属する最大の実数である．

そこで，$\tilde{A}$ に属する最大の有理数はないと仮定しよう．このとき $(\tilde{A}, \tilde{A}')$ は有理数の切断であり，$\alpha = (\tilde{A}, \tilde{A}')$ は実数である．したがって，$\alpha \in A$ であるか，または $\alpha \in A'$ である．

次に，

$$\alpha \in A \Rightarrow \alpha \text{ は } A \text{ の最大数である}$$

ことを示そう．

背理法による．$\exists \rho \in A$ s.t. $\alpha < \rho$ と仮定すると，定理 1.1.10 より，$\exists r \in \mathbb{Q}$ s.t. $\alpha < r < \rho$ が成り立つ．このとき $r \in A$ であるから，$r \in \tilde{A}$ である．一方，定理 1.1.9 より，$r \in \tilde{A}'$ が成り立つ．したがって，$r \in \tilde{A} \cap \tilde{A}'$ であるが，これは矛盾である．したがって，α は A の最大数である．

同様にして，

$$\alpha \in A' \Rightarrow \alpha \text{ は } A' \text{ の最小数である}$$

ことがわかる．　□

(d) 上限，下限

定義 1.1.16 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $m \in \mathbb{R}$ とする．

(i) 任意の $a \in A$ に対して $a \leq m$ が成り立つとき，m を集合 A の<u>上界</u>とよぶ．

(ii) 任意の $a \in A$ に対して $m \leq a$ が成り立つとき，m を集合 A の<u>下界</u>とよぶ．

(iii) 集合 A が上界をもつとき，A は<u>上に有界</u>であるという．

(iv) 集合 A が下界をもつとき，A は<u>下に有界</u>であるという．

(v) 集合 A が上にも下にも有界であるとき，A は<u>有界</u>であるという．

記号 集合 A の上界の全体を $U(A)$ とかき，下界の全体を $L(A)$ と書く．

次が成り立つことは容易に確かめることができる．

(i) $b \in U(A), b \leq c \;\Rightarrow\; c \in U(A)$.

(ii) $b \in L(A), c \leq b \;\Rightarrow\; c \in L(A)$.

定理 1.1.17 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とし，$U(A) \neq \emptyset$ とする．このとき，次の (i), (ii) が成り立つ．

(i)　$(U(A)^{\mathrm{c}}, U(A))$ は実数の切断である．

(ii)　$U(A)$ に属する最小の実数が存在する．

ここで，$U(A)^{\mathrm{c}}$ は $U(A)$ の $\mathbb{R}$ における補集合 $U(A)^{\mathrm{c}} = \mathbb{R} \setminus U(A)$ である．

証明 (i) $\mathbb{R} = U(A)^{\mathrm{c}} \cup U(A)$, $U(A)^{\mathrm{c}} \cap U(A) = \emptyset$ が成り立つのは明らかである．

$\alpha \in U(A)^{\mathrm{c}}$, $\beta \in U(A)$ とする．$\alpha < \beta$ を示せば，(i) が成り立つことがわかる．

$\beta \in U(A)$ より，任意の $a \in A$ に対して，$a \leq \beta$ が成り立つ．一方，$\alpha \in U(A)^{\mathrm{c}}$ より，$\exists\, a_0 \in A$ s.t. $\alpha < a_0$ が成り立つ．

以上より，$\alpha < a_0 \leq \beta$, つまり $\alpha < \beta$ が成り立つ，よって，$(U(A)^{\mathrm{c}}, U(A))$ は実数の切断である．

(ii) $(U(A)^{\mathrm{c}}, U(A))$ は実数の切断であるから，実数の連続性（定理 1.1.14）より $U(A)^{\mathrm{c}}$ に属する最大の実数が存在するか，$U(A)$ に属する最小の実数が存在する．

$U(A)^{\mathrm{c}}$ に属する最大の実数は存在しないことを示そう．もし，そのような実数 α_0 が存在したとすると，$\alpha_0 \in U(A)^{\mathrm{c}}$ であるから，

$$\exists\, a_0 \in A \text{ s.t. } \alpha_0 < a_0 \ .$$

このとき，

$$\exists\, \beta_0 \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \alpha_0 < \beta_0 < a_0.$$

$\beta_0 < a_0$ だから，β_0 は A の上界ではない．したがって，$\beta_0 \in U(A)^{\mathrm{c}}$. これは α_0 が $U(A)^{\mathrm{c}}$ の最大数であることに反する．よって，$U(A)^{\mathrm{c}}$ に属する最大の実数は存在しない．定理 1.1.14 より $U(A)$ に属する最小の実数が存在することになり，(ii) を得る．　□

注意 1.1.18 下界についても以下のように，定理 1.1.17 と同様のことが成立する．

$A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とし，$L(A) \neq \emptyset$ とする．このとき，次の (i), (ii) が成り立つ．

(i)　$(L(A), L(A)^{\mathrm{c}})$ は実数の切断である．

(ii)　$L(A)$ に属する最大の実数が存在する．

定義 1.1.19 $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ とする．

(i) $U(A) \neq \emptyset$ のとき，A の最小の上界を A の<u>上限</u>という．A の上限を

$$\sup A, \quad \sup_{a \in A} a$$

などと表す．

(ii) $L(A) \neq \emptyset$ のとき，A の最大の下界を A の<u>下限</u>という．A の下限を

$$\inf A, \quad \inf_{a \in A} a$$

などと表す．

(iii) A が上に有界でないとき，$\sup A = +\infty$ と書く．

(iv) A が下に有界でないとき，$\inf A = -\infty$ と書く．

上限という概念を用いると定理 1.1.17 は次のように言い換えることができる．

定理 1.1.20 （Weierstrass の定理） $\mathbb{R}$ の空でない部分集合 A が上に有界ならば，A の上限が存在する．

問 1.1.21 (i) 定理 1.1.14（実数の連続性）を用いないで定理 1.1.20（Weierstrass の定理）を証明せよ．

(ii) 定理 1.1.14（実数の連続性） と定理 1.1.20（Weierstrass の定理）は同値であることを示せ．

次に上限の特徴づけを与えておく．

定理 1.1.22 $U(A) \neq \emptyset$ とする．このとき，$\alpha = \sup A$ であるための必要十分条件は，次の (i) および (ii) が成り立つことである．

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \text{任意の } a \in A \text{ に対して } a \leq \alpha, \\ \text{(ii)} \quad c < \alpha \Rightarrow \exists a \in A \text{ s.t. } c < a. \end{cases}$$

注意 1.1.23 下限についても定理 1.1.22 と同様のことが成り立つ．

$L(A) \neq \emptyset$ とする．このとき，$\beta = \inf A$ であるための必要十分条件は，次の (i) および (ii) が成り立つことである．

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \text{任意の } a \in A \text{ に対して } \beta \leq a, \\ \text{(ii)} \quad \beta < c \Rightarrow \exists a \in A \text{ s.t. } a < c. \end{cases}$$

注意 1.1.24 この節では実数を「切断」によって定義した（定義 1.1.3）．このように導入された実数には，まだ「四則演算」が定義されていない．もちろん，切断によって定まる実数に対して「四則演算」はきちんと定義され，$\mathbb{R}$ は体をなし，実数体 $\mathbb{R}$ を得ることができる．この講義では，時間の関係で，四則演算の定義については触れない．本節末尾の参考文献を参照してほしい．

注意 1.1.25 加法（減法）を用いると定理 1.1.22 は次のように述べることができる．

$U(A) \neq \emptyset$ とする．このとき，$\alpha = \sup A$ であるための必要十分条件は，次の (i) および (ii) が成り立つことである．

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \text{任意の } a \in A \text{ に対して } a \leq \alpha, \\ \text{(ii)} \quad \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists a \in A \text{ s.t. } \alpha - \varepsilon < a. \end{cases}$$

また，下限については以下のように述べることができる．

$L(A) \neq \emptyset$ とする．このとき，$\beta = \inf A$ であるための必要十分条件は，次の (i) および (ii) が成り立つことである．

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad \text{任意の } a \in A \text{ に対して } \beta \leq a, \\ \text{(ii)} \quad \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists a \in A \text{ s.t. } a < \beta + \varepsilon. \end{cases}$$

問 1.1.26 $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$ とし，$-A$, $A+B$, AB を，それぞれ，次のように定める．

$$\begin{aligned} -A &= \{-a : a \in A\}, \\ A + B &= \{a + b : a \in A,\, b \in B\}, \\ AB &= \{ab : a \in A,\, b \in B\}. \end{aligned}$$

(i) A が下に有界ならば，$\inf A = -\sup(-A)$ であることを示せ．

(ii) A, B ともに上に有界ならば，$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ が成り立つことを示せ．また，この inf 版を述べて，それを証明せよ．

(iii) $A, B \subset \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ であり，ともに上に有界であるとする．このとき，$\sup(AB) = \sup A \sup B$ が成り立つことを示せ．また，この inf 版を述べて，それを証明せよ．

問 1.1.27 $\alpha = \sqrt{2}$ を循環しない無限小数

$$\alpha = \sqrt{2} = 1.414\cdots\cdots = 1.\,p_1 p_2 p_3 \cdots\cdots$$

と表すと，$\alpha < 1 + 1 = 2$ である．有理数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = 1.\,p_1 p_2 \cdots p_n$$

により定めると，$\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であり，$a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$ となるであろう．この”実数” $\alpha = \sqrt{2}$ を有理数の切断 (A, A') で表すとき，A, A' を $\{a_n\}$ を用いて表せ．

参考文献： 本節の内容については次の文献を参考にした．

1. 解析概論 （改訂第 3 版），高木貞二 著，岩波書店，1983

2. 解析入門 I，小平邦彦 著，岩波書店，2003

3. Stetigkeit und irrationale Zahlen, Richard Dedekind, 6te unvernderte Aufl. Friedr. Vieweg & Sohn. Braunschweig, 1960

4. Dedekind, Essays on the Theory of Numbers, translated by W. W. Beman, Dover Books on Mathematics, 1963 （3. の英訳）

また，Dedekind の原著 3. の和訳として，

6. 数について―連続性と数の本質 (岩波文庫 青 924)，デーデキント 著，河野伊三郎 翻訳，1961

7. 数とは何かそして何であるべきか（ちくま学芸文庫)，リヒャルト・デデキント 著，渕野 昌 翻訳，2013

がある．(新型コロナ感染症蔓延による緊急事態宣言発出で本学図書館が閉鎖されたため，筆者は和訳には目を通すことができなかった．)

1.2 実数列の収束

定義 1.2.1 自然数の集合 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像を（実）数列という．この写像による $n \in \mathbb{N}$ の像を a_n とかき，数列を

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n\}$$

などと表す．a_n をこの数列の第 n 項という．

次に数列 $\{a_n\}$ の極限が a であることの定義を与える．まず，$a \in \mathbb{R}$ の「 ε 近傍」というものを導入しておく．

定義 1.2.2 $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ とする．集合

$$\begin{aligned} U(a,\varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} \end{aligned}$$

を a の ε 近傍という．

定義から ε が小さくなると，ε 近傍 $U(a,\varepsilon)$ も小さくなることがわかる．

数列 $\{a_n\}$ の極限が a であるとは，n を限りなく大きくするとき，a_n が a にいくらでも近づくことだから，n を限りなく大きくするとき，a_n がいくらでも小さい a の ε 近傍 $U(a,\varepsilon)$ に入ることである．

定義 1.2.3 数列 $\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のとき，$a \in \mathbb{R}$ に収束するとは，

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して，有限個を除くすべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対し } a_n \in U(a,\varepsilon)$$

となることをいう．言い換えると，

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \ \forall n \geq N \text{ に対して } a_n \in U(a,\varepsilon)$$
$$\text{（つまり，} |a_n - a| < \varepsilon\text{）}$$

が成り立つことである．

このとき，$a \in \mathbb{R}$ を数列 $\{a_n\}$ の極限であるといい，

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{ または } a_n \to a \ (n \to \infty)$$

と書く．

数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき，$\{a_n\}$ は発散するという．

注意 1.2.4 上の定義の中の「 $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\cdots$ 」に現れる自然数 N は一般に ε に応じて決まる．ε に応じて決まることを強調するとき，N を N_ε あるいは $N(\varepsilon)$ などと書く．

命題 1.2.5 数列 $\{a_n\}$ が収束するとすれば，その極限はただ *1* つである．

証明 $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ がともに $\{a_n\}$ の極限であるとする．$\varepsilon > 0$ を $2\varepsilon < |a - b|$ となるようにとる．このとき，

$$\begin{aligned} \exists N_1, N_2 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \ & n \geq N_1 \text{ ならば } |a_n - a| < \varepsilon\ , \\ & n \geq N_2 \text{ ならば } |a_n - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つ． $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ をみたす n に対して

$$2\varepsilon < |a - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となり，矛盾が生じる． □

数列の有界性の定義を与えておく．

定義 1.2.6 数列 $\{a_n\}$ が上に有界であるとは，

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ s.t. すべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } a_n \leq M \text{ が成り立つ}$$

ことである．同様に，数列 $\{a_n\}$ が下に有界であるとは，

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ s.t. すべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } M \leq a_n \text{ が成り立つ}$$

ことである．

数列 $\{a_n\}$ が上にも下にも有界であるとき，$\{a_n\}$ は有界であるという．すなわち，$\{a_n\}$ が有界であるとは，

$$\exists M > 0 \text{ s.t. すべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } |a_n| \leq M \text{ が成り立つ}$$

ことである．

命題 1.2.7 収束する数列は有界である．

証明 $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ とする．収束の定義より ($1 > 0$ に対して),

$$\begin{aligned} \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \ & \Rightarrow\ |a_n - a| < 1 \\ & \Rightarrow\ |a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \end{aligned}$$

を得る．そこで，$M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_N|, 1 + |a|\}$ ととれば，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $|a_n| \leq M$ が成り立つ．つまり，$\{a_n\}$ は有界である． □

定理 1.2.8 $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$ が存在するとする．このとき，次が成り立つ．

(i) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$,

(iii) さらに $b \neq 0$ とすると，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

証明 (i) $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \tfrac{\varepsilon}{2},\ |b_n - b| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．このとき，$n \geq N$ ならば,

$$|a_n \pm b_n - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) 命題 1.2.7 より

$$\exists M > 0 \text{ s.t. すべての } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } |a_n| \leq M,\ |b_n| \leq M$$

が成り立つ．また,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \begin{aligned} &|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)}, \\ &|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，$n \geq N$ ならば,

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| \\ &\leq M|b_n - b| + |b||a_n - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(iii) (ii) より $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$ を示せばよい．$b_n \to b\ (n \to \infty)$ より，（$|b|/2 > 0$ に対して）

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

が成り立つ．したがって，

$$n \geq N_1 \ \Rightarrow \ |b_n| \geq |b| - |b - b_n| \geq |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

一方，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon.$$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると，

$$n \geq N \ \Rightarrow \ \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|} < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

□

次に極限と大小の関係を考えよう．

定理 1.2.9 $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b$ であり，$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_n \leq b_n$$

が成り立つならば，

$$a \leq b$$

が成り立つ．

証明 背理法で示そう．$a > b$ とする．$\varepsilon > 0$ を $\varepsilon < \frac{a-b}{2}$ となるようにとると，$b + \varepsilon < a - \varepsilon$ である．また，

$$\begin{aligned}\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \ &\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon \\ &\Rightarrow a - \varepsilon < a_n, b_n < b + \varepsilon\end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$n \geq N \ \Rightarrow \ b_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < a_n.$$

これは仮定に反する． □

注意 1.2.10 $\forall n$ に対して $a_n < b_n$ であったとしても，$a < b$ とは限らない．

問 1.2.11 上の注意の例を与えよ．

答 たとえば，$a_n = 0, b_n = 1/n$ とすると， $\forall n$ に対して，$a_n < b_n$ であるが， $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$

次の定理は「はさみうちの原理」として知られる．

定理 1.2.12 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ であり，$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \leq b_n$ が成り立つとする．さらに，$\{c_n\}$ が$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

をみたすならば，$\{c_n\}$ は収束し， $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ である．

証明 仮定より

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon, |b_n - a| < \varepsilon.$$

したがって，

$$\begin{aligned} n \geq N \ &\Rightarrow a - \varepsilon \leq a_n \leq c_n \leq b_n \leq a + \varepsilon \\ &\Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon \end{aligned}$$

を得る． □

定義 1.2.13 数列 $\{a_n\}$ が

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } a_n \leq a_{n+1}$$

をみたすとき，$\{a_n\}$ は <u>単調増加数列</u>であるといい，

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } a_n \geq a_{n+1}$$

をみたすとき，$\{a_n\}$ は <u>単調減少数列</u>であるという．

また，$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n < a_{n+1}$ が成り立つとき，$\{a_n\}$ は<u>狭義単調増加数列</u>であるという．<u>狭義単調減少数列</u>も同様に定義される．

定理 1.2.14 上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}$ は収束し，その極限は $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ に等しい，つまり，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

が成り立つ．また，下に有界な単調減少数列 $\{a_n\}$ は収束し，その極限は $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ に等しい，つまり，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

が成り立つ．

証明 $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ とおくと，$A \neq \emptyset$ であり，A は上に有界である．よって，定理 1.1.17 より $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$ が存在する．このとき，

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } a_n \leq \alpha$$

が成り立つ．一方，上限の性質（定理 1.1.22 あるいは注意 1.1.25）より，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_N \text{ s.t. } \alpha - \varepsilon < a_N.$$

$\{a_n\}$ は単調増加数列だから，$n \geq N$ に対して $a_n \geq a_N$. ゆえに，

$$n \geq N \Rightarrow \alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha.$$

したがって，$\{a_n\}$ は収束し，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つ．単調減少数列の場合も同様に証明できる．$\square$

定義 1.2.15 数列 $\{a_n\}$ が

$$\forall M > 0 \text{ に対して } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow a_n \geq M$$

をみたすとき，$\{a_n\}$ は <u>$+\infty$ に発散</u>するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ または } a_n \to +\infty\ (n \to \infty)$$

と表す．また，

$$\forall M > 0 \text{ に対して } \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow a_n \leq -M$$

が成り立つとき，$\{a_n\}$ は <u>$-\infty$ に発散</u>するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ または } a_n \to -\infty\ (n \to \infty)$$

と表す．

次に部分列について考える．数列 $\{a_n\}$ から無数の項を取り出すことにより，新しい数列ができる．この新しい数列をもとの数列の<u>部分列</u>という．ここで注意することは無数の項を取り出すが，<u>項の順序は変えないこと</u>である．この部分列の第 k 項を $a_{n(k)}$ とすると，

$$n(1) < n(2) < n(3) < \cdots$$

である．

定義 1.2.16 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ が任意の k に対して $n(k) \in \mathbb{N}$ である狭義単調増加数列（つまり，$n(k) < n(k+1)$）のとき，数列 $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列という．

注意 1.2.17 次のことが成り立つ．

(i) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $k \leq n(k)$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n(k)} = a$.
（逆は必ずしも成り立たない．例をつくれ.）

定理 1.2.14 から Archimedes の性質を導いてみよう．

定理 1.2.18 $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$ に対して $\exists n \in \mathbb{N}$ *s.t.* $na > b$.

証明 b が数列 $\{na\}_{n=1}^{\infty}$ の上界でないことを示せばよい．背理法で示そう．b が $\{na\}$ の上界であるとすると，

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } na \leq b$$

が成り立つ．一方， $na < (n+1)a$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ．したがって，$\{na\}$ は上に有界な単調増加数列である．定理 1.2.14 より

$$\lim_{n\to\infty} na = \alpha = \sup\{na : n \in \mathbb{N}\}$$

を得る．ゆえに，$\{na\}$ 部分列 $\{(n+1)a\}$ も同じ極限 α に収束する．ところが,

$$\alpha = \lim_{n\to\infty}(n+1)a = \lim_{n\to\infty}(na + a) = \alpha + a.$$

これは $a > 0$ に反する． □

次の定理は区間縮小法と呼ばれる．

定理 1.2.19 有界な閉区間の列 I_1, I_2, $\cdots$ が,

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

をみたすならば,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$$

が成り立つ．とくに，$I_n = [a_n, b_n]$, $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ならば，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$$

をみたす $a \in \mathbb{R}$ がただ *1* つ存在する．

証明 $I_n = [a_n, b_n]$ とすると，仮定より任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_n \le a_{n+1} \le b_1, \quad b_n \ge b_{n+1} \ge a_1$$

だから，$\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列，$\{b_n\}$ は下に有界な単調減少数列である．定理 1.2.14 より，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} = b$ であり，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$a_n \le a \le b \le b_n$$

が成り立つ．ここで，$a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $b = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ である．したがって，$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$ を得る．（証明せよ．）

次に $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ を仮定しよう．このとき，

$$|a - b| \le |a - a_n| + |b_n - b| + |a_n - b_n|$$

だから，$n \to \infty$ として

$$|a - b| \le \lim_{n\to\infty} |a - a_n| + \lim_{n\to\infty} |b_n - b| + \lim_{n\to\infty} |a_n - b_n| = 0$$

を得る．したがって，$a = b$ である． □

<u>**Bolzano-Weierstrass の定理**</u>を述べておこう．

定理 1.2.20 有界な数列は収束部分列をもつ．

証明 $\{a_n\}$ を有界数列とする．このとき，

$$\exists\, m, M,\ m < M \text{ s.t. 任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } m \le a_n \le M$$

が成り立つ．$I = [m, M]$ とおく． I を 2 等分して $[m, \frac{m+M}{2}]$, $[\frac{m+M}{2}, M]$ という区間を考えると，そのどちらかの区間は無数の a_n を含む．その区間を $I_1 = [m_1, M_1]$ とおく，このとき，

$$I \supset I_1, \quad M_1 - m_1 = \frac{M - m}{2}$$

が成り立つ．この操作を I_1 に対しておこない，I_2 をつくり，以下順に繰り返して，閉区間の列 $I_k = [m_k, M_k]$ $(k = 1, 2, \cdots)$ を得る．このとき，

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k \supset \cdots ,$$
$$M_k - m_k = \frac{M - m}{2^k} \to 0 \quad (k \to \infty)$$

が成り立つ．定理 1.2.19 より，

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{a\}, \quad a = \lim_{k \to \infty} m_k = \lim_{k \to \infty} M_k$$

をみたす $a \in \mathbb{R}$ が存在する．

この a に収束する $\{a_n\}$ の部分列が存在することを示そう．各 I_k は無数の番号に対する a_n を含むから，I_1 に含まれる a_n のうち最初の番号のものを $a_{n(1)}$ とする．次に I_2 に含まれる a_n のうち $n(1)$ を除いた最初の番号のものを $a_{n(2)}$ とする．以下，同じようにして，$n(1), n(2), \cdots, n(k-1)$ を除いて $a_n \in I_k$ となる $a_{n(k)}$ をとる．このとき，

$$n(1) < n(2) < \cdots < n(k) < \cdots ,$$
$$\text{任意の } k \text{ に対して } m_k \leq a_{n(k)} \leq M_k$$

であるから，$\{a_{n(k)}\}$ は $\{a_n\}$ の部分列であり，$\lim_{k \to \infty} a_{n(k)} = a$ が成り立つ． □

数列の集積点という概念を導入しておく．

定義 1.2.21 $\{a_n\}$ を数列とする．$a \in \mathbb{R}$ が<u>数列 $\{a_n\}$ の集積点</u>であるとは，a に収束する $\{a_n\}$ の部分列が存在することである．

例 1.2.22 (i) 数列 $\{a_n\}$ が収束すれば，その極限は $\{a_n\}$ の集積点であり，しかもただ 1 つの集積点である．

(ii) $a_n = (-1)^n$ のとき，-1 と 1 は $\{a_n\}$ の集積点である．

数列の集積点の概念を用いると定理 1.2.20 は

「有界な数列は集積点をもつ．」

と言い換えることができる．

注意 1.2.23 集合 $A \subset \mathbb{R}$ の集積点という概念があるが，上述の数列の集積点とは少し異なっている．下に定義を与えておこう．

定義 1.2.24 $A \subset \mathbb{R}$ とする．点 $a \in \mathbb{R}$ が A の<u>集積点</u>であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$U(a, \varepsilon) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$$

が成り立つことである．つまり，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$U(a, \varepsilon)$ が点 a 以外の A の点を少なくとも *1* つ（したがって無数に）含むことである．

次の定理が成り立つ．

定理 $\mathbb{R}$ の有界な無限部分集合は少なくとも 1 つの集積点をもつ．

1.3 上極限，下極限

定理 1.2.14 において有界な単調数列は収束することをみた．では，単調性をもたない数列はどうであろう．有界な数列はそれ自身が収束するとは限らないが，Bolzano-Weierstrass の定理（定理 1.2.20 ）により，収束部分列をもつ．この節では有界数列についてより詳しく考察しよう．

定義 1.3.1 $\{a_n\}$ を有界な数列とする．$\{a_n\}$ から数列 $\{\alpha_k\}$ を

$$\alpha_k = \sup\{a_n : n \geq k\} = \sup\{a_k, a_{k+1}, \cdots\}$$
$$(= \sup_{n\geq k} a_n \text{ とも書く.})$$

と定める．このとき，$\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots\} \supset \{a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots\}$ だから，

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k \geq \alpha_{k+1} \geq \cdots \geq \inf_{k\geq 1} a_k$$

が成り立つ．したがって，$\{\alpha_k\}$ は下に有界な単調減少数列である．定理 *1.2.14* より，

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_k$$

が存在する．α を数列 $\{a_n\}$ の<u>上極限</u>といい，

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \quad \text{または} \quad \alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

と書く．同様に数列 $\{\beta_k\}$ を

$$\beta_k = \inf\{a_n : n \geq k\} = \inf\{a_k, a_{k+1}, \cdots\}$$
$$(= \inf_{n\geq k} a_n \text{ とも書く.})$$

と定める．このとき，

$$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_k \leq \beta_{k+1} \leq \cdots \leq \sup_{k\geq 1} a_k$$

が成り立つ．したがって，$\{\beta_k\}$ は上に有界な単調増加数列である．定理 *1.2.14* より，

$$\beta = \lim_{k\to\infty} \beta_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} a_k$$

が存在する．β を数列 $\{a_n\}$ の<u>下極限</u>といい，

$$\beta = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \quad \text{または} \quad \beta = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

と書く．

注意 1.3.2 上極限，下極限の定義において，

$$\text{任意の } k \text{ に対して } \beta_k \leq a_k \leq \alpha_k$$

が成り立つ．ここで $k \to \infty$ とすると，$\beta \leq \alpha$ を得る．つまり，

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

が成り立つ．

注意 1.3.3 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ は $\{a_n\}$ の集積点のなかで最大のものであり，$\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ は最小のものである．

定理 1.3.4 $\{a_n\}$ を有界数列とする．このとき，次の (i) と (ii) は同値である．

(i) $\alpha = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ （あるいは $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ ）

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ に対して次の (a) および (b) が成り立つ．

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow a_n < \alpha + \varepsilon \quad \text{（あるいは } \beta - \varepsilon < a_n \text{ ）} \\ \text{(b)} \quad \text{無数の } n \text{ に対して } \alpha - \varepsilon < a_n \quad \text{（あるいは } a_n < \beta + \varepsilon \text{ ）} \end{cases}$$

証明 上極限の場合のみ証明を与える．下極限の場合も同様に証明することができる．

($\Rightarrow$) $\alpha_k = \sup_{n\geq k} a_n$ とおく．$\alpha = \lim_{k\to\infty} \alpha_k$ だから，

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \ &\Rightarrow \alpha - \varepsilon < \alpha_n < \alpha + \varepsilon \\ &\Rightarrow a_n < \alpha + \varepsilon. \end{aligned}$$

一方，$\alpha_k = \sup_{n\geq k} a_n$ だから，上限の性質（定理 1.1.22 あるいは注意 1.1.25）より，

$$\text{各 } k \in \mathbb{N} \text{ に対して } \exists n_k \geq k \text{ s.t. } \alpha_k - \varepsilon < a_{n_k}$$

が成り立つ．任意の k に対して $\alpha \leq \alpha_k$ だから，

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_k}, \quad n_k \geq k$$

が成り立つ． k は任意だから，$\alpha-\varepsilon<a_n$ をみたす n は無数に存在する．したがって，(a) および (b) が成り立つ．

($\Leftarrow$) $\forall\varepsilon>0$ に対して (a) および (b) が成り立つとする．(a) より，

$$\alpha_N=\sup_{n\geq N}a_n<\alpha+\varepsilon,\quad \alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_N\geq\cdots$$

だから，任意の $k\geq N$ に対して $\alpha_k<\alpha+\varepsilon$ を得る．$k\to\infty$ として，

$$\varlimsup_{n\to\infty}a_n=\lim_{k\to\infty}\alpha_k\leq\alpha+\varepsilon.$$

(b) より，任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して $\alpha-\varepsilon<\sup_{n\geq k}a_n=\alpha_k$ が成り立つ．ゆえに，

$$\alpha-\varepsilon\leq\varlimsup_{n\to\infty}a_n.$$

したがって， $\alpha-\varepsilon\leq\varlimsup a_n\leq\alpha+\varepsilon$ を得る．$\varepsilon>0$ は任意だから，

$$\varlimsup_{n\to\infty}a_n=\alpha$$

を得る． □

定理 1.3.5 $\{a_n\}$ を有界数列とする．このとき，

(i) $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty}a_n=\varlimsup_{n\to\infty}a_n=\alpha\ \Rightarrow\ \{a_n\}$ は収束して $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha.$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\ \Rightarrow\ \varliminf_{n\to\infty}a_n=\varlimsup_{n\to\infty}a_n=\alpha.$

証明 (i) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}a_n=\alpha$ だから，定理 1.3.4 より，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_1\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ n\geq N_1\Rightarrow a_n<\alpha+\varepsilon.$$

同様に， $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty}a_n=\alpha$ だから，

$$\exists N_2\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ n\geq N_2\Rightarrow\alpha-\varepsilon<a_n.$$

$N=\max\{N_1,N_2\}$ とすると，

$$n\geq N\Rightarrow\alpha-\varepsilon<a_n<\alpha+\varepsilon\Rightarrow|a_n-\alpha|<\varepsilon.$$

したがって，$\{a_n\}$ は α に収束する．

<u>(i) の別証</u> $\alpha_k = \sup_{n \geq k} a_n$, $\beta_k = \inf_{n \geq k} a_n$ とおくと，

$$n \to \infty \text{ のとき，} \alpha_k \to \alpha, \ \beta_k \to \alpha$$

であり，

$$\text{任意の } k \text{ に対して } \alpha_k \leq a_k \leq \beta_k$$

が成り立つ．はさみうちの原理より $\{a_n\}$ は α に収束する．

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とすると，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon.$$

定理 1.3.4 より $\alpha = \varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$. □

命題 1.3.6 (i) $\{a_n\}$ を有界数列とする．このとき，次の (a) と (b) は同値である．

$$(a) \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

$$(b) \quad \begin{cases} \alpha \text{ に収束する } \{a_n\} \text{ の部分列が存在する．} \\ \gamma > \alpha \text{ をみたす } \gamma \text{ に収束する } \{a_n\} \text{ の部分列は存在しない．} \end{cases}$$

(ii) $\{a_n\}, \{b_n\}$ を有界数列とする．ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，すべての $n \geq N$ に対して $a_n \leq b_n$ が成り立つならば，$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} b_n$ が成り立つ．

(iii) $\{a_n\}, \{b_n\}$ を有界数列とする．このとき，次が成り立つ．

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n \leq \varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n),$$
$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n.$$

とくに，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在すれば，

$$\varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n,$$
$$\varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n$$

が成り立つ．

命題 1.3.6 の証明は演習問題とする．

注意 1.3.7 有界でない数列（非有界な数列）に対して以下のように上極限と下極限を定義すると便利なことが多い．

数列 $\{a_n\}$ が上に有界でないとき，その上極限を $+\infty$ と定め，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty \quad \text{または} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

と書く．数列 $\{a_n\}$ が下に有界でないとき，その下極限を $-\infty$ と定め，

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = -\infty \quad \text{または} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と書く．

実数 $\mathbb{R}$ に $\pm\infty$ を付け加えた集合 $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ に大小関係 $<$ を，

> $x, y \in \mathbb{R}$ のとき，$x < y$ を $\mathbb{R}$ の大小関係により定め，$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して $-\infty < x < +\infty$ と定める．

このとき，$\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ は<u>拡張された実数</u>または<u>補完数直線</u>と呼ばれ，

$$\overline{\mathbb{R}} \quad \text{または} \quad [-\infty, +\infty]$$

などと書かれる．この節に述べたことは，$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \in \overline{\mathbb{R}}$, $\beta = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ としても成立する．もちろん，証明においては，$\pm\infty$ である場合と有限である場合とに場合分けをする必要がある．

問 1.3.8 X を集合とする．ρ が集合 X 上の<u>距離</u>であるとは，$\rho : X\times X \to [0,\infty)$ であり，次の (i), (ii), (iii) が成り立つときをいう．

(i) $\rho(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$,

(ii) $\forall x, y \in X$ に対して $\rho(x,y) = \rho(y,x)$,

(iii) $\forall x, y, z \in X$ に対して $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

たとえば，$X = \mathbb{R}$ のとき，$\rho(x,y) = |x-y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$ によって ρ を定めると，ρ は $\mathbb{R}$ 上の距離である．

$X = \overline{\mathbb{R}}$ のとき，$\rho(x,y) = |A(x) - A(y)|$ $(x, y \in \overline{\mathbb{R}})$ によって ρ を定めると，ρ は $\overline{\mathbb{R}}$ 上の距離であることを示せ．ただし，$A(x) = \tan^{-1} x\,(= \arctan x)$, $A(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$ である．

1.4 Cauchy 列

定義 1.4.1 数列 $\{a_n\}$ が **Cauchy 列**であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m, n \geq N \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

が成り立つときをいう．

注意 1.4.2 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを $\lim_{m,n\to\infty}(a_m - a_n) = 0$ と表すこともある．

命題 1.4.3 **（Cauchy 列の性質）**

(i) Cauchy 列は有界である．

(ii) Cauchy 列 $\{a_n\}$ のある部分列 $\{a_{n_k}\}$ が α に収束すれば，$\{a_n\}$ も α に収束する．

証明 (i) Cauchy 列の定義より，

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m, n \geq N_1 \Rightarrow |a_m - a_n| < 1$$

が成り立つ．したがって，

$$n \geq N_1 \ \Rightarrow \ a_{N_1} - 1 < a_n < a_{N_1} + 1$$

を得る．$M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_{N_1}|, |a_{N_1} - 1|, |a_{N_1} + 1|\}$ とおけば，

$$\text{任意の } n \text{ に対して } |a_n| \leq M$$

が成り立つから，$\{a_n\}$ は有界である．

(ii) Cauchy 列の定義より，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m, n \geq N_1 \Rightarrow |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ より

$$\exists K_1 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } k \geq K_1 \Rightarrow |a_{n_k} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．$N = \max\{N_1, K_1\}$ とおくと，（$n_k \geq k$ に注意して）$k \geq N$ ならば

$$\begin{aligned} |a_k - \alpha| &\leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

を得る．したがって，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$. $\square$

定理 1.4.4 （Cauchy の判定条件） 次が成り立つ．

$$\{a_n\} \text{ が収束する} \iff \{a_n\} \text{ が Cauchy 列である}$$

証明 $(\Rightarrow)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とすると，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．これより，

$$m, n \geq N \ \Rightarrow\ |a_m - a_n| \leq |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

を得る．したがって，$\{a_n\}$ は Cauchy 列である．

$(\Leftarrow)$ $\{a_n\}$ を Cauchy 列とする．命題 1.4.3 (i) より $\{a_n\}$ は有界である．したがって，Bolzano-Weierstrass の定理（定理 1.2.20）より $\{a_n\}$ は収束部分列をもつ．命題 1.4.3 (ii) より $\{a_n\}$ は収束する． □

注意 1.4.5 定理 1.4.4 より $\mathbb{R}$ の Cauchy 列は収束する．このように，$\mathbb{R}$ が「任意の Cauchy 列は収束する」という性質をもつことを，$\mathbb{R}$ は<u>完備</u>であるという．完備性は解析学におけるもっとも基本的な概念の 1 つである．

Cauchy 列の概念は $\mathbb{Q}$ においても全く同じように定義される．定理 1.4.4 の証明より,「収束列 $\Rightarrow$ Cauchy 列」は $\mathbb{Q}$ においても成立する．

しかし，逆は成立しない.（この部分の証明では実数の連続性を用いている.）実際，無理数に収束する有理数列は Cauchy 列だから，$\mathbb{Q}$ は完備ではない．数直線上の有理数に対応する点（有理点）全体は密に分布するが，有理点だけでは数直線は隙間だらけである．その隙間は無理数であり，有理数列の収束先である．そのような有理数列は Cauchy 列であり，$\mathbb{R}$ の中では収束するが，$\mathbb{Q}$ の中では収束しない．完備というのは隙間（穴）がない空間であるといっていい．$\mathbb{R}$ は，$\mathbb{Q}$ だけでは生じてしまう空間の穴を有理数列の Cauchy 列の極限で埋めてできる穴のない空間と考えられる.（$\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ の<u>完備化</u> という.） もちろん，このことの数学的な基礎付けをするには，新たな概念の導入が求められる.（位相空間論の授業を参照.）

1.5　級数

(a) 無限級数

数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき，

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

を無限級数（あるいは単に級数）といい，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{1}^{\infty} a_n, \quad \sum a_n$$

などと表す.

定義 1.5.1 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは，部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$$

からなる数列 $\{S_n\}$ が収束することである．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$ とするとき，S を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和といい，

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

と表す.

数列 $\{S_n\}$ が発散（つまり，収束しない）とき，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散するという.

定理 1.5.2

$$\text{級数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束する}$$

$\iff$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m > n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon$$

証明 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．級数の収束の定義と定理 1.4.4 より，

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束} \\
&\quad \Longleftrightarrow \{S_n\} \text{ が収束} \\
&\quad \Longleftrightarrow \{S_n\} \text{ が Cauchy 列} \\
&\quad \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m > n \geq N \Rightarrow |S_m - S_n| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

ここで，$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right|$ であるから，定理の主張を得る． □

命題 1.5.3 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束するとし，$c \in \mathbb{R}$ とする．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(ca_n)$$

も収束し，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

が成り立つ．

この命題は定理 1.2.8 から容易にしたがうので，証明は省略する．

命題 1.5.4 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，この級数の項の順序を変更せずに有限個をまとめた級数

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + (\cdots\cdots) + \cdots$$

も $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と同じ和に収束する．

証明 部分和からなる数列 $\{S_n\}$ の部分列 $\{S_{n_k}\}$ を考える．$\{S_n\}$ は $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和に収束するから， 部分列 $\{S_{n_k}\}$ も同じく $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和に収束する． □

注意 1.5.5 $\sum a_n$ が発散するときは上の命題の主張は成立しない．たとえば，$a_n = (-1)^n$ のとき，$\sum a_n$ は収束しないが，$-1+(1-1)+(1-1)+\cdots$ は -1 に収束する．また，項の順序を変更すると，その和が変わることもある.（この点についてはのちに考察する.）

級数が収束するための簡単な必要条件を述べる．この必要条件はしばしば用いられる．

命題 1.5.6 $\sum a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ．

証明 $\sum_{k=n+1}^{n+1} a_k = a_{n+1}$ だから，定理 1.5.2 で $m = n+1$ ととればよい．
□

注意 1.5.7 この命題の逆は成立しない．たとえば，$a_n = 1/n$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であが，

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

であるから，定理 1.5.2 より $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束しない．

(b) 正項級数

定義 1.5.8 すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n \geq 0$ のとき，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を<u>正項級数</u>という．

定理 1.5.9 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を正項級数とする．このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が収束する} \iff \text{部分和からなる数列 } \{S_n\} \text{ が上に有界である}$$

証明 すべての n に対して $a_n \geq 0$ であるから $\{S_n\}$ は単調増加数列である．したがって，定理 1.2.14 より結論を得る． □

次に正項級数が収束するための条件を考えよう．

定理 1.5.10 **（比較判定法）** 2つの正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ に対して，

$$\exists C > 0 \text{ s.t. 有限個の } n \text{ を除いて } a_n \leq Cb_n$$

が成り立つとする．このとき，次の (i), (ii) が成り立つ．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束する $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散する $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ も発散する

証明 まず，仮定より

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow a_n \leq Cb_n$$

が成り立つ． したがって，

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leq C \sum_{k=N}^{n} b_n$$

が成り立つことに注意しておく．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するとする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = M < \infty$ とすると，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq a_1 + \cdots + a_{N-1} + CM < \infty$$

だから，$\{S_n\}$ は上に有界な単調増加数列である．定理 1.5.9 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散するとすると，

$$\sum_{k=N}^{n} b_k \geq \frac{1}{C} \sum_{k=N}^{n} a_k \ \to \ \infty \ (n \to \infty)$$

だから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は発散する． $\square$

定理 1.5.11 **（Cauchy の判定法）** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を正項級数とする．このとき，次が成り立つ．

(i) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

(ii) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

証明 (i) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ だから，

$$\exists r : 0 < r < 1,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq N \text{ に対して } \sqrt[n]{a_n} < r$$

が成り立つ．したがって，

$$n \geq N \ \Rightarrow\ a_n < r^n$$

が成り立つ．$r < 1$ より $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} r^n$ は収束するから，比較判定法（定理 1.5.10）より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

(ii) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ だから，無数の n に対して $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, つまり，$a_n \geq 1$ が成り立つ．これより $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は成り立たない．よって，命題 1.5.6 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する． □

定理 1.5.12 **（d'Alembert の判定法）** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を正項級数とする．このとき，次が成り立つ．

(i) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

(ii) $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

証明 (i) $\displaystyle\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}<1$ とすると，

$$\exists r : 0<r<1, \exists N\in\mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n\geq N \text{ に対して } \frac{a_n}{a_{n-1}}<r$$

が成り立つ．したがって，

$$n\geq N \ \Rightarrow\ \frac{a_n}{a_N}=\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}<r^{n-N}$$

を得る．$r<1$ より $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty}r^{n-N}$ は収束するから，比較判定法（定理 1.5.10）より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する．

(ii) $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}>1$ とすると，

$$\exists r : 0<r<1, \exists N\in\mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n\geq N \text{ に対して } \frac{a_n}{a_{n-1}}>r$$

が成り立つ．したがって，

$$n\geq N \ \Rightarrow\ a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_{N+1}}{a_N}>r^{n-N}$$

を得る．$r>1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$ であるが, とくに,

$$\exists N_1\in\mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n\geq N_1 \text{ に対して } a_n\geq 1$$

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する． □

(c) 絶対収束と条件収束

絶対収束と条件収束を考えよう．これらの概念は級数論において重要である．たとえば，項の順序の変更が自明でないことを見ることになるであろう．

定義 1.5.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ に対して，a_n の絶対値 $|a_n|$ からなる級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は<u>絶対収束</u>するという．

定理 1.5.14 絶対収束級数は収束する．

証明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとしよう．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ は収束するから，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m > n \geq N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

が成り立つ．これより，

$$m > n \geq N \;\Rightarrow\; \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$$

を得る．定理 1.5.2 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する． □

次に，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の各項を正項と負項に分けることを考える．

$$a_n = a_n^+ - a_n^-,$$

ここで，

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, \quad a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$$

である．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ はともに正項級数であり，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^+ - a_n^-), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^+ + a_n^-)$$

が成り立つ．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ の収束発散については次の 4 つの場合が考えられる．

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$：収束，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$：収束

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$：発散，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$：収束

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$：収束，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$：発散

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$：発散，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$：発散

(a), (b), (c) の場合，事情は単純である．実際，(a) の場合は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束するので，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．(b) の場合は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \infty$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- < \infty$ であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ である．同様に (c) の場合は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ < \infty$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$ であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$ である．(d) の場合は，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$ であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束しない．しかし，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束することもあるし，発散することもある．

以下，(d) の場合を考察しよう．

定義 1.5.15 絶対収束しないが収束する級数を<u>条件収束</u>級数という．つまり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ は発散するが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は<u>条件収束</u>するという．

定理 1.5.16 （Leibnitz の交項級数） $\{a_n\}$ が次の 3 条件

(i) 任意の n に対して $a_n > 0$

(ii) $a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

をみたすならば，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ は収束する．

証明 $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} S_{2m} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}), \\ S_{2m+1} &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m} - a_{2m+1}) \end{aligned}$$

が成り立つ．各カッコ内は仮定より非負だから，$\{S_{2m}\}$ は単調増加数列，$\{S_{2m+1}\}$ は単調減少数列である．さらに，

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1} \geq S_{2m}$$

であるから，

$$0 \leq S_2 \leq S_4 \leq \cdots S_{2m} \leq S_{2m+1} \leq S_{2m-1} \leq \cdots \leq S_5 \leq S_3$$

を得る．したがって，定理 1.2.14 より，$\lim_{m\to\infty} S_{2m} = S$, $\lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \tilde{S}$ が存在する．ところが，

$$\tilde{S} = \lim_{m\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} + a_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} + \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = S$$

が成り立つ．よって，$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ である.（問 1.5.17 を参照.） □

問 1.5.17 $\{a_n\}$ が $\lim_{m\to\infty} a_{2m} = \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = \alpha$ をみたすならば，$\{a_n\}$ は収束し，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が成り立つことを示せ.

例 1.5.18 次の級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

は定理 1.5.16 の仮定をみたすから収束する．注意 1.5.7 より，この級数は絶対収束はしないから，条件収束級数である．

この級数の項の順序を変更した級数を考えてみよう．$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ とする．

$$\begin{array}{rclcccccccccccc} S &=& 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & +\cdots & +\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} & +\cdots \\ \frac{1}{2}S &=& & +\frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & & -\frac{1}{8} & +\cdots & +\frac{(-1)^{n-1}}{2n} & \cdots \end{array}$$

であるから，辺々を加えると，

$$\frac{3}{2}S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \cdots$$

を得る．この式の右辺はもとの級数の項の順序を変更したものである．項の順序を変更すると和の値が変わっている．のちに，このことをより一般的に考察する．

定理 1.5.19 絶対収束級数の項の順序を変更した級数も絶対収束し，その和の値はもとの級数の和の値と同じである．

定理 1.5.19 の証明のために，まず正項級数の場合を考えよう．

補題 1.5.20 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を収束する正項級数とする．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の項の順序を変更して得られる級数も収束し，その和はものと級数の和と同じである．

証明 $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ とする．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の項の順序を変更して得られる級数を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ とする．$\tilde{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k$ とおく．

$\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_n$ をもとの順番で考えたときの最大の番号を N とすると，

$$\tilde{S}_n \leq S_N \leq S$$

が成り立つ．したがって，$\{\tilde{S}_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるから，定理 1.2.14 より収束する．$\tilde{S} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ とすると，$\tilde{S} \leq S$ を得る．

一方，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ の項の順序を変更して得られる級数であるから，上の議論より，$S \leq \tilde{S}$ が成り立つ．よって，$S = \tilde{S}$ を得る． □

定理 1.5.19 の証明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の項の順序を変更して得られる級数を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ とする．$\tilde{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k$ とおく．補題 1.5.20 より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{a}_n|$ を得る．したがって，$\tilde{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k$ は絶対収束する．

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ を示そう．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ は収束するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ とはともに収束する正項級数である．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{a}_n^+ - \tilde{a}_n^-), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{a}_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^-$$

であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^+$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^-$ とは正項級数だから，補題 1.5.20 より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\pm = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^\pm$ を得る．$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ は収束するので，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

を得る． □

絶対収束する級数は項の順序を変えても同じ和に収束するから，和を計算するときに項の順序を自由に変えてもよい．しかしながら，条件収束する級数の場合は事情が大きく異なる．次の定理は **Riemann の級数定理**と呼ばれる．

定理 1.5.21 $\sum a_n$ を条件収束級数とする．任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の項の順序を適当に変更した級数で c に収束するものが存在する．また，$c = \pm\infty$ に対して，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の項の順序を適当に変更した級数で c に発散するものが存在する．

証明 $c \in \mathbb{R}$ の場合に証明する．$c = \pm\infty$ の場合も同様に証明することができる．(問 1.5.22 とする．)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-)$ は条件収束するから，次の (i), (ii) が成り立つ

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n^+ = \lim_{n\to\infty} a_n^- = 0,$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \infty$.

任意に $c \in \mathbb{R}$ を与える．まず，$c \geq 0$ の場合を考える．$c < a_1^+$ のとき，$n_1 = 1$ とする．そうでないとき，$a_1^+, a_2^+, \cdots$ をとって，これを加えていくと，

$$\sum_{k=1}^{n_1-1} a_k^+ \leq c < \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+$$

をみたす番号 n_1 が見つかる．次に，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - a_1^- \leq c$ のとき，$m_1 = 1$ とする．そうでないとき，$-a_1^-, -a_2^-, \cdots$ を加えていくと，

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1} a_k^- \leq c < \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1-1} a_k^-$$

をみたす番号 m_1 が見つかる．以下同様に，$n_1, m_1, n_2, m_2, \cdots$ を決めていく．このような番号は (ii) より必ず見つかる．こうして定まった級数

$$\sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1} a_k^- + \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k^+ - \cdots$$

は 0 である項を省略すればもとの級数の項の順序を変更した級数であり，

$$\left| \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - c \right| < a_{n_1}^+,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1} a_k^- - c \right| < a_{m_1}^-,$$

$$\cdots\cdots$$

が成り立つ．さらに

$$\left| \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m} a_k^- - c \right| < a_{n_1}^+$$

が $1 \leq m < m_1$ で成り立ち，

$$\left| \sum_{k=1}^{n_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{m_1} a_k^- + \sum_{k=1}^{n} a_k^+ - c \right| < a_{m_1}^-$$

が $n_1 \leq n < n_2$ で成り立つ．以下同様のことが成り立つ．(i) よりこのように順序を変更して構成した級数は c に収束することがわかる．$c < 0$ の場合も同じようにして構成できる． □

問 1.5.22 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が条件収束するとき，適当に項の順序を変更した級数で $+\infty$ に発散するものが存在することを証明せよ．

(d) 級数の積

次に級数の積を考えよう．

定義 1.5.23 2つの級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ に対して，次で与えられる $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k},$$

によって級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ を定める．この $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の<u>積</u>（または <u>**Cauchy** 積</u>）という．

一般に，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束しても $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が収束するとは限らない．十分条件として次を与えよう．

定理 1.5.24 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに絶対収束し，それらの和をそれぞれ，$\displaystyle S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ とする．

このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の積 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ も絶対収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n = ST$ が成り立つ．

証明

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad \tilde{T}_n = \sum_{k=1}^{n} |b_k|, \quad \tilde{S} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad \tilde{T} = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$$

とおく．

$$|c_k| \le |a_1||b_k| + \cdots + |a_k||b_1|$$

であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |c_k| &\le |a_1||b_1| + (|a_1||b_2| + |a_2||b_1|) + \cdots + (|a_1||b_n| + \cdots + |a_n||b_1|) \\ &\le |a_1|\tilde{T}_n + |a_2|\tilde{T}_n + \cdots + |a_n|\tilde{T}_n \\ &= \tilde{S}_n\tilde{T}_n \le \tilde{S}\tilde{T} < \infty\end{aligned}$$

を得る．したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ は絶対収束する．

次に $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n = ST$ を示そう．

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{2m+1} c_k - S_{m+1}T_{m+1}\right| &= \left|\sum_{k=1}^{2m+1}\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell b_{k+1-\ell} - \sum_{k=1}^{m+1}\sum_{\ell=1}^{m+1} a_k b_\ell\right| \\ &\le \sum_{\ell=m+2}^{2m+1} |b_\ell| \sum_{k=1}^{2m+1-\ell} |a_k| + \sum_{k=m+2}^{2m+1} |a_k| \sum_{\ell=1}^{2m+1-k} |b_\ell| \\ &\le \left(\sum_{\ell=m+2}^{2m+1} |b_\ell|\right)\tilde{S} + \left(\sum_{k=m+2}^{2m+1} |a_k|\right)\tilde{T} \\ &\to 0 \qquad (m \to \infty)\end{aligned}$$

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n = ST$ である． □

注意 1.5.25 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ とが条件収束する場合は，定理 1.5.24 は必ずしも成立しない．

例 1.5.26 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ は絶対収束しないが，交項級数だから定理 1.5.16 より収束する．つまり，この級数は条件収束級数である．積を考えよう．

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{\sqrt{k}}(-1)^{n-k+1}\frac{1}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}$$

であるから，

$$|c_n| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2}} = 1$$

を得る．したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ が成り立たないので，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ は発散する．

第2章　関数の極限と連続性

2.1　関数

A, B を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．A の各点 x に B の点 y を対応させる規則

$$f : A \to B;\ \ x \mapsto y$$

を，A で定義されて B に値をとる関数という．$x \in A$ に $y \in B$ が対応するとき，$y = f(x)$ と表す．集合 A を f の定義域といい，集合 $\{f(x) : x \in A\}$ を f の値域という．f の値域を $f(A)$ と表す．すなわち，$f(A)$ は

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in B : \exists x \in A \,\mathrm{s.t.}\, y = f(x)\}$$

で与えられる集合である．$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の部分集合

$$\{(x, f(x)) : x \in A\}$$

を f のグラフという．

定義 2.1.1 $A, B \subset \mathbb{R}$ とし，$f : A \to B$ を関数とする．

(i) f が

$$x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2\ \ \Rightarrow\ \ f(x_1) \neq f(x_2) \tag{2.1.1}$$

をみたすとき，f は A から B への単射である（または **1 対 1 の写像**である）という．(2.1.1) は言い換えれば，

$$f(x_1) = f(x_2)\ (x_1, x_2 \in A)\ \ \Rightarrow\ \ x_1 = x_2 \tag{2.1.2}$$

である．

(ii) $f(A) = B$ が成り立つとき，f は A から B への全射である（または上への写像である）という．$f(A) \subset B$ は常に成り立っているから，f が A から B への全射であるとは，

$$\forall y \in B,\ \exists x \in A \text{ s.t. } y = f(x)$$

が成り立つことである．

(iii) f が A から B への全単射（全射かつ単射）であるとき，

$$\forall y \in B, \exists 1\, x \in A \text{ s.t. } y = f(x)$$

が成り立つから，この規則は B から A への関数を定義する．この関数を $x = f^{-1}(y)$ と書き，関数 $f^{-1} : B \to A$ を f の<u>逆関数</u>という．

f が A から B への全単射であるとき，

$$f^{-1}(f(x)) = x \ (\forall\, x \in A), \quad f(f^{-1}(y)) = y \ (\forall\, y \in B)$$

が成り立つ．

例 2.1.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全単射であり，$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$ である．

例 2.1.3 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ は全射でもないし，単射でもない．実際，$y < 0$ に対して，$y = f(x)$ をみたす $x \in \mathbb{R}$ は存在しないし，$y > 0$ に対して，$x = \sqrt{y}$ と $x = -\sqrt{y}$ はともに $y = f(x)$ をみたす．

次に $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ とおく．このとき，$f_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$ は単射であるが全射でない．$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f_2(x) = x^2$ は全射であるが単射でない．$f_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f_3(x) = x^2$ は全単射である．

$\mathbb{R}$ の区間の記号を導入しておこう．$-\infty < a < b < +\infty$ のとき，

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \underline{\text{開区間}}, \\
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \underline{\text{閉区間}}, \\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \underline{\text{半開区間}}, \\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \quad \underline{\text{半開区間}}, \\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \quad \underline{\text{無限開区間}}, \\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \quad \underline{\text{無限閉区間}}, \\
(-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \quad \underline{\text{無限開区間}}, \\
(-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \quad \underline{\text{無限閉区間}}
\end{aligned}$$

と表すことにする．上記を総称して<u>区間</u>という．a, b を区間の<u>端点</u>という．<u>右端点</u>，<u>左端点</u>も同様に定義される．例えば，(a, b) の左端点は a, 右端点は b である．

2.2 関数の極限

定義 2.2.1 (i) $x_0 \in \mathbb{R}$ とする．f を x_0 のある近傍で定義された関数とする．ただし，f は $x = x_0$ で定義されていなくてもよい．

$$x \text{ が } x_0 \text{ に近づくときの } f(x) \text{ の極限が } \alpha \text{ である}$$

とは，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことである．このとき，

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \text{ または } f(x) \to \alpha \ (x \to x_0)$$

と表す.（$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ も起こり得ることに注意しよう.）

注意 上の定義において，δ は一般に ε と x_0 にも依存して決まる数であるので $\delta(\varepsilon, x_0)$ とも書かれる．

(ii) $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ とする．

$$x \to \infty \text{ のとき } f(x) \text{ の極限が } \alpha \text{ である}$$

とは，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \text{ s.t. } x > M \ \Rightarrow \ |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことである．このとき，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha \text{ または } f(x) \to \alpha \ (x \to \infty)$$

と表す．$\lim_{x \to -\infty} f(x)$ も同様に定義される．

注意 上の定義において M は一般に ε に依存して決まる数でなので $M(\varepsilon)$ とも書かれる．

例 2.2.2 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$ のとき，$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ である．また，$f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ のとき，$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ である．

例 2.2.3 $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ $(x>0)$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = e$ が成り立つ．

実際，$n = [x]$（$[x]$ は x を超えない最大の整数）とすると，$n \le x < n+1$ であるから，

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{n}$$

を得る．よって，

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

が成り立つ．ここで，

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \quad \to \quad e \quad (n\to\infty),$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad \to \quad e \quad (n\to\infty)$$

であり，$x\to\infty$ のとき $n=[x]\to\infty$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = e$ が成り立つ．

片側極限（右極限，左極限）について述べておこう．

定義 2.2.4 α が $f(x)$ の x_0 における<u>右極限</u>であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことである．同様に，α が $f(x)$ の x_0 における<u>左極限</u>であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことである．

記号 α が $f(x)$ の x_0 における右極限であることの定義において $0 < x - x_0 < \delta$ は，$x > x_0$ かつ $|x - x_0| < \delta$ であるから，x は x_0 の右から x_0 に近づくことを意味する．このように，$x > x_0$ で $x \to x_0$ であることを

$$x \to x_0 + 0 \text{ または } x \downarrow x_0$$

と表し，α が $f(x)$ の x_0 における右極限であることを

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = \alpha \text{ または } f(x) \to \alpha \quad (x \to x_0 + 0)$$

と書く．右極限 α を $f(x_0 + 0)$ とも書く．すなわち，

$$\alpha = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

である．同様に，$x < x_0$ で $x \to x_0$ であることを

$$x \to x_0 - 0 \text{ （または } x \uparrow x_0 \text{ ）}$$

と表し，α が $f(x)$ の x_0 における左極限であることを

$$\lim\nolimits_{x \to x_0-0} f(x) = \alpha \text{ または } f(x) \to \alpha \quad (x \to x_0 - 0)$$

と書く．左極限 α を $f(x_0 - 0)$ とも書く．すなわち，

$$\alpha = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

である．

$x_0 = 0$ のときは，$x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$ は，それぞれ，$x \to +0$, $x \to -0$ と書かれることも多い．

例 2.2.5 $\displaystyle\lim_{x \to 1+0} (x-1)\log(x-1) = 0$

関数の加減乗除の極限について次のことが成り立つ．

命題 2.2.6 $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} g(x) = \beta$ とする．このとき，次が成り立つ．

(i) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$,

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \alpha\beta$,

(iii) $\beta \neq 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$.

証明は演習問題とする．

関数の極限の特徴づけを数列を用いて与える．

定理 2.2.7 次の (i) と (ii) は同値である．

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$

(ii) $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ をみたす任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$ が成り立つ．

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を，$x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ をみたす任意の数列とする．$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ であるから，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．一方，$x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ より，

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow 0 < |x_n - x_0| < \delta$$

を得る．したがって，$n \geq N$ ならば $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ であるから，$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \alpha$ が成り立つ．

(ii) $\Rightarrow$ (i): 背理法による．$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ が成立しないとすると，

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ s.t. } \forall \delta > 0, \exists x_\delta \text{ s.t. } 0 < |x_\delta - x_0| < \delta \text{ であるが } |f(x_\delta) - \alpha| \geq \varepsilon_0$$

が成り立つ．$\delta = 1/n$ に対する x_δ を a_n とおくと，$0 < |a_n - x_0| < 1/n$ だから，$a_n \neq x_0$, $a_n \to x_0$ である．ところが，$|f(a_n) - \alpha| \geq \varepsilon_0$ だから，$\{f(a_n)\}$ は α に収束しない．これは (ii) に反する． □

関数の極限に対する Cauchy の判定法を述べる．

定理 2.2.8 次の (i) と (ii) は同値である．

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ が存在する

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \delta > 0$ *s.t.*

$$0 < |x_1 - x_0| < \delta,\ |x_2 - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

が成り立つ

証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ とする．このとき，

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ s.t. } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．したがって，$0 < |x_1 - x_0| < \delta$, $|x_2 - x_0| < \delta$ ならば，

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

が成り立ち，(ii) を得る．

(ii) $\Rightarrow$ (i): (ii) が成り立つとする．$\{x_n\}$ を $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ をみたす数列とする．このとき，

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow 0 < |x_n - x_0| < \delta$$

が成り立つ．したがって，

$$m, n \geq N \ \Rightarrow \ 0 < |x_m - x_0| < \delta,\ 0 < |x_n - x_0| < \delta$$

であるから， (ii) より $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ が成り立つ．結局，

$$m, n \geq N \ \Rightarrow \ |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$$

を得る．このことは，$\{f(x_n)\}$ が Cauchy 列であることを意味する．Cauchy 列は収束するから，$\{f(x_n)\}$ は収束する．

x_0 に収束する任意の数列 $\{y_n\}$ $(y_n \neq x_0)$ に対して，$\{f(y_n)\}$ が $\{f(x_n)\}$ の極限に収束することが示されれば，定理 2.2.7 より (i) が成立することがわかる．

そこで，$\{y_n\}$ を $y_n \neq x_0$, $y_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ をみたす $\{x_n\}$ とは異なる数列としよう．$\{z_n\}$ を $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ の項を順に交互に並べた数列とすると，$z_n \neq x_0$, $z_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ である．上の議論から $\{f(z_n)\}$ は Cauchy 列であることがわかる．したがって，$\{f(z_n)\}$ は収束する．その極限を α としよう．$\{f(x_n)\}$, $\{f(y_n)\}$ は $\{f(z_n)\}$ の部分列であるから，これらはともに α に収束する．したがって，定理 2.2.7 より $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)$ が存在することがわかる． $\square$

2.3 関数の連続性

定義 2.3.1 I を区間とし，f を I 上の関数とする．

(i) f が $\underline{x_0 \in I}$ <u>で連続</u>であるとは，

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(x_0)$$

が成り立つことをいう．ただし，x_0 が区間 I の左端点（または右端点）のときは，この条件を

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \quad (\text{ または } \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0))$$

に置き換える．

(ii) 区間 I の各点で f が連続であるとき，f は <u>区間 I で連続</u>であるという．

注意 2.3.2 f が $x_0 \in I$ で連続であることを ε-δ 論法で書くと次のようになる．

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

ここで，<u>δ は一般に ε と $x_0 \in I$ に依存して決まる数</u>であることに注意しておく．

関数の極限（定理 2.2.7 ）のときと同様に，関数の連続性を数列の極限によって特徴づけておこう．

定理 2.3.3 f を I 上の関数とする．このとき，次の (i) と (ii) は同値である．

(i) f が $x_0 \in I$ で連続，すなわち，$\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(ii) $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ をみたす任意の数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$ に対して，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ が成り立つ．

証明は定理 2.2.7 の証明と同様なので，演習問題とする．

定理 2.3.4 f, g を区間 I で連続な関数とする．このとき，$f+g, fg$ も I で連続である．さらに，$g(x) \neq 0$ $(\forall x \in I)$ ならば，f/g も I で連続である．

証明は演習問題とする．

例 2.3.5 $I = \mathbb{R}$ とし，I 上の関数 f を，

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

によって定める．このとき，f は $x \neq 0$ である $x \in \mathbb{R}$ で連続であり，

$$\lim_{x \to -0} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to +0} f(x) = 1$$

であるから，f は $x = 0$ で不連続である．

一般に，$x_0 \in I$ において $\displaystyle\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ はともに存在するが，$\displaystyle\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ ならば，f は x_0 で不連続である．このような不連続点を第一種不連続点という．

例 2.3.6 $I = \mathbb{R}$ とし，α を実数とする．I 上の関数 f を，

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ \alpha & (x = 0) \end{cases}$$

によって定める．このとき，f は $x \neq 0$ である $x \in \mathbb{R}$ で連続であり，α がどんな値であっても f は $x = 0$ で不連続である．

この節の最後に合成関数の連続性を考えよう．

合成関数　$f : I \to \mathbb{R}, g : J \to \mathbb{R}, f(I) \subset J$ のとき，関数 $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ が $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ によって定まる．$g \circ f$ を f と g の合成関数という．

定理 2.3.7 f が x_0 で連続，g が $f(x_0)$ で連続ならば，$g \circ f$ は x_0 で連続である．

証明 $x_n \to x_0$ をみたす任意の数列 $\{x_n\}$ をとる．f は x_0 で連続だから，定理 2.3.3 より $f(x_n) \to f(x_0)$ が成り立つ．g は $f(x_0)$ で連続だから，再び 定理 2.3.3 より，

$$\lim_{n\to\infty}(g\circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0)) = (g\circ f)(x_0)$$

を得る．したがって，定理 2.3.3 より $g\circ f$ は x_0 で連続である． □

問 2.3.8 f が x_0 で連続，$f(x_0) > 0$ とする．このとき，$0 < \beta < f(x_0)$ をみたす任意の β に対してある $\delta > 0$ が存在して，$|x - x_0| < \delta$ ならば $f(x) > \beta$ が成り立つことを示せ．

問 2.3.9 次の関数 f が $\mathbb{R}$ で連続になるように α を定めよ．

$$\text{(i)} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ \alpha & (x = 0) \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad f(x) = \begin{cases} x\log|x| & (x \neq 0) \\ \alpha & (x = 0) \end{cases}$$

2.4 連続関数の性質

定理 2.4.1 （中間値の定理） f は区間 $[a,b]$ で連続であるとする．このとき，$f(a) \neq f(b)$ ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 μ に対して $f(c) = \mu$ をみたす $c \in (a,b)$ が存在する．

証明 $f(a) < f(b)$ の場合に証明する．（ $f(a) > f(b)$ の場合も同様に証明できる．） $f(a) < \mu < f(b)$ をみたす μ に対して，

$$A = \{x \in [a,b] : f(x) < \mu\}$$

とおく．$a \in A$ より $A \neq \emptyset$ である．A は有界だから，$\sup A = c$ が定まる．上限の性質から，$a \leq c \leq b$ であり，

$$\exists \{x_n\} \subset A \text{ s.t. } x_n \to c \ (n \to \infty)$$

が成り立つ．$x_n \in A$ だから，$f(x_n) < \mu$ である．f は連続だから，$n \to \infty$ として，

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \mu$$

を得る．これより，$c < b$ もしたがう．

$c < y_n \leq b,\ y_n \to c\ (n \to \infty)$ をみたす $\{y_n\}$ をとる．$y_n \notin A$ であるから，$f(y_n) \geq \mu$ が成り立つ．$n \to \infty$ として，

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \geq \mu$$

を得る．これより，$a < c$ もしたがう．以上より，

$$f(c) = \mu, \quad a < c < b$$

を得る． $\square$

問 2.4.2 f は区間 $[a,b]$ で狭義単調増加な連続関数とする．$\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$ とすると，区間 $[\alpha,\beta]$ で定義された逆関数 f^{-1} が定まる．f^{-1} は $[\alpha,\beta]$ で連続であることを示せ．

定理 2.4.3 I は有界閉区間，f は I で連続であるとする．このとき，f は I で有界である．すなわち，

$$\exists M > 0 \ s.t. \ \forall x \in I \text{ に対して } |f(x)| \leq M$$

が成り立つ．

証明　背理法による．$I=[a,b]$ とする．f が I で有界でないとすると，

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, x_n \in I \text{ s.t. } |f(x_n)| \geq n$$

が成り立つ．$\{x_n\}$ は $a \leq x_n \leq b\ (n=1,2,\cdots)$ をみたすから，有界数列である．Bolzano-Weierstrass の定理（定理 1.2.20）より，

$$\exists \text{ 部分列 } \{x_{n_k}\}, \exists x_0 \text{ s.t. } x_{n_k} \to x_0\ (k \to \infty)$$

を得る．$a \leq x_{n_k} \leq b$ だから $a \leq x_0 \leq b$ であり，f は連続だから，

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$$

である．一方，$|f(x_{n_k})| \geq n_k$ だから，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}|f(x_{n_k})| = \infty$ であり，矛盾が生ずる． $\square$

注意 2.4.4 定理 2.4.3 は，I が有界閉区間でなければ正しくない．たとえば，$I=(0,1),\ f(x)=\frac{1}{x},\ =[0,\infty),\ f(x)=x$ などを考えよ．

定理 2.4.5 有界閉区間で連続な関数は最大値と最小値を必ずとる．

証明　$I=[a,b]$ とし，f は I で連続とする．定理 2.4.3 より $A=\{f(x): x\in[a,b]\}$ は有界である．定理 1.1.17 より A の上限と下限が存在する．
$M=\sup A$ とおく．このとき，

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, x_n \in [a,b] \text{ s.t. } M-\tfrac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

が成り立つ．$a \leq x_n \leq b\ (n=1,2,\cdots)$ だから，Bolzano-Weierstrass の定理（定理 1.2.20 ）より

$$\exists \text{ 部分列 } \{x_{n_k}\}, \exists\, x_0 \text{ s.t. } x_{n_k} \to x_0\ (k \to \infty)$$

を得る．$a \leq x_{n_k} \leq b$ だから $a \leq x_0 \leq b$ である．また，$M-\frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq M$ であり，f は連続ゆえ，$k\to\infty$ とすると，$M \leq f(x_0) \leq M$，つまり $f(x_0)=M$ を得て，f は最大値をとることがわかる．最小値についても同様である． $\square$

注意 2.4.6 定理 2.4.5 は，I が有界閉区間でなければ正しくない．たとえば，$I=(0,1),\ f(x)=x$ とすると，f は I で連続かつ有界であるが，最大値と最小値をとらない．$\inf\{f(x): x\in I\}=0,\ \sup\{f(x): x\in I\}=1$ であるが，$f(x)=0,\ f(x)=1$ をみたす $x\in(0,1)$ は存在しない．

一様連続性

f が区間 I で連続であるとは，任意の $x_0 \in I$ で連続ということあったから，ε-δ 論法で書くと，

$$\forall\, x_0 \in I, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ s.t. } x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

となる．ここで，δ は ε のみならず $x_0 \in I$ に依存して決まる.（すでに述べたように δ を $\delta(x_0, \varepsilon)$ と書くこともある.）

例 2.4.7 $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は区間 $(0, 1)$ で連続である．x_0 が 0 に近づくほど，同じ ε に対して δ は小さくとらなければならず，$x_0 \to 0$ のとき，$\delta \to 0$ である．実際，$\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ は $0 < \delta(x_0, \varepsilon) \leq \dfrac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}$ でなければならない.（後の例 2.4.11 も参照.）

δ が ε のみに依存して x_0 とは無関係に決まる場合がある．そのようなより強い連続性の概念を定義する．

定義 2.4.8 $f : I \to \mathbb{R}$ が I で一様連続 であるとは，

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ s.t. } x, y \in I, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つことである．

一様連続性の定義において，δ は ε だけに依存し，区間 I の点には依らず一様にとれるところが肝要である．

「一様連続 $\Rightarrow$ 連続」は成り立つが，逆は一般に成り立たない．しかしながら，次の定理で述べるように，f の定義域が有界閉区間であれば逆が成立する．

定理 2.4.9 f が有界閉区間 I で連続ならば，f は I で一様連続である．

証明 背理法による．f が I で一様連続でないと仮定すると，

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0, \forall\, \delta > 0, \exists\, x_\delta, y_\delta \in I \text{ s.t. } |x_\delta - y_\delta| < \delta, |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon_0$$

が成り立つ．とくに $\delta = 1/n$ のときの x_δ, y_δ を z_n, w_n と表すと，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$|z_n - w_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(z_n) - f(w_n)| \geq \varepsilon_0$$

が成り立つ．I は有界閉区間だから，Bolzano-Weierstrass の定理（定理 1.2.20) より，

$$\exists \text{ 部分列 } \{z_{n_k}\}, \exists x_0 \in I \text{ s.t. } z_{n_k} \to x_0 \ (k \to \infty)$$

を得る．$|z_{n_k} - w_{n_k}| < 1/n_k$ より，$w_{n_k} \to x_0 \ (k \to \infty)$ である．f は I で連続だから，

$$f(z_{n_k}) - f(w_{n_k}) \ \to \ f(x_0) - f(x_0) = 0$$

が成り立つ．一方，$|f(z_{n_k}) - f(w_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ において $k \to \infty$ とすると，$0 \geq \varepsilon_0 > 0$ となり，矛盾が生ずる．□

注意 2.4.10 一般に，f が区間 I で連続ならば，f は I に含まれる任意の有界閉区間で一様連続である．

例 2.4.11 (i) $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $(0,1]$ で連続であるが，$(0,1]$ で一様連続ではない．実際，$x_n = 2^{-n}$ とすると，

$$\begin{aligned} \delta_n &= |x_{n+1} - x_n| = 2^{-(n+1)} \to 0, \\ \varepsilon_n &= |f(x_{n+1}) - f(x_n)| = 2^n \to \infty \end{aligned}$$

を得る．したがって，f は一様連続ではない．

(ii) $0 < a < 1$ とする．このとき，$f : [a,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $[a,1]$ で一様連続である．$[a,1]$ は有界閉区間だから，この主張は定理 2.4.9 によりしたがうが，直接計算で確かめてみよう．

任意の $x, y \in [a,1]$ に対して

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x-y|}{xy} \leq \frac{|x-y|}{a^2}$$

が成り立つ．$\forall \varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \varepsilon a^2$ ととれば，

$$x, y \in [a,1], \ |x-y| < \delta, \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

を得る．この δ は区間 $[a,1]$ の点には依存しない数である．ただし，a には依存していることに注意しよう．

第3章　1変数関数の微分

3.1　微分の定義

微分積分学を学ぶとき，最初に出てくる微分の定義は次のようなものであろう．

定義 3.1.1 $I = (a, b)$ を開区間，$f : I \to \mathbb{R}$ とする．

(i) f が $x_0 \in I$ で微分可能であるとは，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \tag{3.1.1}$$

が存在することである．α を f の x_0 における微分係数といい，α を

$$f'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad \frac{df}{dx}(x_0)$$

などと表す．

(ii) f が I の各点で微分可能であるとき，f は I で微分可能であるという．このとき，I で定義された関数

$$I \ni x \ \mapsto \ f'(x) \left(= \frac{df}{dx}(x) \right)$$

が定まる．この関数 f' $(= \frac{df}{dx}) : I \to \mathbb{R}$ を f の導関数または微分という．

上の定義の (3.1.1) 式を書き換えよう．f の x_0 における接線の方程式は，$y = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$ である． $y = f(x)$ とこの接線との「差」

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)$$

は

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{x - x_0} = 0, \text{ つまり } g(x) = o(x - x_0) \ \ (x \to x_0)$$

をみたす．（Landau の記号 $o(x-x_0)$ については節末を参照.）よって，(3.1.1) は

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + \alpha(x-x_0) + g(x), \\ \displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} = 0 \quad (g(x) = o(x-x_0)) \end{cases} \tag{3.1.2}$$

と同値である．(3.1.2) は，x_0 の近傍において，$f(x)$ が接線を定める 1 次式 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ で近似されることを表している．

直線 $y = f(x_0) + m(x-x_0)$ と $f(x)$ に対して，(3.1.2) より，

$$\frac{y-f(x)}{x-x_0} = m - f'(x_0) + \frac{g(x)}{x-x_0} \ \to\ m - f'(x_0) \quad (x \to x_0)$$

が成り立つ．したがって，$m \neq f'(x_0)$ ならば，

$$y - f(x) = (m - f'(x_0))\,(x-x_0) + g(x)$$

は，$x \to x_0$ のとき，$x-x_0$ の 1 次式程度の速さで 0 に収束する．ゆえに，$g(x)$ よりも収束の速さは遅い．つまり，x_0 の近傍で $f(x)$ を近似する直線のうち最も精度の高いものは接線であることがわかる．

3.2　平均値の定理と Taylor 展開

関数 $f(x)$ が与えられたとき，それをできるだけ正体のはっきりしたわかりやすい関数で近似できれば都合がよい．前節では，1 次関数で近似するときは，接線が最良の近似を与えることを見た．この節では，より精度を上げて多項式で近似することを考える．

まず，平均値の定理を想い起こそう．

定理 3.2.1 (平均値の定理)　f を閉区間 $[a,b]$ で連続，開区間 (a,b) で微分可能な関数とする．このとき，

$$\exists c \in (a,b) \text{ s.t. } f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

が成り立つ．

注意 3.2.2　$f(a)=f(b)$ のとき，定理 3.2.1 は **Rolle の定理**として知られる．

平均値の定理はさまざまな応用をもつ重要な定理である．その 1 つとして，平均値の定理を一般化した Taylor の定理を述べる．この定理は関数がなめらかであるほど，より精度の高い多項式近似ができることを主張している．

定理 3.2.3 (Taylor の定理)　f を開区間 (a,b) で n 回微分可能な関数とする．$x, x_0 \in (a,b)$ に対して $\exists\theta : 0<\theta<1$ s.t.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(\theta; x, x_0).$$

が成り立つ．ここで，$R_n(\theta;x,x_0)$ は**剰余項**と呼ばれ，$x \to x_0$ のとき，$R_n(\theta;x,x_0) = O(|x-x_0|^n)$ をみたすものである．$R_n(\theta;x,x_0)$ は次のように書ける．

(a) Roche-Schlömilch の剰余：$p \in \mathbb{N}$ として，

$$R_n(\theta;x,x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{p(n-1)!}(1-\theta)^{n-p}(x-x_0)^n,$$

(b) Lagrange の剰余：((a) $p=n$ のとき)

$$R_n(\theta;x,x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n,$$

(c) Cauchy の剰余：（(a) で $p=1$ のとき）

$$R_n(\theta; x, x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-x_0)^n.$$

注意 3.2.4 剰余項の θ は x, x_0, p に依存する数 $\theta = \theta(x, x_0, p)$ である．

定理 3.2.3 の証明 $x, x_0 \in I$, $p \in \mathbb{N}$ とする．$x > x_0$ としておく．

$$\lambda = \frac{1}{(x-x_0)^p}\left\{f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right\} \tag{3.2.1}$$

とおく．$t \in [x_0, x]$ に対して

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \lambda(x-t)^p$$

と定める．このとき，F は $[x_0, x]$ で連続，(x_0, x) で微分可能である．$F(x_0) = f(x) = F(x)$ だから，Rolle の定理より，$\exists c \in (x_0, x)$ s.t. $F'(c) = 0$ が成り立つ．ここで，$F'(t)$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
F'(t) &= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \lambda p(x-t)^{p-1} \\
&= -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \lambda p(x-t)^{p-1}
\end{aligned}$$

を得る．ある $\theta \in (0,1)$ を用いて $c = x_0 + \theta(x-x_0)$ と書けるから，$F'(c) = 0$ より

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{f^{(n)}(c)}{p(n-1)!}(x-c)^{n-p} \\
&= \frac{f^{(n)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{p(n-1)!}(1-\theta)^{n-p}(x-x_0)^{n-p}
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

を得る．(3.2.1) より

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \lambda(x-x_0)^p$$

であるから，これに (3.2.2) の λ を代入して結論を得る． □

注意 3.2.5 （**Taylor 展開**） f が x_0 の近傍で無限回微分可能であるとしよう．このとき，もし $R_n(\theta : x, x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$ であれば，$f(x)$ は次のように無限級数に展開できる．

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

この無限級数を $f(x)$ の x_0 を中心とする **Taylor 展開**という．とくに $x_0 = 0$ のときは **Maclaurin 展開**という．

x_0 の近傍を適当に選べば f が上のように展開されるとき，f は x_0 において **解析的**であるという．

注意 3.2.6 定理 3.2.3 とは異なる積分を用いた剰余項について述べよう．積分形の剰余項もしばしば有用である．

f を開区間 (a, b) で n 回微分可能な関数とする．このとき，$x, x_0 \in (a, b)$ 対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))\, d\theta$$

が成り立つ．

注意 3.2.6 の証明 微分積分学の基本定理と部分積分により，

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + \int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(x_0+\theta(x_0+\theta(x-x_0))\, d\theta \\
&= f(x_0) + \left(\int_0^1 f'(x_0+\theta(x_0+\theta(x-x_0))\, d\theta\right)(x-x_0) \\
&= f(x_0) - \left(\int_0^1 (1-\theta)' f'(x_0+\theta(x_0+\theta(x-x_0))\, d\theta\right)(x-x_0) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\
&\quad - \left(\int_0^1 (1-\theta)\left\{f'(x_0+\theta(x_0+\theta(x-x_0))\right\}'\, d\theta\right)(x-x_0) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\
&\quad + \left(\int_0^1 (1-\theta) f''(x_0+\theta(x_0+\theta(x-x_0))\, d\theta\right)(x-x_0)^2
\end{aligned}$$

を得る．さらに，部分積分により，

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 (1-\theta)\left(f''(x_0+\theta(x_0+\theta(x-x_0))\right) d\theta\right)(x-x_0)^2 \\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_0^1 \left\{(1-\theta)^2\right\}' f''(x_0+\theta(x_0+\theta(x-x_0))\,d\theta\right)(x-x_0)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (1-\theta)^2 \left\{f''(x_0+\theta(x_0+\theta(x-x_0))\right\}' d\theta\right)(x-x_0)^2 \\
&= \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (1-\theta)^2 f^{(3)}(x_0+\theta(x_0+\theta(x-x_0))\,d\theta\right)(x-x_0)^3
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (1-\theta)^2 f^{(3)}(x_0+\theta(x_0+\theta(x-x_0))\,d\theta\right)(x-x_0)^3
\end{aligned}
$$

を得る．以下，この操作を繰り返して結論を得る． □

補足：Landau の記号

$\lim_{x\to x_0} u(x) = 0$ のとき，$u(x)$ は x_0 において無限小であるいい，$u(x) = o(1)$ $(x \to x_0)$ または単に $u = o(1)$ と表す．

$\lim_{x\to x_0} u(x) = 0, \lim_{x\to x_0} v(x) = 0$ とする．$\lim_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 0$ が成り立つとき，x_0 において $u(x)$ は $v(x)$ より高位の無限小であるといい，$u(x) = o(v(x))$ $(x \to x_0)$ または単に $u = o(v)$ と表す．

ついでながら，x_0 のある近傍で $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ が有界であるとき，$u(x) = O(v(x))$ $(x \to x_0)$（または単に $u = O(v)$）と表す．さらに，ある定数 $m > 0, M > 0$ および x_0 のある近傍 U が存在して，$m \leq \left|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right| \leq M$ $(x \in U, x \neq x_0)$ が成り立つとき，u と v は 同位の無限小であるといい，$u(x) \sim v(x)$ $(x \to x_0)$ または単に $u \sim v$ と表す．

補充問題

問 1. f は x_0 で微分可能とする．$f(x)$ を x_0 の近傍において $x - x_0$ の 1 次式で近似することを考える．$f(x) - f(x_0) - m(x - x_0) = o(x - x_0)$ $(x \to x_0)$ となるのは，$m = f'(x_0)$ のときのみであることを示せ．

問 2. f は x_0 のある近傍で $n - 1$ 回微分可能で $f^{(n-1)}$ は x_0 において連続であるとする．このとき，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left(|x - x_0|^{n-1}\right) \quad (x \to x_0)$$

が成り立つことを示せ．

問 3. f は x_0 のある近傍 U において，n 回微分可能であり，$f^{(n)}$ は有界であるとする．このとき，ある定数 $M > 0$ が存在して，

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right| \leq \frac{M}{n!}|x - x_0|^n \quad (x \in U)$$

が成り立つことを示せ．

第4章　関数列の収束

4.1　関数列の各点収束と一様収束

区間 I で定義された関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の収束，極限について考えよう．

各 $x \in I$ ごとに数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が定まる．そこで，次の概念を導入する．

定義 4.1.1 $\forall x \in I$ に対して数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するとき，関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は I で各点収束するという．各 x に対する $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ の極限 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ によって定まる I 上の関数 f を極限関数という．このとき，

$$\text{各 } x \in I \text{ に対して } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad (I \text{ 上各点}),$$

$$f_n \to f \quad (I \text{ 上各点})$$

などと表す．

注意 4.1.2 各点収束を ε-N 論法で書くと，次のようになる．

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t } n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

ここで，注意すべきは，N は ε のみならず，一般に $x \in I$ にも依存して定まる数 $N = N(\varepsilon, x)$ であることである．

例 4.1.3 (i) $I = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ のとき，$f_n \to f$ （I 上各点）が成り立つ．ただし，

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in [0,1)) \\ 1 & (x = 1). \end{cases}$$

極限関数 f は I で連続ではないことに注意しよう．

(ii) $I=[0,\infty)$,

$$f(x)=\begin{cases}\sin(x-(n-1)\pi) & (x\in[(n-1)\pi, n\pi]) \\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

のとき，$f_n \to 0$ （I 上各点）が成り立つ．ここで，

$$\max_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)|=1, \qquad \int_0^\infty |f_n(x)|\,dx=2 \quad (\forall\, n)$$

が成り立つことに注意しよう．

(iii) $I=[0,\pi]$, $f_n(x)=\sin nx$ のとき，$\{f_n\}$ は各点収束しない．

(iv) $I=[0,2]$,

$$f(x)=\begin{cases} n^2x & (0\le x<\frac{1}{n}) \\ 2n-n^2x & (\frac{1}{n}\le x<\frac{2}{n}) \\ 0 & (\frac{2}{n}\le x\le 2)\end{cases}$$

のとき，$f_n \to 0$ （I 上各点）が成り立つ．ここで，

$$\max_{x\in[0,2]}|f_n(x)|=n \;\to\; \infty \quad (n\to\infty),$$

$$\int_0^2 |f_n(x)|\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}\times n=1 \quad (\forall\, n)$$

が成り立つことに注意しよう．

(v) $I=[0,\infty)$,

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{n^2}x & (0\le x<n) \\ \frac{1}{n^2}(n-x) & (n\le x<2n) \\ 0 & (2n\le x)\end{cases}$$

のとき，$f_n \to 0$ （I 上各点）が成り立つ．ここで，

$$\max_{x\in[0,\infty)}|f_n(x)|=\frac{1}{n} \;\to\; 0 \quad (n\to\infty),$$

$$\int_0^\infty |f_n(x)|\,dx=\frac{1}{2}\times 2n\times\frac{1}{n}=1 \quad (\forall\, n)$$

が成り立つことに注意しよう．

注意 4.1.4 関数列 $\{f_n\}$ が極限関数に ” 収束する ” ということは，n が十分大きいときに，f_n が f に ” 近い ” ということである．しかし，さまざまな意味の ” 近い ” がある．” 近い ” ということをより精密に $\{f_n\}$ がもつ性質まで込めて ” 近い ”（収束する）ということを考えたほうがよい状況が多々ある．関数 f を ” 近似 ” するときに，各点収束列では不十分であることは多くある．そこで，この稿では次に「一様収束」という概念を導入しよう．

定義 4.1.5 区間 I 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I 上の関数 f に<u>一様収束</u>するとは，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$$

が成り立つことである．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\ \text{（}I\ \text{上一様）},$$

$$f_n \to f\ \text{（}I\ \text{上一様）},$$

$$I\ \text{上で}\ \ f_n \rightrightarrows f$$

などと表す．一様収束を ε-N 論法で書くと，

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}\ \text{s.t}\ n\geq N\Rightarrow\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

である．

命題 4.1.6 次の (i) と (ii) は同値である．

(i) $f_n\to f$ （I 上一様）．

(ii) $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}\ s.t\ n\geq N\Rightarrow\forall x\in I$ に対して $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$

注意 4.1.7 ここで，注意すべきは，N は ε のみに依存して定まる数 $N=N(\varepsilon)$ であり，各点収束のときと異なって，$x\in I$ には依らないことである．

命題 4.1.6 の証明 (i) $\Rightarrow$ (ii): $\forall x\in I$ に対して $|f_n(x)-f(x)|\leq\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$ からしたがう．

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\forall x\in I$ に対して $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ ならば $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon$ が成り立つことからしたがう． □

注意 4.1.8 命題 4.1.6 (ii) を書き換えると，

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t } n \geq N \\ &\Rightarrow \forall x \in I \text{ に対して } f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon\end{aligned}$$

を得る．このことは f_n のグラフが f のグラフに収束することを示しているといってよい．各点収束は区間内の 1 点における関数の値の収束であるが，一様収束は定義域全体で一斉に収束していると考えられる．

注意 4.1.9 次のことは容易に確かめることができる．

$$f_n \to f \quad (I \text{ 上一様}) \quad \Rightarrow \quad f_n \to f \quad (I \text{ 上各点})$$

が成り立つ．逆は，一般に成り立たない．例 4.1.11 を参照．

問 4.1.10 f_n は f に I 上で各点収束し，$\{f_n\}$ が I 上で一様収束するならば，$\{f_n\}$ は f に I 上一様収束することを示せ．したがって，各点収束極限と一様収束極限は，もし両方とも存在するならば，それらは等しい．

例 4.1.11 例 4.1.3 の関数を考えよう．

(i) $f_n \to f$ （I 上各点）であるが，一様収束ではない．

(ii) $f_n \to f$ （I 上各点）であるが，一様収束ではない．

(iii) f_n は f に各点収束しないから，一様収束もしない．

(iv) $f_n \to f$ （I 上各点）であるが，一様収束ではない．

(v) $f_n \to f$ （I 上一様）である．

問 4.1.12 例 4.1.3 (iii) の $\{f_n\}, f$ について，

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f_n(x)\,dx, \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} |f_n(x)|\,dx$$

を調べよ．

例 4.1.13 $I = [0, \pi]$, $f_n = \frac{1}{n} \sin 2n\pi x$ のとき，$\sup_{x\in I} |f_n(x)| \leq 1/n \to 0$ だから，$f_n \to 0$ （I 上一様）である．また，

$$\left| \int_0^1 f_n(x)\,dx \right| \leq \int_0^1 |f_n(x)|\,dx \leq \int_0^1 \frac{1}{n}\,dx = \frac{1}{n} \to 0$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

が成り立つ．一方，$f_n'(x) = 2\pi\cos 2n\pi x,\ f'(x) = 0$ だから，f_n' は f' に各点収束しない． このような積分と極限操作の交換可能性および微分と極限操作の交換可能性は重要な問題である．このことは次節で考察する．

問 4.1.14 次の関数列 $\{f_n\}$ の各点収束および一様収束について調べよ．また，導関数の列 $\{f_n'\}$ についても同じことを調べよ．

(i) $I = [0,1],\ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}.$

(ii) $I = [0,1],\ f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}.$

(iii) $I = [0,1],\ f_n(x) = \dfrac{1}{2n}\log(1+n^2x^2).$

一様 Cauchy 条件

数列が収束するかどうかを見るには,「Cauchy 列は収束する」という Cauchy の判定条件というものがあった．関数列について対応する条件を与えよう．

定理 4.1.15 **（一様 Cauchy 条件）** 次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i) $\{f_n\}$ は I 上で一様収束する．

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $m, n \geq N \Rightarrow \sup\limits_{x\in I}|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

(iii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

$$m, n \geq N \Rightarrow \forall x \in I \text{ に対して } |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

証明 (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) は命題 4.1.6 と同様にして証明できる．

(i) $\Rightarrow$ (ii) : $\{f_n\}$ は I 上で f に一様収束するとしよう．このとき，

$$\sup_{x\in I}|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sup_{x\in I}|f_m(x) - f(x)| + \sup_{x\in I}|f(x) - f_n(x)|$$

より，(ii) は容易にしたがう．

(iii) $\Rightarrow$ (i)：(iii) が成り立つとすると，各 $x \in I$ に対して数列 $\{f_n(x)\}$ は Cauchy 列だから，

$$\exists f(x) \in \mathbb{R} \text{ s.t. } f_n(x) \to f(x) \ (n \to \infty)$$

が成り立つ．各 $x \in I$ に対する極限 $f(x)$ は I 上の関数 f を定め，$f_n \to f$（I 上各点）であることがわかる．

$f_n \to f$ （I 上一様）であることを示そう．(iii) において $n \to \infty$ とすると，$f_n(x) \to f(x)$ だから，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t } m \geq N \Rightarrow \forall x \in I \text{ に対して } |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

を得る．命題 4.1.6 より，$f_n \to f$ （I 上一様）が成り立つ． □

4.2 一様収束極限の性質

定理 4.2.1 連続関数列の一様収束極限は連続関数である．すなわち，

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対して } f_n \text{ は } I \text{ 上連続,} \\ f_n \to f \quad (I \text{ 上一様}) \end{cases}$$

ならば，f は I 上連続である．したがって，任意の $x_0 \in I$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

が成り立つ．

証明 $x_0 \in I$ とする．$f_n \to f$ （I 上一様）だから，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall x \in I \text{ に対して } |f(x) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．f_N は x_0 で連続だから，

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } |x - x_0| < \delta,\, x \in I \ \Rightarrow \ |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成り立つ．したがって，$|x - x_0| < \delta$, $x \in I$ ならば，

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| \\ &\quad + |f_N(x) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

を得る．よって f は x_0 で連続である．$x_0 \in I$ は任意ゆえ f は I で連続である． □

例 4.2.2 $I = [0, 2]$ とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して f_n を

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \left(x \in [0, 1 - \frac{1}{n})\right) \\ n(x - 1 + \frac{1}{n}) & \left(x \in [1 - \frac{1}{n}, 1)\right) \\ 1 & (x \in [1, 2]) \end{cases}$$

によって定めると，f_n は I 上で連続である．このとき，$\{f_n\}$ は一様収束しない．実際，

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \in [0, 1)) \\ 1 & (x \in [1, 2]) \end{cases}$$

とすると，$f_n \to f$ （I 上各点）が成り立つ．f は I 上で連続ではないから，$\{f_n\}$ は一様収束しない．

注意 4.2.3 定理 4.1.15 と定理 4.2.1 より次のことがわかる．$\mathbb{R}$ において「Cauchy 列は収束する」という条件は実数の完備性を示すものであり，実数全体には穴がないことを意味するのであった．$I=[a,b]$ 上の連続関数全体の集合を $C(I)$ と書くことにしよう．定理 4.1.15 と定理 4.2.1 より $C(I)$ における "一様 Cauchy 列" は $C(I)$ の元に収束する．$C(I)$ の 2 つの元 f, g に対して $\rho(f,g)=\sup_{x\in I}|f(x)-g(x)|$ とおくと，ρ は問 1.3.8 の意味で $C(I)$ 上の距離になっている．一様収束の定義および定理 4.1.15 と定理 4.2.1 より，この ρ の意味で「$C(I)$ の Cauchy 列は収束する」のである．したがって，この ρ で測ったとき $C(I)$ は完備であり，穴のない空間である．

しかし，連続関数の集合 $C(I)$ も測り方を変えると事情が異なってくる．$C(I)$ の 2 つの元 f, g に対して，$\rho_1(f,g)=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$ によって f と g の近さを測ろう．この ρ_1 も問 1.3.8 の意味で $C(I)$ 上の距離になっている．$I=[0,2]$ とし，$\{f_n\}\subset C(I)$ を例 4.2.2 の関数列，f を例 4.2.2 において与えられた $\{f_n\}$ の各点収束極限とする．このとき，$m,n\in\mathbb{N}$, $m>n$ ならば，

$$\int_0^2|f_m(x)-f_n(x)|\,dx=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2m}\ \to\ 0\ (m,n\to\infty)$$

であるから，$\{f_n\}$ はこの ρ_1 の意味で "Cauchy 列" である．また，

$$\int_0^2|f_n(x)-f(x)|\,dx=\frac{1}{2n}\ \to\ 0\ (n\to\infty)$$

であるから，ρ_1 の意味で $\{f_n\}$ は $n\to\infty$ のとき f に収束する．しかし，f は I 上で連続ではないから，$\{f_n\}$ は ρ_1 の意味で極限 f に限りなく近づいても $C(I)$ の中では極限を見つけることができない．$C(I)$ は ρ_1 で測ると穴があり，完備ではないのである．この事情は $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ との関係に類似しているが，$\mathbb{R}$ に相当するものを見つけるには Lebesgue 積分論を待たねばならない．

定理 4.2.4 $I=[a,b]$ を有界閉区間とし，$\{f_n\}$ を I 上の連続関数の列とする．このとき，$\{f_n\}$ が f に I 上で一様収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つ．つまり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\,dx$ が成り立つ．

証明 $\{f_n\}$ は f に I 上で一様収束するから，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

が成り立つ．したがって，$n \geq N$ ならば，

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| &= \left| \int_a^b \left(f_n(x) - f(x)\right)\,dx \right| \\
&\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \\
&\leq \int_a^b \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)|\,dx \\
&\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon
\end{aligned}$$

を得る．ゆえに，

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

が成り立つ． □

定理 4.2.5 $\{f_n\}$ を区間 $I = [a, b]$ 上の連続関数の列とし，$\{f_n\}$ は次の (i), (ii), (iii) をみたすものとする．

(i) $f_n \to f$ （I 上各点）

(ii) f_n の導関数 f_n' は I で連続

(iii) f_n' は I 上一様収束する．

このとき，次のことがが成り立つ．

(a) $f_n \to f$ （I 上一様）

(b) f は I で連続な導関数 f' をもつ

(c) $f_n' \to f'$ （I 上一様） $\left(\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} f_n = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} f_n \text{（} I \text{ 上一様）} \right)$

証明 f_n' の 一様収束極限を g とする．任意に $x \in I = [a, b]$ をとる．f_n' は $[a, x]$ で連続であり，$f_n' \to g$ （$[a, x]$ 上一様）だから，定理 4.2.4 より，

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\, dt = \int_a^x g(t)\, dt$$

を得る．一方で，$f_n \to f$ （I 上各点） より，

$$\int_a^x f_n'(t)\, dt = f_n(x) - f_n(a) \ \to \ f(x) - f(a) \quad (n \to \infty)$$

を得る．これより，

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\, dt$$

が成り立つ．g は $[a, b]$ 上連続だから，f は $[a, b]$ 上で微分可能であり，$f' = g$ が成り立つ．さらに，任意の $x \in I$ に対して，$f_n(x) = f_n(a) + \displaystyle\int_a^x f_n'(t)\, dt$ であるから，

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\, dt - f(a) - \int_a^x g(t)\, dt \right| \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + \int_a^b \sup_{t\in I} |f_n'(t) - g(t)|\, dt \\ &= |f_n(a) - f(a)| + (b - a) \sup_{t\in I} |f_n'(t) - g(t)| \end{aligned}$$

を得る．したがって，

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - f(a)| + (b - a) \sup_{t\in I} |f_n'(t) - g(t)|$$

を得る．ここで，$f_n(a) \to f(a)$，$f_n' \to g$ （I 上一様）だから，

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N$ ならば，

$$|f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sup_{t\in I} |f_n'(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

が成り立つ．よって，$n \geq N$ ならば，

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

を得る． □

4.3 関数項級数

この節では関数列により定まる級数を考える．

定義 4.3.1 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を区間 I で定義された関数列とする．各 $x \in I$ に対して級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

の部分和 $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ が $S(x)$ に収束するとすれば，I 上の極限関数 S が定まる．このとき，

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

と書き，関数項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上で<u>各点収束</u>するという．$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I 上で S に一様収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上で<u>一様収束</u>するという．

定理 4.3.2 次の (i) と (ii) は同値である．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上一様収束する

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ $s.t.$ $m > n \geq N$ ならば $\displaystyle\sup_{x \in I} \left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| < \varepsilon$

証明 $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ とすると，$m > n$ に対して

$$S_m(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)$$

だから，定理 4.1.15 からしたがう． □

定理 4.2.1 から関数項級数と連続性との次の関係を得る．

定理 4.3.3 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して f_n は I で連続，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上一様収束するとする．このとき，$S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ も I で連続である．つまり，各 $x_0 \in I$ に対して，$\displaystyle\lim_{x \to x_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$ が成り立つ．

定理 4.2.4 から関数項級数と積分との次の関係 (項別積分可能性）を得る．

定理 4.3.4 (項別積分可能性） 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して f_n は有界閉区間 $I = [a, b]$ で連続，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上一様収束するとする．このとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx$$

が成り立つ．

定理 4.2.5 から関数項級数と微分との次の関係 (項別微分可能性）を得る．

定理 4.3.5 （項別微分可能性） $\{f_n\}$ を $I = [a, b]$ 上の連続関数の列とし，次の (i), (ii), (iii) が成り立つとする．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上で各点収束する

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して f_n の導関数 f_n' は I で連続

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ は I 上一様収束する

このとき，次の (a), (b), (c) が成り立つ．

(a) $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上で一様収束する

(b) S は I で連続な導関数 S' をもつ

(c) $S' = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$，言い換えれば，$\displaystyle\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dx}$

次に関数項級数が一様収束するかどうかを判定するときにしばしば用いられる重要な判定条件を述べよう．

定理 4.3.6 （Weierstrass の優級数定理） $\{f_n\}$ を区間 I 上の関数列とする．このとき，

$$\exists\{M_n\}: \text{数列 s.t.}$$

$$\begin{cases} \text{任意の } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } \sup_{x\in I}|f_n(x)| \le M_n, \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ は収束する}, \end{cases}$$

ならば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ は } I \text{ 上一様収束する．また，絶対収束もする．}$$

証明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ は収束するから，

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m > n \ge N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$$

が成り立つ．仮定より，

$$\sup_{x\in I}\left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{m}\sup_{x\in I}|f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$$

を得る．したがって，定理 4.3.2 より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上一様収束する．また，上の議論より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は I 上絶対収束することもわかる． □

4.4 整級数

この節では，とくに断らない限り，関数列は $n=0$ から始まる $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える．したがって，関数項級数は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ と書く．

定義 4.4.1 $a,\, a_n$ $(n=0,1,\cdots)$ を実定数とする．関数列 $\{a_n(x-a)^n\}_{n=0}^{\infty}$ から定まる関数項級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

を<u>整級数</u>または<u>冪級数</u>といい，a をその<u>中心</u>という．(a のまわりの整級数ということもある．)

整級数の収束について考えよう．この節では，注意 1.3.7 で述べたように，

$$\text{数列 } \{a_n\} \text{ が上に有界でないときは，} \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \infty$$

とする．

定理 4.4.2 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対して，次のことが成り立つ．

(i) $x_0 \neq 0$ とする．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = x_0$ で収束すれば，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < |x_0|$ をみたす任意の x に対して絶対収束する．

さらに，$0 < r < |x_0|$ をみたす任意の r に対して，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は区間 $[-r, r]$ 上で一様収束する．

(ii) $x_0 \neq 0$ とする．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $x = x_0$ で発散すれば，$|x| > |x_0|$ をみたす任意の x に対して発散する．

証明 (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $x = x_0 \neq 0$ で収束するから，$a_n x_0^n \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．したがって，

$$\exists M > 0 \text{ s.t. } \forall n = 0, 1, \cdots \text{ に対して } |a_n x_0^n| \leq M$$

を得る．$0<r<|x_0|$ をみたす任意の r をとる．$|x|\le r$ のとき，

$$|a_nx^n|=|a_nx_0^n|\left(\frac{|x|}{|x_0|}\right)^n\le M\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n$$

が成り立つ．したがって，

$$\sup_{x\in[-r,r]}|a_nx^n|\le M\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n$$

を得る．$\dfrac{r}{|x_0|}<1$ だから，

$$\sum_{n=0}^{\infty}M\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n=M\left(1-\frac{r}{|x_0|}\right)^{-1}<\infty$$

である．したがって，Weierstrass の優級数定理（定理 4.3.6）より，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は $[-r,r]$ 上で一様かつ絶対収束する．$0<r<|x_0|$ は任意だから，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は $|x|<|x_0|$ に対して絶対収束する．

(ii) $x=x_0$ で $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は発散するとする．もし，$|x_1|>|x_0|$ をみたす x_1 で $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ が収束したとすると，(i) より $|x|<|x_1|$ をみたす x で $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は収束する．$|x_0|<|x_1|$ だから，仮定に反する．したがって，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は $|x|>|x_0|$ をみたす任意の x に対して発散する． □

定理 4.4.2 より，整級数の収束発散に関して次を得る．

定理 4.4.3 $A\subset\mathbb{R}$ を整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ が収束するようなすべての $x\in\mathbb{R}$ からなる集合とする．$\rho\in[0,\infty]$ を

$$\rho=\begin{cases}\sup\{|x-a|:x\in A\} & (A\neq\emptyset \text{ のとき})\\ 0 & (A=\emptyset \text{ のとき})\end{cases}$$

と定める．このとき，次の (a) と (b) が成り立つ．

(a) $|x-a|<\rho \;\Rightarrow\; \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ は絶対収束する．

(b) $|x-a|>\rho \;\Rightarrow\; \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ は発散する．

さらに，$\rho>0$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ は $0<r<\rho$ をみたす各 r に対して区間 $[a-r,a+r]=\{x:|x-a|\leq r\}$ で一様収束する．

定理 4.4.3 において，$\rho=0$ ならば，すべての $x\neq a$（つまり，$|x-a|>0$）で整級数は発散する． また，$\rho=\infty$ のとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ はすべての $x\in\mathbb{R}$ に対して絶対収束し，各 $r>0$ に対して $\{x:|x-a|\leq r\}$ 上で一様収束する．

注意 4.4.4 定理 4.4.3 の (a) と (b) をみたす ρ はただ 1 つに定まる．実際，$\rho'\in(0,\infty)$ が同じ性質 (a) と (b) をもつとする．このとき，たとえば，$\rho<\rho'$ とすると，$\rho<r<\rho'$ をみたす r が存在し，$|x-a|=r$ をみたす x に対して，$\rho<r$ より発散，$r<\rho'$ より収束，となるから矛盾である．$\rho'<\rho$ の場合も同様であるから，$\rho=\rho'$ を得る．

定理 4.4.3 における ρ に名前をつけよう．

定義 4.4.5 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ に対して，$A\subset\mathbb{R}$ をこの整級数が収束するようなすべての $x\in\mathbb{R}$ からなる集合とする．$\rho\in[0,\infty]$ を

$$\rho=\begin{cases}\rho=\sup\{|x-a|:x\in A\} & (A\neq\emptyset \text{ のとき})\\ 0 & (A=\emptyset \text{ のとき})\end{cases}$$

と定める．ρ を整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の<u>収束半径</u>という．

定理 4.4.6 （Cauchy-Hadamard の定理） 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径を ρ とする．このとき，

$$\rho=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

が成り立つ．ただし，$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ のときは $\rho = \infty$ とし，$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ のときは $\rho = 0$ とする．

証明 $d = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ とおく．$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} = d|x-a|$ だから，定理 1.5.11 より，

$$\begin{aligned} d|x-a| < 1 &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ は絶対収束} \\ d|x-a| > 1 &\Rightarrow \text{数列 } \{a_n(x-a)^n\} \text{ は } 0 \text{ に収束しない} \\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ は発散する} \end{aligned}$$

であるから，定理の結論を得る． □

注意 4.4.7 $|x-a| = \rho$ をみたす x については収束する場合もあるし，発散する場合もある．

整級数の項別微分と項別積分については，定理 4.3.4，定理 4.3.5，定理 4.4.3，定理 4.4.6 より次のことが成り立つ．

定理 4.4.8 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ の収束半径 ρ が $\rho > 0$ をみたすとき，区間 $(a-\rho, a+\rho)$ 上の関数 f が，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

によって定義され，f は $(a-\rho, a+\rho)$ で無限回微分可能であり，$x \in (a-\rho, a+\rho)$, $k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k}\, a_n(x-a)^n = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}$$

が成り立つ．ここで，右辺の整級数の収束半径は ρ である．また，f は項別積分可能であり，$x \in (a-\rho, a+\rho)$ に対して，

$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n(t-a)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

が成り立つ．ここで，右辺の整級数の収束半径は ρ である．

第5章　多変数関数の微分

5.1　2 次元ユークリッド空間

以下，2 次元ユークリッド空間の場合を考えるが，n 次元ユークリッド空間の場合も同様である．

2 の実数の組 ${}^\top(x_1, x_2)$ からなる集合を $\mathbb{R}^2$ で書くことにする．ここで，${}^\top\cdot$ は転置を表す．$\mathbb{R}^2$ の点は，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ などと太字を用いることにする．

$$\mathbb{R}^2 = \{\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

$\alpha \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} = {}^\top(x_1, x_2), \boldsymbol{y} = {}^\top(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して，和，スカラー倍を，

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = {}^\top(x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad \alpha\boldsymbol{x} = {}^\top(\alpha x_1, \alpha x_2)$$

と，それぞれ定めると $\mathbb{R}^2$ は実ベクトル空間となる．$\mathbb{R}^2$ の零ベクトル $\mathbf{0}$ は $\mathbf{0} = {}^\top(0, 0)$ である．

$\boldsymbol{x} = {}^\top(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

と定める．$|\boldsymbol{x}|$ を $\boldsymbol{x}$ の<u>長さ</u>または<u>ノルム</u>という．

長さ $|\cdot|$ は次の性質をもつ．

(i)　$|\boldsymbol{x}| \geq 0$;　$|\boldsymbol{x}| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,

(ii)　$|\alpha\boldsymbol{x}| = |\alpha||\boldsymbol{x}|$,

(iii)　$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$　（三角不等式）.

問 5.1.1 長さ $|\cdot|$ が上の性質 (i), (ii), (iii) をもつことを示せ．

距離　$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ を，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

と定めると，d は問 1.3.8 で定めた距離であり，次の (i), (ii), (iii) が成り立つ.

(i)　$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,

(ii)　$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$,

(iii)　$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ に対して，$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

問 5.1.2 d が上の性質 (i), (ii), (iii) をもつことを示せ.

d をユークリッドの距離といい，ユークリッドの距離を備えたベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ を**2 次元ユークリッド空間**という.

定義 5.1.3 （近傍） $\varepsilon > 0$ に対して

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{x}, \varepsilon) &= \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \varepsilon\} \\ &= \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

を $\boldsymbol{x}$ のε 近傍という．$\mathbb{R}^2$ の部分集合 V が $\boldsymbol{x}$ のある ε 近傍を含むとき，V を $\boldsymbol{x}$ の近傍という.

定義 5.1.4 （収束） $\mathbb{R}^2$ の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ に対して，

$$d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_0) = |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0| \;\to\; 0 \;\; (n \to \infty)$$

が成り立つとき，$\{\boldsymbol{x}_n\}$ は $\boldsymbol{x}_0$ に収束 するといい，

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_0 \quad \text{または} \quad \boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0 \; (n \to \infty)$$

と表す．$\boldsymbol{x}_0$ を $\{\boldsymbol{x}_n\}$ の極限という.

問 5.1.5 $\boldsymbol{x}_n = {}^{\top}(x_n, y_n)$, $\boldsymbol{x}_0 = {}^{\top}(x_0, y_0)$ とするとき，

$$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0 \; (n \to \infty)$$

であるための必要十分条件は，

$$x_n \;\to\; x_0 \; (n \to \infty) \text{ かつ } y_n \;\to\; y_0 \; (n \to \infty)$$

が成り立つことであることを示せ.

定義 5.1.6 （有界集合） $A \subset \mathbb{R}^2$ とする．

$$\exists R > 0 \text{ s.t. } A \subset U(0, R)$$

が成り立つとき，A は有界であるという．言い換えれば，$A \subset \mathbb{R}$ が有界であるとは，

$$\exists R > 0 \text{ s.t. } \forall \boldsymbol{x} \in A \text{ に対して } |\boldsymbol{x}| \leq R$$

が成り立つことである．

定義 5.1.7 （内部，外部，境界，閉包） $A \subset \mathbb{R}^2$ とする．

(i) $\boldsymbol{x}$ が A の内点であるとは，

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } U(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset A$$

が成り立つことである．A の内点全体の集合を A の内部という．A の内部を A° と表す．

$$A^\circ := A \text{ の内点全体の集合}.$$

(ii) $\boldsymbol{x}$ が A の外点であるとは，

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } U(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \subset A^{\mathrm{c}}$$

が成り立つことである．ただし，$A^{\mathrm{c}} = \mathbb{R}^2 \setminus A$ である．A の外点全体の集合を A の外部という．A の外部を A^{e} と表す．

$$A^{\mathrm{e}} := A \text{ の外点全体の集合}.$$

(iii) $\boldsymbol{x}$ が A の内点でもなく，外点でもないとき，$\boldsymbol{x}$ を A の 境界点であるという．A の境界点全体の集合を A の境界という．A の境界を ∂A と表す．

$$\partial A := A \text{ の境界点全体の集合}.$$

(iv) $\boldsymbol{x}$ が A の触点であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して } U(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

が成り立つことである． A の触点全体の集合を A の閉包という．A の閉包を $\overline{A}$ と表す．

$$\overline{A} := A \text{ の触点全体の集合}.$$

注意 5.1.8 外点，境界点，触点について，次が成り立つことは容易にわかる．

(ii)′ $\boldsymbol{x}$ が A の外点であるための必要十分条件は，$\exists\varepsilon>0$ s.t. $U(\boldsymbol{x},\varepsilon)\cap A=\emptyset$ が成り立つことである．

(iii)′ $\boldsymbol{x}$ が A の境界点であるための必要十分条件は，$\exists\varepsilon>0$ s.t. $U(\boldsymbol{x},\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ かつ $U(\boldsymbol{x},\varepsilon)\cap A^{\mathrm{c}}\neq\emptyset$ が成り立つことである．

(iv)′ $\boldsymbol{x}$ が A の触点であるための必要十分条件は，$\exists\{\boldsymbol{x}_n\}\subset A$ s.t. $\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}$ が成り立つことである．

注意 5.1.9 触点と集積点との関係を述べる．1.2 節の最後に $\mathbb{R}$ の部分集合の集積点の定義を与えたが，$\mathbb{R}^2$ でも（一般の $\mathbb{R}^n$ でも）同様に定義される．$A\subset\mathbb{R}^2$ とする．点 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ が A の集積点であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$U(\boldsymbol{x},\varepsilon)\cap(A\setminus\{\boldsymbol{x}\})\neq\emptyset$$

が成り立つことである．したがって，A の触点は A の点または A の集積点である．

定義 5.1.10 （開集合，閉集合） $A\subset\mathbb{R}^2$ とする．

(i) $\forall\boldsymbol{x}\in A$ が A の内点であるとき，A は開集合であるといわれる．

(ii) A^{c} が開集合であるとき，A は閉集合であるといわれる．

閉集合の次の特徴づけはよく用いられる．

命題 5.1.11 次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i) A は閉集合である．

(ii) 「$\{\boldsymbol{x}_n\}\subset A,\ \boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}_0\ (n\to\infty)\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x}_0\in A$ 」が成り立つ．

(iii) $A=\overline{A}$.

問 5.1.12 命題 5.1.11 を証明せよ．

例 5.1.13 $U(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ は開集合である．

例 5.1.14 $A=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2:|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\leq\varepsilon\}$ は閉集合であり，A の境界 ∂A は $\partial A=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2:|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=\varepsilon\}$ である．また，$A=\overline{U(\boldsymbol{x},\varepsilon)}=U(\boldsymbol{x},\varepsilon)\cup\partial A$ が成り立つ．

例 5.1.15 $A = \{\boldsymbol{x} = {}^\top(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q},\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ は内点をもたない．また，$\partial A = \{\boldsymbol{x} = {}^\top(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ である．

開集合，閉集合などについては別に補足資料を配布する．興味のある人はそちらも参照してください．

Bolzano-Weierstrass の定理の $\mathbb{R}^2$ 版を述べよう．

定理 5.1.16 $\mathbb{R}^2$ の有界な点列は収束する部分列をもつ．

証明 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ を $\mathbb{R}^2$ の有界な点列とすると，

$$\exists\, M > 0 \text{ s.t. } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ に対して } |\boldsymbol{x}_n| \leq M$$

が成り立つ．したがって，$\boldsymbol{x}_n = {}^\top(x_n, y_n)$ とすると，$\forall\, n \in \mathbb{N}$ に対して $|x_n| \leq M, |y_n| \leq M$ が成り立つ．よって，$\{x_n\}$ は $\mathbb{R}$ の有界数列だから，$\mathbb{R}$ に対する Bolzano-Weierstrass の定理（定理 1.2.20）より，$\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_k}\}$ と $x_0 \in \mathbb{R}$ で，$x_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$ をみたすものが存在する．$\{y_{n_k}\}$ も $\mathbb{R}$ の有界数列だから，$\{y_{n_k}\}$ の部分列 $\{y_{n'_k}\}$ と $y_0 \in \mathbb{R}$ で，$y_{n'_k} \to y_0$ $(k \to \infty)$ をみたすものが存在する．$\{x_{n'_k}\}$ は $\{x_{n_k}\}$ の部分列だから，$x_{n'_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$ をみたす．したがって，$\boldsymbol{x}_{n'_k} = {}^\top(x_{n'_k}, y_{n'_k})$, $\boldsymbol{x}_0 = {}^\top(x_0, y_0)$ とおくと，$\{\boldsymbol{x}_{n'_k}\}$ は $\{\boldsymbol{x}_n\}$ の部分列であり，$\boldsymbol{x}_{n'_k} \to \boldsymbol{x}_0$ $(k \to \infty)$ が成り立つ． □

次に，$\mathbb{R}^2$ が穴のない完備な空間であることを見るために Cauchy 列を導入しよう．

定義 5.1.17 **（Cauchy 列）**$\{\boldsymbol{x}_n\}$ が $\mathbb{R}^2$ の<u>Cauchy 列</u>であるとは，

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m, n \geq N \Rightarrow |\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n| < \varepsilon$$

が成り立つことである．

$\mathbb{R}^2$ の収束列が Cauchy 列であることは容易に示すことができる．逆の成立は，$\mathbb{R}$ の完備性を基づく．

定理 5.1.18 $\mathbb{R}^2$ の任意の Cauchy 列 は収束する．

証明 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ を Cauchy 列とする．$\boldsymbol{x}_n = {}^\top(x_n, y_n)$ とおくと，$\{x_n\}, \{y_n\}$ はともに $\mathbb{R}$ の Cauchy 列だから，

$$\exists\, x_0, y_0 \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x_n \to x_0,\, y_n \to y_0\ (n \to \infty)$$

が成り立つ．$\boldsymbol{x}_0 = {}^\top(x_0, y_0)$ とおけば，$\{\boldsymbol{x}_n\}$ は $\boldsymbol{x}_0$ に収束する． □

定理 5.1.18 により $\mathbb{R}^2$ が穴のない完備な空間である．

注意 5.1.19 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} = {}^\top(x_1, \cdots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

の場合は，

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$
$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$$

と定めると，$n = 2$ の場合と同様にして n 次元ユークリッド空間が導入される．開集合，閉集合，$\cdots$，なども同様に定義され，定理 5.1.16，定理 5.1.18 も成立し，$\mathbb{R}^n$ は完備な空間であることがわかる．

5.2　関数の極限と連続性

x_1, x_2 の 2 変数関数 $f(x_1, x_2)$ を $\boldsymbol{x} = {}^\top(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ の関数と見なして $f(\boldsymbol{x})$ とも表すことにする．

定義 5.2.1 $A \subset \mathbb{R}^2$ とし，$f : A \to \mathbb{R}$ とする．

(i) $\boldsymbol{a} \in \overline{A}$ とする．<u>$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{a}$ に近づくときの $f(\boldsymbol{x})$ の極限が α</u>であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } 0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta, \boldsymbol{x} \in A \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つことである．このとき，

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = \alpha \text{ または } f(\boldsymbol{x}) \to \alpha \ (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a})$$

と表す．

(ii) $\boldsymbol{a} \in A$ に対して，$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a})$ が成り立つとき，f は <u>$\boldsymbol{a}$ で連続</u>であるという．A の各点で f が連続であるとき，f は <u>A で連続</u>であるという．

注意 5.2.2 f が A で連続あることは，ε-δ 論法で次のように書ける．

$$\forall \boldsymbol{a} \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta, \boldsymbol{x} \in A \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{a})| < \varepsilon.$$

ここで，δ は一般に $\boldsymbol{a}$ と ε の両方に依存して決まる数 $\delta = \delta(\varepsilon, \boldsymbol{a})$ であることに注意しておく．

次に一様連続性の定義を与える．

定義 5.2.3 f が A で<u>一様連続</u> であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < \delta, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A \Rightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| < \varepsilon$$

が成り立つことである．

注意 5.2.4 一様連続性における δ は ε のに依存して決まる数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ であり，A の各点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ には依らない．(もちろん，f の定義域 A 自身には依存するが，A 内の点 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対しては一様にとれる．)

連続関数の重要な性質として次の 5 つの定理をあげておく.

定理 5.2.5 $f : A \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \overline{A}$ とする. このとき, 次の (i) と (ii) は同値である.

(i) $f(\boldsymbol{x}) \to \alpha$ $(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a})$.

(ii) $\boldsymbol{x}_n \neq \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{a}$ $(n \to \infty)$ をみたす任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset A$ に対して, $f(\boldsymbol{x}_n) \to \alpha$ $(n \to \infty)$ が成り立つ.

定理 5.2.5 の証明は 1 変数関数の場合と同様である. 次の定理も 1 変数関数の場合と同じようにして証明される.

定理 5.2.6 $f : A \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in A$ とする. このとき, 次の (i) と (ii) は同値である.

(i) f は $\boldsymbol{a}$ で連続である.

(ii) $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{a}$ $(n \to \infty)$ をみたす任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\} \subset A$ に対して, $f(\boldsymbol{x}_n) \to f(\boldsymbol{a})$ $(n \to \infty)$ が成り立つ.

次の 3 つの定理は, 1 変数関数の場合と同様に, 命題 5.1.11（閉集合の特徴づけ）と定理 5.1.16（Bolzano-Weirestrass の定理）を用いて証明することができる.

定理 5.2.7 K を有界閉集合とし, $f : K \to \mathbb{R}$ を K 上の連続関数とする. このとき, f は K で有界である. すなわち,

$$\exists\, M > 0 \text{ s.t. } \forall \boldsymbol{x} \in K \text{ に対して } |f(\boldsymbol{x})| \leq M$$

が成り立つ.

定理 5.2.8 K を有界閉集合とし, $f : K \to \mathbb{R}$ を K 上の連続関数とする. このとき, f は K 上で最大値と最小値を必ずとる.

定理 5.2.9 K を有界閉集合とし, $f : K \to \mathbb{R}$ を K 上の連続関数とする. このとき, f は K 上で一様連続である.

5.3　2 変数関数の微分，偏微分

復習 $\boldsymbol{A} = (a_1, a_2)$（行ベクトル）, $\boldsymbol{b} = {}^\top(b_1, b_2)$（列ベクトル） に対して，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{b}$ の積 $\boldsymbol{Ab}$ は,

$$\boldsymbol{Ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \sum_{j=1}^{2} a_j b_j$$

であった．

定義 5.3.1 Ω を $\mathbb{R}^2$ の開集合，$\boldsymbol{a} \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ とする．

$$\exists\, \boldsymbol{A} = (\alpha, \beta) \text{ s.t. } f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{Ah} + o(|\boldsymbol{h}|) \quad (|\boldsymbol{h}| \to 0)$$

が成り立つとき，f は $\boldsymbol{a}$ で微分可能（または全微分可能）であるという．$\boldsymbol{A}$ を f の $\boldsymbol{a}$ における微分係数といい,

$$Df(\boldsymbol{a}), \quad f'(\boldsymbol{a}), \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a})$$

などと表す．

f が Ω の各点 $\boldsymbol{x}$ で微分可能であるとき，写像

$$Df : \Omega \ni \boldsymbol{x} \ \mapsto\ Df(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^2$$

が定まる．Df を f の導関数または微分という．

注意 5.3.2 f が微分可能ならば，f は連続である．

命題 5.3.3 f が $\boldsymbol{a} = {}^\top(a_1, a_2)$ で微分可能ならば,

$$Df(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a})\right)$$

が成り立つ．ここで，$\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ $(j = 1, 2)$ は $\boldsymbol{a}$ における f の x_j に関する偏微分係数であり,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) = \lim_{x_1 \to a_1} \frac{f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)}{x_1 - a_1},$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) = \lim_{x_2 \to a_2} \frac{f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)}{x_2 - a_2}$$

で与えられる．

証明 微分の定義において，$\boldsymbol{h} = {}^\top(h, 0)$ および $\boldsymbol{h} = {}^\top(0, h)$ ととれば，結論を得る． □

定義 5.3.4 ${}^\top Df(\boldsymbol{a}) = {}^\top\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a})\right)$ を f の $\boldsymbol{a}$ における<u>勾配</u>といい，

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) \text{ または } \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a})$$

と表す．すなわち，

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = \operatorname{grad} f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

である．また，$\boldsymbol{a}$ において偏微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})$ $(j = 1, 2)$ が存在するとき，f は $\boldsymbol{a}$ で x_j に関して<u>偏微分可能</u>であるという．

注意 5.3.5 f が 微分可能ならば，f は x_1 と x_2 に関して偏微分可能であるが，逆は必ずしも成り立たない．

5.4　ベクトル値関数（写像）の微分

Ω を $\mathbb{R}^2$ の開集合とし，$j = 1, \cdots, m$ に対して，$f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ とする．このとき，ベクトル値関数（$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^m$ への写像）

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} : \Omega \ni \boldsymbol{x} \ \mapsto \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

が定まる．この節では $\boldsymbol{f}$ の微分を考える．

以下，$\mathbb{R}^n$ 上のノルム $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ $(\boldsymbol{x} = {}^\top(x_1, \cdots, x_n))$ を $|\boldsymbol{x}|_{\mathbb{R}^n}$ と表す．すなわち，

$$|\boldsymbol{x}|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \quad (\boldsymbol{x} = {}^\top(x_1, \cdots, x_n))$$

である．

$\boldsymbol{f}$ の微分を考える前に，念のため連続性の定義を与えておく．$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a} \in \Omega$ で連続であるとは，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|_{\mathbb{R}^2} < \delta, \boldsymbol{x} \in \Omega \Rightarrow |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$$

が成り立つことであり，$\boldsymbol{f}$ が Ω で連続であるとは，$\boldsymbol{f}$ が Ω の各点で連続であることである．

$\boldsymbol{f}$ が連続であることと，$\boldsymbol{f}$ の各成分 f_j $(j = 1, \cdots, m)$ が連続であることとが同値であることは，容易に示すことができる．

$\boldsymbol{f}$ の微分を考えよう．関数 $f(x)$ の a における微分は 1 次関数近似であった．$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^m$ への 1 次関数は，$A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$（$A$ は $m\times 2$ 行列，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$）の形をとる．このことから，ベクトル値関数（写像）の微分は次のように定義される．

定義 5.4.1 Ω を $\mathbb{R}^2$ の開集合，$\boldsymbol{a} \in \Omega$, $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ とする．ある $m \times 2$ 行列 A が存在して，

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - A\boldsymbol{h}|_{\mathbb{R}^m} = o(|\boldsymbol{h}|_{\mathbb{R}^2}) \quad (|\boldsymbol{h}|_{\mathbb{R}^2} \to 0)$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{a}$ で<u>微分可能</u>であるという．上式の $m \times 2$ 行列 A を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における<u>微分係数</u>といい，

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a}), \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a})$$

などと表す．$\boldsymbol{f}$ が Ω の各点 $\boldsymbol{x}$ で微分可能であるとき，写像

$$Df : \Omega \ni \boldsymbol{x} \ \mapsto \ D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^2$$

を $\boldsymbol{f}$ の<u>導関数</u>または<u>微分</u>という．

命題 5.4.2 $\boldsymbol{f} = {}^\top(f_1, \cdots, f_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ が $\boldsymbol{a}$ で微分可能であるための必要十分条件は，各 $j = 1, \cdots, m$ に対して f_j が $\boldsymbol{a}$ で微分可能であることである．

注意 5.4.3 $\boldsymbol{f} = {}^\top(f_1, \cdots, f_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ が微分可能であるとき，$\boldsymbol{f}$ の微分 $D\boldsymbol{f}$ は次のように書ける．

$$\begin{aligned} D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

定義 5.4.4 $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における微分である行列 $D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ を $\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における<u>**Jacobi 行列**</u>または<u>関数行列</u>という．

注意 5.4.5 n 変数の場合のベクトル値関数についても同様にして，連続性，微分可能性が定義される．実際，上述の $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^n$ に，$m \times 2$ 行列を $m \times n$ 行列に置き換える等，をすればよい．たとえば，微分に関しては，Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ とすると，$\boldsymbol{f}$ が $\boldsymbol{a} \in \Omega$ で微分可能であるとは，

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{h}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) - A\boldsymbol{h}|_{\mathbb{R}^m} = o(|\boldsymbol{h}|_{\mathbb{R}^n}) \quad (|\boldsymbol{h}|_{\mathbb{R}^n} \to 0)$$

をみたす $m \times n$ 行列 A が存在することである．$\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における微分 A に対する記号は $n = 2$ の場合と全く同じである．$\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{a}$ における微分 $A = D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ は次の $m \times n$ 行列で与えられる．

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ は次のようにも書ける．

$$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

とくに，$n = 1$ のときは，$D\boldsymbol{f}$ を $\dfrac{d\boldsymbol{f}}{dx}$ と書く．すなわち，$n = 1$ のときは，

$$D\boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{f}}{dx} = \begin{pmatrix} \dfrac{df_1}{dx} \\ \vdots \\ \dfrac{df_m}{dx} \end{pmatrix}$$

と表す．

5.5 合成関数の微分

定理 5.5.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，$I \subset \mathbb{R}$ を開区間とする．$f = f(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \in \Omega$ において微分可能，$\boldsymbol{y}(t) = {}^\top(y_1(t), y_2(t)) : I \to \mathbb{R}^2$ は $t = t_0 \in I$ において微分可能とし，$\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{a}$ とする．このとき，t_0 のある近傍 $(\subset I)$ で定義され $\mathbb{R}$ に値をとる合成関数 $g = f \circ \boldsymbol{y}$ は t_0 において微分可能であり，

$$\frac{dg}{dt}(t_0) = Df(\boldsymbol{a})\,\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}(t_0) = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\frac{dy_j}{dt}(t_0)$$

が成り立つ．

証明 f と $\boldsymbol{x}$ の微分可能性より，

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + Df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + \varphi_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{a} + \frac{d\boldsymbol{y}}{dt}(t_0)(t - t_0) + \boldsymbol{\varphi}_2(t - t_0)$$

が成り立つ．ただし，φ_1 と $\boldsymbol{\varphi}_2$ は，

$$\varphi_1(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = o(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}|_{\mathbb{R}^2}), \quad |\boldsymbol{\varphi}_2(t - t_0)|_{\mathbb{R}^2} = o(|t - t_0|)$$

をみたすものである．これより，$g(t_0) = f(\boldsymbol{a})$ に注意して，

$$\begin{aligned} g(t) = f(\boldsymbol{y}(t)) &= f(\boldsymbol{a}) + Df(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{a}) + \varphi_1(\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{a}) \\ &= g(t_0) + Df(\boldsymbol{a})\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}(t_0)(t - t_0) + Df(\boldsymbol{a})\boldsymbol{\varphi}_2(t - t_0) \\ &\quad + \varphi_1(\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

を得る．ここで，

$$|Df(\boldsymbol{a})\boldsymbol{\varphi}_2(t - t_0)| \leq |Df(\boldsymbol{a})||\boldsymbol{\varphi}_2(t - t_0)| = o(t - t_0),$$

$$\varphi_1(\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{a}) = o(o(t - t_0)) = o(t - t_0)$$

であるから，

$$g(t) = g(t_0) + Df(\boldsymbol{a})\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$$

を得る．したがって，$g = f \circ \boldsymbol{y} : I \to \mathbb{R}$ は t_0 で微分可能であり，

$$\frac{dg}{dt}(t_0) = Df(\boldsymbol{a})\,\frac{d\boldsymbol{y}}{dt}(t_0)$$

が成り立つ． □

定理 5.5.2 Ω, E を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする．$f = f(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} = {}^\top(a_1, a_2) \in \Omega$ において微分可能，$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{s}) = {}^\top(y_1(s_1, s_2), y_2(s_1, s_2)) : E \to \mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{t} = {}^\top(t_1, t_2) \in E$ において微分可能とし，$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{a}$ とする．このとき，$\boldsymbol{t}$ のある近傍 $(\subset E)$ で定義され $\mathbb{R}$ に値をとる合成関数 $g(\boldsymbol{s}) = f \circ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{s}) = f(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{s}))$ は $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{t}$ において微分可能であり，

$$\begin{aligned}
Dg(\boldsymbol{t}) &= Df(\boldsymbol{a})D\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial s_1}(\boldsymbol{t}) & \dfrac{\partial y_1}{\partial s_2}(\boldsymbol{t}) \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial s_1}(\boldsymbol{t}) & \dfrac{\partial y_2}{\partial s_2}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \frac{\partial y_j}{\partial s_1}(\boldsymbol{t}) & \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) \frac{\partial y_j}{\partial s_2}(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

定理 5.5.2 は定理 5.5.1 と同様に証明できる．証明は演習問題とする．

定理 5.5.2（合成関数の微分）の一般形を書いておく．

記号 以下では，ベクトル値関数 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ の微分を表す記号として，$D\boldsymbol{f}$ ではなく，$\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}$ を用いる．

定理 5.5.3 Ω を $\mathbb{R}^d$ の開集合，E を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^m$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ において微分可能，$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) : E \to \mathbb{R}^d$ は $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 \in E$ において微分可能とし，$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0)$ とする．このとき，$\boldsymbol{y}_0$ の近傍 $(\subset E)$ において定義され $\mathbb{R}^m$ に値をとるベクトル値合成関数 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})) : E \to \mathbb{R}^m$ は $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 \in E$ において微分可

能であり，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}_0) &= \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0)\,\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}_0) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_d}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_d}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n}(\boldsymbol{y}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_d}{\partial y_1}(\boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial g_d}{\partial y_n}(\boldsymbol{y}_0) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0)$ である．

5.6 方向微分

定義 5.6.1 Ω を $\mathbb{R}^2$ の開集合とし，f を Ω 上の関数とする．$\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$, $\boldsymbol{a} = {}^\top(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ に対して，

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} \tag{5.6.1}$$

が存在するとき，f は $\boldsymbol{x}_0$ において $\boldsymbol{a}$ 方向に微分可能であるといい，この値を

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0)$$

と書く．f が Ω のある部分集合 Ω_0 の各点で $\boldsymbol{a}$ 方向に微分可能であるとき，

$$\Omega_0 \ni \boldsymbol{x} \;\mapsto\; \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$$

により定まる関数を f の $\boldsymbol{a}$ 方向の導関数または $\boldsymbol{a}$ 方向の微分という．

注意 5.6.2 (i) $g(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a})$ とおくと，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) = g'(0)$ である．

(ii) $\boldsymbol{a} = {}^\top(1, 0)$ のとき，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ であり，$\boldsymbol{a} = {}^\top(0, 1)$ のとき，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ である．

(iii) $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ とおくと，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ向きで，長さは $|\boldsymbol{n}| = 1$ であり，

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) = |\boldsymbol{a}| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}_0)$$

が成り立つ．

(iv) f が $\boldsymbol{x}_0$ で微分可能ならば，

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) = Df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_0)$$

が成り立つ．ここで，$\boldsymbol{a} = {}^\top(a_1, a_2), \boldsymbol{b} = {}^\top(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{2} a_j b_j$$

である．

(v) 方向微分の定義式 (5.6.1) は,

$$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{x}_0) + t\,\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) + o(t) \quad (t \to 0)$$

と書ける．したがって，$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0)$ は $f(\boldsymbol{x}_0)$ における $\boldsymbol{a}$ 方向の接線の傾きを与えている．

(vi) もし，f が $\boldsymbol{x}_0$ で微分可能ならば,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{a} \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_0) = |\boldsymbol{a}||\nabla f(\boldsymbol{x}_0)| \cos\theta$$

が成り立つ．ただし，θ は $\boldsymbol{a}$ と $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ のなす角である．$|\cos\theta| \leq 1$ であり，$\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$ であるから，$\boldsymbol{a}$ の長さを固定して向きを動かしたとき，$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}_0)$ が最大となるのは，$\boldsymbol{a}$ が $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ と同じ方向のときである．これより，$\boldsymbol{x}_0$ において f の傾き（勾配）が最も大きくなるのは方向は $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ であることがわかる．

5.7 Taylor の定理

多変数関数に対する Taylor の定理を考えよう．そのためにいくつかの準備をする．

まず，微分作用素について少し述べる．ここでは定係数の微分作用素のみ考える．

<u>偏導関数の記号</u> 2 変数関数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x, y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を次のようにも表す．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = D_x f, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = D_y f.$$

<u>2 階の偏導関数</u> 2 変数関数 $f(\boldsymbol{x})$ の x に関する偏導関数 $f_x(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x} = {}^\top(x, y)$ の 2 変数関数であるが，$f_x(\boldsymbol{x})$ が y に関して偏微分可能なとき，その y に関する偏導関数 $(f_x)_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ を

$$f_{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{xy}(\boldsymbol{x}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{x})$$

などと表す．また，$f_x(\boldsymbol{x})$ が x に関して偏微分可能なとき，その x に関する偏導関数 $(f_x)_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ を

$$f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xx}(\boldsymbol{x}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\boldsymbol{x})$$

などと表す．f_{yx}, f_{yy} なども同様に定義される．

f_{xy} は，まず x で偏微分して，次いで y で偏微分して得られる．同様に，f_{yx} は，まず y で偏微分して，次いで x で偏微分して得られる．一般には偏微分の順序を入れ替えたこれらの関数は等しくならない．次の定理は偏微分の順序を変更しても等しくなるための十分条件を与えるものである．

定理 5.7.1 $f_{xy}(\boldsymbol{x}), f_{yx}(\boldsymbol{x})$ がともに連続ならば，$f_{xy}(\boldsymbol{x}) = f_{yx}(\boldsymbol{x})$ が成り立つ．

高階の偏導関数　2 階の偏導関数に対して，3 階の偏導関数 f_{xxx}，f_{xyx}，f_{xyy}, $\cdots$, が定義される．2 階の偏導関数と同様に

$$f_{xyx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

などと表す．一般に，x, y で合計 n 回偏微分した n 階の偏導関数が定義される．

C^n 級の関数　$\mathbb{R}^2$ の開集合 Ω 上で定義された関数 $f(\boldsymbol{x})$ が Ω 上で n 回偏微分可能で，n 階以下の偏導関数がすべて Ω 上で連続であるとき，$f(\boldsymbol{x})$ は Ω で **n 回連続微分可能 または C^n 級の関数**であるという．

$f(\boldsymbol{x})$ が C^n 級の関数ならば，n 階以下の偏導関数は，偏微分を行う順序によらず定まる．

例 **5.7.2** $f(\boldsymbol{x})$ が C^3 級ならば，

$$f_{xyx} = f_{xxy} = f_{yxx}$$

が成り立つ．

C^∞ 級の関数　$f(\boldsymbol{x})$ が Ω で何回でも偏微分可能であるとき，f は Ω 上で**無限回微分可能または C^∞ 級の関数**であるという．

$f(\boldsymbol{x})$ が C^∞ 級であるとき，高階の偏導関数は偏微分の順序によらず，x, y で何回偏微分したかということのみによって定まる．このようなときには，高階の偏導関数はたとえば次のように表される．

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y \partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}.$$

偏微分作用素　a, b が定数のとき，関数に作用する（定係数）偏微分作用素

$$a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$$

を

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

と定める．

注意 5.7.3 (i) a, b, c, d は定数とする．$f(x,y)$ が C^2 級のとき，

$$\begin{aligned}
&\left(c\frac{\partial}{\partial x}+d\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)f \\
&= c\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}\right)+d\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= ac\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+(ad+bc)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+bd\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

特に，$a=c$, $b=d$ のとき，$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)$ を $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$ と表し，

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f=a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

となる．

一般に，$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)$ を n 回作用させることを $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$ と表し，$f(x,y)$ が C^n 級ならば，

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f=\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}a^{n-k}b^k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}$$

となる．

(ii) $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とする．勾配の記号 $\nabla=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$ を用いると，

$$a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}=\boldsymbol{a}\cdot\nabla$$

だから，

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f=(\boldsymbol{a}\cdot\nabla)^n f$$

と表される．

(iii) 上で導入した偏微分作用素を少し一般化して述べておく．X, Y の多項式

$$P(X,Y)=a_{00}+a_{10}X+a_{01}Y+a_{11}XY+\cdots+a_{mn}X^mY^n$$

を考える．ただし，a_{jk} は定数とする．$P(X,Y)$ の X, Y にそれぞれ $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$ を代入しよう．つまり，$P(X,Y)$ における X^jY^k を $\dfrac{\partial^{j+k}}{\partial x^j \partial y^k}$ で置き換える．このとき偏微分作用素 $P(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ が

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f = a_{00}f + a_{10}\frac{\partial f}{\partial x} + a_{01}\frac{\partial f}{\partial y} + a_{11}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cdots$$
$$\cdots + a_{mn}\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$$

によって定まる．

(iv) $P(X,Y)$, $Q(X,Y)$ を X, Y の多項式とし，係数は定数であるとする．$R(X,Y) = P(X,Y)Q(X,Y)$ も X, Y の多項式であり，係数は定数である．このとき，偏微分作用素 $P(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, $Q(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, $R(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ が定まるが,（たとえば $f(x,y)$ が C^∞ 級ならば）

$$\begin{aligned} R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f &= P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) Q\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f \\ &= Q\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) f \end{aligned}$$

が成り立つ．

例 5.7.4 $f(\boldsymbol{x}) = f(x,y)$ は C^1 級の関数とする．$\boldsymbol{x}(t) = {}^\top(x(t), y(t))$, $x(t) = a + ht$, $y(t) = b + kt$（a, b, h, k は定数）のとき，$f(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ との合成関数 $f(\boldsymbol{x}(t))$ の微分は，$\dfrac{dx}{dt} = h$, $\dfrac{dy}{dt} = k$ に注意して，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(f(\boldsymbol{x}(t))\right) &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t))\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) \\ &= h\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}(t)) + k\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{x}(t)) \qquad (5.7.1) \\ &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(\boldsymbol{x}(t)) \end{aligned}$$

である．ここで，$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(\boldsymbol{x}(t))$ は，$\boldsymbol{x}$ の関数 $\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ との合成関数である．

次に，$f(\boldsymbol{x})$ を C^2 級として，2 階微分 $\frac{d^2}{dt^2}\left(f(\boldsymbol{x}(t))\right)$ を考えよう．(5.7.1) より

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(f(\boldsymbol{x}(t))\right) = \frac{d}{dt}\left(\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(\boldsymbol{x}(t))\right)$$

だから，(5.7.1) の $f(\boldsymbol{x}(t))$ を $\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(\boldsymbol{x}(t))$ とすることにより次を得る：

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(f(\boldsymbol{x}(t))\right) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\boldsymbol{x}(t)).$$

以下これを繰り返すことにより，f が C^n 級であれば，$j \le n$ に対して，

$$\frac{d^j}{dt^j}\left(f(\boldsymbol{x})\right) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(\boldsymbol{x}(t))$$

を得る．$\boldsymbol{h} = {}^{\top}(h, k)$ とおくと，$h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial y} = \boldsymbol{h}\cdot\nabla$ だから，

$$\frac{d^j}{dt^j}\left(f(\boldsymbol{x}(t))\right) = (\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^j f(\boldsymbol{x}(t)).$$

Taylor の定理を以下の定理 5.7.5 および定理 5.7.7 の両方の形で述べる．

定理 5.7.5 Ω を $\mathbb{R}^2$ の開集合とし，$f : \Omega \to \mathbb{R}$ を Ω 上の C^m 級関数とする．このとき，

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^k f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{m!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^m f(\boldsymbol{x}_0 + \theta\boldsymbol{h}) \tag{5.7.2}$$

をみたす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する．

証明 合成関数 $g(t) = f(\boldsymbol{x}(t))$, $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}$ を考える．1 変数関数に対する Taylor の定理より

$$g(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} t^j + \frac{g^{(n)}(\theta t)}{n!} t^n \tag{5.7.3}$$

みたすような $0 < \theta < 1$ が存在する．例 5.7.4 より

$$\begin{aligned} g^{(j)}(t) = \frac{d^j}{dt^j}\left(f(\boldsymbol{x}(t))\right) &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(\boldsymbol{x}(t)) \\ &= (\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^j f(\boldsymbol{x}(t)) \end{aligned}$$

だから，(5.7.3) で $t = 1$ とおけば，結論を得る． $\square$

いくつか注意を述べたあと，定理 5.7.5 の (5.7.2) の右辺の偏導関数を見やすい形に書き換えた定理を述べる．

注意 5.7.6 (i) 定理 5.7.5 では，$\boldsymbol{h}$ の $(m-1)$ 次多項式 + 剰余項で，剰余項は $O(|\boldsymbol{h}|^m)$ であるが，次のように書けば，m 次多項式 + 剰余項で，剰余項は $o(|\boldsymbol{h}|^m)$ となる．

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^k f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{m!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^m \left(f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)\right).$$

(ii) 積分形の剰余項を用いると次の形でかける．

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^k f(\boldsymbol{x}_0) \\ &\quad + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-\theta)^{m-1}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^m f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})\,d\theta \end{aligned}$$

これは，$\boldsymbol{h}$ の $(m-1)$ 次多項式 + 剰余項で，剰余項は $O(|\boldsymbol{h}|^m)$ であるが，次のように書けば，m 次多項式 + 剰余項で，剰余項は $o(|\boldsymbol{h}|^m)$ となる．

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) &= \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^k f(\boldsymbol{x_0}) \\ &\quad + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-\theta)^{m-1}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^m \left(f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)\right)\,d\theta. \end{aligned}$$

(iii) 定理 5.7.5 は $\mathbb{R}^2$ を一般次元の $\mathbb{R}^d$ としても成立する．下記の定理 5.7.7 を参照せよ．

Taylor の定理（定理 5.7.5）において，f の偏微分がもう少しわかりやすく見える形にしておいたほうが便利である．そこで次の記法（多重指数）を導入する．以下，一般の d 次元ユークリッド空間上の関数を考える．

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha_j \geq 0$ （α を**多重指数**という） に対して，

$$|\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_d|, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!,$$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad \boldsymbol{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$$

と定める．この記法を用いると，多項定理は次のように書ける．

$$\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\boldsymbol{x}^\alpha = (x_1 + \cdots + x_d)^k.$$

（2 項定理と d に関する数学的帰納法を用いて証明することができる．）

この記法により，

$$(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\boldsymbol{h}^\alpha \partial^\alpha$$

と表されるから，Taylor 多項式と剰余項は次のように書ける：

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^k f((\boldsymbol{x}) = \sum_{|\alpha|\le m-1} \frac{\partial^\alpha f(\boldsymbol{x})}{\alpha!}\boldsymbol{h}^\alpha,$$

$$\frac{1}{m!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^m f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h}) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{h})}{\alpha!}\boldsymbol{h}^\alpha.$$

したがって，定理 5.7.5 は次の形に書ける．

定理 5.7.7 Ω を $\mathbb{R}^d$ の開集合とし，$f:\Omega\to\mathbb{R}$ を Ω 上の C^m 級関数とする．このとき，

$$f(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}) = \sum_{|\alpha|\le m-1} \frac{\partial^\alpha f(\boldsymbol{x}_0)}{\alpha!}\boldsymbol{h}^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial^\alpha f(\boldsymbol{x}_0+\theta\boldsymbol{h})}{\alpha!}\boldsymbol{h}^\alpha$$

をみたす θ $(0<\theta<1)$ が存在する．

問 5.7.8 (i) Taylor の定理 5.7.7 の剰余項が，注意 5.7.6 (i) に書いたように $o(|\boldsymbol{h}|^m)$ となるように書き換えてみよ．また，注意 5.7.6 (ii) に書いたように剰余項を積分形で書いてみよ．

(ii) Leibniz の公式

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}(\partial^\beta f)(\partial^\gamma g)$$

を証明せよ．

5.8　陰関数定理，逆写像定理

半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$，つまり，$x^2 + y^2 - 1 = 0$ は $y > 0$ では，$y = \sqrt{1 - x^2}$ $(-1 < x < 1)$ のように y は x の関数として表される．このことをより一般的に考えてみよう．

x, y が $F(x, y) = 0$ を満たしているとする．このとき，y が x の関数 $y = f(x)$ と表されるならば，$y = f(x)$ を $F(x, y) = 0$ によって定まる**陰関数**という．関係式（方程式） $F(x, y) = 0$ に対する陰関数の存在に関して次のことが成り立つ．

定理を述べる前に記号を思い出しておく．$x \in \mathbb{R}$ の ε 近傍は，$U(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ であり，その閉包は $\overline{U(x, \varepsilon)} = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ である．

定理 5.8.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とする．関数 $F : \Omega \to \mathbb{R}$ は次をみたすとする．

(a) F はある $(x_0, y_0) \in \Omega$ において $F(x_0, y_0) = 0$ をみたし，(x_0, y_0) のある近傍 U で連続である．

(b) F は $(x_0, y_0) \in \Omega$ の近傍 U で y について偏微分可能であり，y についての偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ は U で連続である．

(c) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ が成り立つ．

このとき，以下のことが成り立つ．

(i) ある正定数 r, ρ と連続関数 $f : \overline{U(x_0, r)} \to \overline{U(y_0, \rho)}$ が存在して，

$$y_0 = f(x_0), \quad F(x, f(x)) = 0 \quad (x \in \overline{U(x_0, r)})$$

が成り立つ．また，$F(x, y) = 0$ をみたす任意の $(x, y) \in \overline{U(x_0, r)} \times \overline{U(y_0, \rho)}$ に対して $y = f(x)$ が成り立つ．

(ii) F が U で C^1 級ならば，f も C^1 級であり，

$$f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \quad (x \in \overline{U(x_0, r)})$$

が成り立つ．

(iii) F が U で C^m 級ならば，f も C^m 級である．

注意 5.8.2 (i) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ のときも同様の定理が成り立つ．

(ii) 陰関数 $y = f(x)$ の微分を $F(x, y)$ の偏導関数を用いて表したいことが多々ある．以下のように計算して求めることができる．

$F(x, f(x)) = 0$ の両辺を x で微分すると，合成関数の微分法より，

$$F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x))f'(x) = 0 \tag{5.8.1}$$

を得る．(x_0, y_0) の近傍で $F_y(x, y) \neq 0$ であるから，

$$f'(x) = -\left(F_y(x, f(x))\right)^{-1} f_x(x, f(x)) \tag{5.8.2}$$

を得る．(5.8.1) を x で微分すると，

$$\begin{aligned} &F_{xx}(x, f(x)) + 2F_{xy}(x, f(x))f'(x) + F_{yy}(x, f(x)) \left\{f'(x)\right\}^2 \\ &\quad + F_y(x, f(x))f''(x) \\ &\quad = 0 \end{aligned} \tag{5.8.3}$$

を得る．(x_0, y_0) の近傍で $F_y(x, y) \neq 0$ であるから，

$$\begin{aligned} f''(x) = &-\left(F_y(x, f(x))\right)^{-1} \\ &\cdot \left\{F_{xx}(x, f(x)) + 2F_{xy}(x, f(x))f'(x) + F_{yy}(x, f(x)) \left\{f'(x)\right\}^2\right\} \end{aligned}$$

であり，これに (5.8.2) を代入すれば $f''(x)$ が得られる．同様に (5.8.3) を x で微分すれば，$f'''(x)$ を得る．以下，これを繰り返せば $f^{(n)}(x)$ が得られる．

以下，定理 5.8.1 の証明の概略を手短に述べて，この節の最後に定理 5.8.1 の一般形を与える．

定理 5.8.1 の証明の概略． $F_y(x_0, y_0) > 0$ として考える．($F_y(x_0, y_0) < 0$ のときも全く同様である.)

$F_y(x, y)$ は連続だから，(x, y) が (x_0, y_0) に十分近ければ $F_y(x, y) > 0$ である．したがって (x_0, y_0) の近くでは $F(x, y)$ は x を固定するごとに y の単調増加関数である．

$F(x_0, y_0) = 0$ だから，y_0 に十分近い y_1, y_2 で

$$y_1 < y_0 < y_2, \quad F(x_0, y_1) < 0 < F(x_0, y_2)$$

であり，x が x_0 に十分近ければ

$$F(x, y_1) < 0 < F(x, y_2)$$

が成り立つ．中間値の定理よりこの x に対して

$$F(x, y) = 0, \quad y_1 < y < y_2 \tag{5.8.4}$$

を満たす y が存在する．$F(x, y)$ は y の狭義単調増加関数であるから，(5.8.4) を満たすような y はただ 1 つであり，この y はもちろん x から定まるものである．この対応を $y = f(x)$ と書くと，これが求める陰関数である．

陰関数 $f(x)$ の連続性を示そう．x_1, x_2 は x_0 に十分近いとする．$F(x_j, f(x_j)) = 0$ $(j = 1, 2)$ である．また，Taylor の定理より，

$$\begin{aligned} 0 &= F(x_1, f(x_1)) - F(x_2, f(x_2)) \\ &= F_x(\tilde{x}, \tilde{y})(x_1 - x_2) + F_y(\tilde{x}, \tilde{y})(f(x_1) - f(x_2)) \end{aligned}$$

をみたす $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ が，それぞれ，x_1 と x_2, $f(x_1)$ と $f(x_2)$ の間に存在する．$F_y(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$ より，

$$f(x_1) - f(x_2) = -\left(F_y(\tilde{x}, \tilde{y})\right)^{-1} F_x(\tilde{x}, \tilde{y})(x_1 - x_2) \tag{5.8.5}$$

を得る．$M = \sup_{(x,y)\in\overline{U}} \left\{|F_y(x, y)|^{-1} + |F_x(x, y)|\right\}$ とおくと，$M < \infty$ であり，

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M^2 |x_1 - x_2|$$

が成り立つ．したがって，$f(x)$ は連続である．(5.8.5) を $x_1 - x_2$ で割ると，

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\left(F_y(\tilde{x}, \tilde{y})\right)^{-1} F_x(\tilde{x}, \tilde{y})(x_1 - x_2) \tag{5.8.6}$$

を得る．$x_1 \to x_2$ のとき，$\tilde{x} \to x_2$, $\tilde{y} \to f(x_2)$ であり，F は C^1 級であることを仮定しているから，(5.8.6) で $x_1 \to x_2$ とすると，f は x_2 で微分可能であり，

$$f'(x_2) = -\left(F_y(x_2, f(x_2))\right)^{-1} F_x(x_2, f(x_2))$$

であることがわかる．この右辺は x_2 について連続であるから，f は C^1 級である．□

定理 5.8.1 の一般形を述べる．

記号 (i) $X=\mathbb{R}^n$ とする．$\boldsymbol{x}\in X$ の ε 近傍を $U_X(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ と表し，その閉包を $B_X(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ と表す．すなわち，

$$U_X(\boldsymbol{x},\varepsilon)=\{\boldsymbol{y}\in X:|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|<\varepsilon\},$$
$$B_X(\boldsymbol{x},\varepsilon)=\{\boldsymbol{y}\in X:|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\leq\varepsilon\}$$

と定める．ただし，$\boldsymbol{x}={}^\top(x_1,\cdots,x_n)$ に対して $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ である．$U_X(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ を $\boldsymbol{x}\in X$ を中心とする半径 ε の<u>開球</u>といい，$B_X(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ を $\boldsymbol{x}\in X$ を中心とする半径 ε の<u>閉球</u>という．

(ii) $\mathbb{R}^{m+n}$ の点を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ と書く．

定理を述べるために一つ定義を与えておく．

定義 5.8.3 $\mathbb{R}^{m+n}$ 上のベクトル値関数 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{y}$ を固定して $\boldsymbol{x}$ に関して微分可能であるとき，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は <u>$\boldsymbol{x}$ について微分可能</u>であるといい，$\boldsymbol{x}$ についての微分を $\dfrac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{x}}$ と表す．$\boldsymbol{y}$ についての微分可能性も同様に定義され，$\boldsymbol{y}$ についての微分 $\dfrac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{y}}$ も同様に定義される．

定理 5.8.4 $\Omega\subset\mathbb{R}^{m+n}$ を開集合とする．写像 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):\Omega\to\mathbb{R}^n$ は次をみたすとする．

(a) $\boldsymbol{F}$ はある $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in\Omega$ で $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{0}$ をみたし，$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ のある近傍 U で連続である．

(b) $\boldsymbol{F}$ は $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ の近傍 U で $\boldsymbol{y}$ について微分可能であり，その $\boldsymbol{y}$ についての微分 $\dfrac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は U で連続である．

(c) $\dfrac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ は逆行列をもつ．

このとき，以下のことが成り立つ．

(i) ある $B_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}_0,r)\times B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}_0,\rho)\subset U$ と連続写像 $\boldsymbol{f}:B_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}_0,r)\to B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y}_0,\rho)$ が存在して，

$$\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{0}\quad(\boldsymbol{x}\in B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}_0,r))$$

が成り立つ．また，$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$ をみたす任意の $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in B_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}_0,r)\times B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y}_0,\rho)$ に対して $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が成り立つ．

(ii) $\boldsymbol{F}$ が U で C^1 級ならば，$\boldsymbol{f}$ も C^1 級で，

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \quad (\boldsymbol{x} \in B_{\mathbb{R}^m}(\boldsymbol{x}_0, r))$$

が成り立つ．

(iii) $\boldsymbol{F}$ が U で C^m 級ならば，$\boldsymbol{f}$ も C^m 級である．

定理 5.8.4 の証明は，のちに 5.10 節において与える．ここでは，定理 5.8.4 の応用として逆写像定理を述べよう．

定理 5.8.5 （逆写像定理） $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．写像 $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ は C^1 級であり，

$$\text{ある } \boldsymbol{x}_0 \in \Omega \text{ において } \boldsymbol{f} \text{ の微分 } \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0) \text{ は逆行列をもつ}$$

とする．このとき，次の (i) と (ii) が成り立つ．

(i) ある $\boldsymbol{x}_0$ の近傍 V と $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ の近傍 W が存在して，$\boldsymbol{f}$ は V から W への全単射である．$\boldsymbol{f}|_V$ の 逆写像 $\boldsymbol{g} : W \to V$ は C^1 級である．

(ii) $\boldsymbol{x} \in V$, $\boldsymbol{y} \in W$ に対して，

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\right)^{-1}$$

が成り立つ．

証明 写像 $\boldsymbol{F} : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}$$

と定める．$\boldsymbol{F}$ は C^1 級であり，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}$ である．また，

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0)$$

であるから，$\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ は逆行列をもつ．したがって，定理 5.8.4 より，ある $B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}_0, r) \times B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y}_0, \rho)$ と C^1 級写像 $\boldsymbol{g} : B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y}_0, \rho) \to B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}_0, r)$ が存在して，

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0), \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{y} \in B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y}_0, \rho))$$

が成り立つ．また，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}_0,r)\times B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y}_0,\rho)$ ならば，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ が成り立つ．

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$ は $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$ と同値であることに注意すると，任意の $\boldsymbol{y}\in B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y}_0,\rho)$ に対して，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\in B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}_0,r)$ が成り立つ．そこで，$W=U_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y}_0,\rho)$, $V=\boldsymbol{g}^{-1}(W)(\subset B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}_0,r))$ とおくと，$\boldsymbol{g}$ の連続性より，V は $\boldsymbol{x}_0$ を含む開集合である．また，$\boldsymbol{f}$ は V から W への全射である．

$\boldsymbol{f}$ がV から W への単射であることを示そう．$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)$, $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in V)$ とする． $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_j)$ $(j=1,2)$ とおくと，$(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y})\in B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{x}_0,r)\times B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y}_0,\rho)$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$ であるから，$\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ $(j=1,2)$ である．よって，$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}_2$ が成り立つ．したがって，$\boldsymbol{f}|_V$ は単射である．以上より，$\boldsymbol{f}$ は V から W への全単射であることがわかり，(i) が証明された．

(ii) については，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{y}$ であるから，両辺を $\boldsymbol{y}$ で微分すれば，合成関数の微分法より，

$$\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y})=I$$

を得る．ここで，I は n 次単位行列である．これより，

$$\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y})=\left(\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\right)^{-1}$$

を得る． □

5.9　条件付き極値

(x,y) が $g(x,y)=0$ という条件をみたしながら動くときの $z=f(x,y)$ の極値（条件付き極値問題）を考えよう．

曲線 $g(x,y)=0$ を xy-平面に描く．曲線 $f(x,y)=c$（等高線）を描き，c を動かすことを考える．曲線 $g(x,y)=0$ 上の点 (x_0,y_0) で $z=f(x,y)$ が極値をとるとすると，(x_0,y_0) で 2 つの曲線 $f(x,y)=c_0$ と $g(x,y)=0$ は接しなければならない．したがって，$(x_0,y0)$ においては，2 つの曲線の法線ベクトル ∇f と ∇g は同じ方向となるから，

$$\exists\lambda\text{: 定数 s.t. }\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0),$$

すなわち，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) & = 0, \end{cases}$$

をみたす定数 λ が存在することが必要になる．条件 $g(x,y) = 0$ のもとでの $z = f(x,y)$ の条件付き極値問題に関して次のことが成り立つ．

定理 5.9.1 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は開集合とし，$f(x,y)$, $g(x,y)$ は次をみたす Ω 上の C^1 級関数とする．このとき，

(a) $g(x,y) = 0$ 上で $\nabla g(x,y) \neq \mathbf{0}$ であり，

(b) 点 (x,y) が $g(x,y) = 0$ 上を動くとき，$f(x,y)$ が点 (x_0, y_0) で極値をとる

ならば，

$$\exists \lambda\colon \text{ 定数 s.t. } \nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0),$$

が成り立つ．

定理 5.9.1 の定数 λ を **Lagrange の未定乗数**という．Lagrange の未定乗数を求めて，条件付き極値問題を調べる方法を **Lagrange の未定乗数法**という．

証明 $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ とする．($g_x(x_0, y_0) \neq 0$ の場合も同様に証明できる．）陰関数定理（定理 5.8.1）より，(x_0, y_0) の近傍で定義された C^1 級関数 $y = \varphi(x)$ で，

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad g(x, \varphi(x)) = 0$$

をみたすものが存在する．このとき，

$$\varphi'(x) = -\left(g_y(x, \varphi(x))\right)^{-1} g_x(x, \varphi(x))$$

が成り立つ．したがって，$h(x) = f(x, \varphi(x))$ とおくと，

$$\begin{aligned} h'(x) &= f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) \\ &= f_x(x, \varphi(x)) - f_y(x, \varphi(x)) \left(g_y(x, \varphi(x))\right)^{-1} g_x(x, \varphi(x)) \end{aligned}$$

を得る．

$h(x)$ は $x = x_0$ で極値をとるから $h'(x_0) = 0$ である．よって，

$$f_x(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)\,(g_y(x_0, y_0))^{-1}\,g_x(x_0, y_0) = 0$$

が成り立つ．これより，$\lambda = f_y(x_0, y_0)\,(g_y(x_0, y_0))^{-1}$ とおけば，

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

が成り立つ． □

例 5.9.2 (x, y) が $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上を動くとき，xy の最大値と最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて調べよう．

$f(x, y) = xy$, $g(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + y^2 - 1$ とおく．$g(x, y) = 0$ をみたす点 (x, y) の集合は楕円だから，有界閉集合である．$f(x, y) = xy$ はこの集合上で連続であるから，最大値と最小値をとる．

条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの $f(x, y)$ の極値を調べよう．∇f と ∇g を計算すると，

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{2} \\ 2y \end{pmatrix}$$

である．

(I) 極値をとる点の候補を求める．連立方程式

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

をみたす (x, y) と λ を求めよう．この連立方程式を書き下すと，

$$y - \frac{\lambda}{2}x = 0, \quad x - 2\lambda y = 0, \quad \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$$

を得る．これを解いて，

$$(x, y, \lambda) = (\pm\sqrt{2}, \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1), \quad (\pm\sqrt{2}, \mp\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -1)$$

が，条件 $g(x, y) = 0$ のもとで $f(x, y)$ が極値をとる点 (x, y) の候補を与える．

(II) 極値をとる点を求める．まず，$\lambda = 1$ のときを考えよう．$f(x, y) = f(-x, -y)$, $g(x, y) = g(-x, -y)$ であるから，$(x, y, \lambda) = (\sqrt{2}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ のと

きを考えるだけでよい．($(x,y,\lambda)=(-\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},1)$ については，$(x,y,\lambda)=(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},1)$ から情報を得ることができる．)

$g_y(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{2}\neq 0$ だから，陰関数定理より $(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 近傍で，$g(x,y)=0$ の陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在する．$(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}})$ において，

$$f_x=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad f_y=\sqrt{2},\quad f_{xx}=0,\quad f_{xy}=1,\quad f_{yy}=0,$$
$$g_x=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad g_y=\sqrt{2},\quad g_{xx}=\frac{1}{2},\quad f_{xy}=0,\quad g_{yy}=2$$

であるから，

$$\varphi'(\sqrt{2})=-g_y^{-1}g_x=-\frac{1}{2},$$
$$\varphi''(\sqrt{2})=-g_y^{-1}\left\{g_{xx}+2g_{xy}\varphi'+g_{yy}\left(\varphi'\right)^2\right\}=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

を得る．$h(x)=f(x,\varphi(x))$ とおくと，

$$\begin{aligned}h'(x)&=f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x),\\ h''(x)&=f_{xx}(x,\varphi(x))+2f_{xy}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\\ &\quad+f_{yy}(x,\varphi(x))\left(\varphi'(x)\right)^2+f_y(x,\varphi(x))\varphi''(x)\end{aligned}$$

であるから，$h'(\sqrt{2})=0$（当然ゼロになる．），$h''(\sqrt{2})=-2<0$ を得る．したがって，$h(x)$ は $x=\sqrt{2}$ で極大値をとる．

同様にして，$\lambda=-1$ のとき，$(x,y)=(\pm\sqrt{2},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ において，$f(x,y)$ が $g(x,y)=0$ の条件のもとでの極値をとるかどうかを調べると，極小値をとることがわかる．(このことは，$f(x,-y)=-f(x,y)$, $g(x,-y)=g(x,y)$ という対称性を用いれば，$\lambda=1$ のときの結果からしたがう．)

以上より，$f(x,y)$ は $(x,y)=(\pm\sqrt{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ において最大値 1 をとり，$(x,y)=(\pm\sqrt{2},\mp\frac{1}{\sqrt{2}})$ において最小値 -1 をとることがわかる． □

問 5.9.3 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ を開集合とし，$f(x,y)$, $g(x,y)$ を Ω 上の C^2 級関数とする．ある $(x_0,y_0)\in\Omega$ と $\lambda\in\mathbb{R}$ に対して，

(a) $g(x_0,y_0)=0$,

(b) $\nabla g(x_0,y_0)\neq\mathbf{0}$,

(c) $\nabla f(x_0, y_0) - \lambda \nabla g(x_0, y_0) = \mathbf{0}$

が成り立つとする．D を

$$D = A\{g_y(x_0, y_0)\}^2 - 2Hg_x(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) + B\{g_x(x_0, y_0)\}^2$$

と定める．ただし，A, H, B は，

$$\begin{aligned} A &= f_{xx}(x_0, y_0) - \lambda g_{xx}(x_0, y_0), \\ H &= f_{xy}(x_0, y_0) - \lambda g_{xy}(x_0, y_0), \\ B &= f_{yy}(x_0, y_0) - \lambda g_{yy}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

と与えられるものとする．

点 (x, y) が $g(x, y) = 0$ 上を動くとき，$f(x, y)$ の極値に関して，次の (i), (ii) が成り立つことを示せ．

(i) $D < 0$ ならば $f(x, y)$ は点 (x_0, y_0) で極大値をとる．

(ii) $D > 0$ ならば $f(x, y)$ は点 (x_0, y_0) で極小値をとる．

5.10　定理 5.8.4 の証明

いくつかの準備から始める．$\mathbb{K}$ を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする． X を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．X で定義された関数 $\|\cdot\| \to \mathbb{R}$ が，次の (i), (ii), (iii) の条件

(i)　$\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ $(\boldsymbol{x} \in X)$;　$\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

(ii)　$\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$ $(\alpha \in \mathbb{K}, \boldsymbol{x} \in X)$,

(iii)　$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ $(bx, by \in X)$

をみたすとき，$\|\cdot\|$ を X 上の**ノルム**といい，$\|\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ のノルムという．1 つのノルムが定義されているベクトル空間 X を**ノルム空間**という．X がノルム $\|\cdot\|$ をもつとき，ノルム空間 X を $(X, \|\cdot\|)$ と表すこともある．

以下，実ベクトル空間のみ考える．

例 5.10.1 (i) $\boldsymbol{x} = {}^{\top}(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $\|\boldsymbol{x}\| = |\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdot + x_n^2}$ と定めると，$\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^n$ 上のノルムである．

(ii) I を $\mathbb{R}$ の有界閉区間とし，$C(I)$ を I 上の実数値連続関数全体の集合からなる実ベクトル空間とする．$f \in C(I)$ に対して

$$\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

とすると，$\|\cdot\|$ は $C(I)$ 上のノルムである．

(iii) K を $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合とし，$C(K)$ を I 上の実数値連続関数全体の集合からなる実ベクトル空間とする．$f \in C(K)$ に対して

$$\|f\| = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

とすると，$\|\cdot\|$ は $C(K)$ 上のノルムである．

定義 5.10.2 X をノルム空間とし，そのノルムを $\|\cdot\|$ とする．
(i) $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X の点列とし, $\boldsymbol{x} \in X$ とする．

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つとき，$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\boldsymbol{x} \in X$ に収束するといい，$\boldsymbol{x}$ を $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限という．$\boldsymbol{x} \in X$ に収束するとき，$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ in X $(n \to \infty)$ と表す．

(ii) 点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が，

$$\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n\| \to 0 \quad (m, n \to \infty)$$

をみたすとき，$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は X の **Cauchy 列** であるという．

(iii) X の任意の Cauchy 列が収束列であるとき，X は完備であるという．

定義 5.10.3 完備なノルム空間を **Banach 空間** という．

例 5.10.4 (i) $\mathbb{R}$ の完備性（定理 1.4.4）より，例 5.10.1 (i) のノルム空間 $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ は Banach 空間である．

(ii) 例 5.10.1 (ii) のノルム空間 $(C(I), \|\cdot\|)$ は Banach 空間である．実際，$\{f_n\}$ を $C(I)$ の Cauchy 列とすると，

$$\|f_m - f_n\| = \sup_{x \in I} |f_m(x) - f_n(x)| \to 0 \quad (m, n \to \infty)$$

が成り立つ．定理 4.1.15 と定理 4.2.1 より，$\{f_n\}$ はある $f \in C(I)$ に一様収束することがわかる．つまり，ある $f \in C(I)$ が存在して，$\|f_n - f\| \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．したがって，$(C(I), \|\cdot\|)$ は完備であるから，Banach 空間である．

(iii) 例 5.10.1 (iii) の $(C(K), \|\cdot\|)$ は Banach 空間である．このことは，(ii) と同様の議論で示すことができる．

$(X, \|\cdot\|)$ が Banach 空間であるとき，ε 近傍，$A \subset X$ の内部，外部，境界，閉包，開集合，閉集合 などは $\mathbb{R}^2$ の場合と同様に定義される．

定理 5.10.5 （縮小写像の原理）$(X, \|\cdot\|)$ を Banach 空間とし，M をは X の閉集合とする．写像 $f : M \to M$ は次をみたすとする．

$$\exists \kappa\colon\ 0 \le \kappa < 1 \text{ s.t. } \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M \text{ に対して } \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})\| \le \kappa \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

（このような f を M 上の縮小写像という．）このとき，

$$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x})$$

をみたす $\boldsymbol{x} \in M$ が一意に存在する.（この $\boldsymbol{x} \in M$ を f の<u>不動点</u>という.）

さらに，$\forall \boldsymbol{y} \in M$ に対して，点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}_n = f(\boldsymbol{x}_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

とすると，

$$\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| \leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\|f(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}\|$$

が成り立つ.

注意 5.10.6 定理 5.10.5 では，Banach 空間の閉集合における「縮小写像の原理」を述べたが,「縮小写像の原理」は一般の完備距離空間において成立する.

定理 5.10.5 の証明 $\boldsymbol{y} \in M$ を任意にとる．点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x}_n = f(\boldsymbol{x}_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定める．$f : M \to M$ だから，$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ は定義される．仮定より，

$$\|\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n\| \leq \kappa\|\boldsymbol{x}_n - bx_{n-1}\| \leq \cdots \leq \kappa^n\|f(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}\|$$

が成り立つ．したがって，$m > n$ ならば,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n\| &\leq \|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_{m-1}\| + \cdots + \|\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n\| \\
&\leq \left(\kappa^{m-1} + \cdots + \kappa^n\right)\|f(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}\| \\
&\leq \frac{\kappa^n}{1-\kappa}\|f(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}\|
\end{aligned} \tag{5.10.1}$$

が成り立つ．$0 \leq \kappa < 1$ だから，$\kappa^n \to 0\ (n \to \infty)$ である．したがって，$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ は X の Cauchy 列である．X は完備だから，

$$\exists \boldsymbol{x} \in X \text{ s.t. } \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| \to 0\ (n \to \infty)$$

を得る．M は X の閉集合であり，$\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=0}^{\infty} \subset M$ だから，$\boldsymbol{x} \in M$ である．このとき，$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x})$ が成り立つ．実際，$\boldsymbol{x}_{n+1} = f(\boldsymbol{x}_n)$ だから，

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})\| &\leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{n+1}\| + \|f(\boldsymbol{x}_n) - f(\boldsymbol{x})\| \\
&\leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{n+1}\| + \kappa\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}\| \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

を得る．したがって，$\|\boldsymbol{x}-f(\boldsymbol{x})\|=0$ だから， $\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{x})$ が成り立つ．また，(5.10.1) において，$m\to\infty$ とすると，

$$\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}\|\leq\frac{\kappa^n}{1-\kappa}\|f(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{y}\|$$

を得る．

最後に，不動点の一意性を示そう．$\tilde{\boldsymbol{x}}\in M$, $\tilde{\boldsymbol{x}}=f(\tilde{\boldsymbol{x}})$ とすると，

$$\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|=\|f(\boldsymbol{x})-f(\tilde{\boldsymbol{x}})\|\leq\kappa\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|$$

であるから，$(1-\kappa)\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|\leq 0$ を得る．$0\leq\kappa<1$ だから，$\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|=0$, すなわち，$\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{x}}$ が成り立つ．したがって，$\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{x})$ をみたす $\boldsymbol{x}\in M$ は一意である． $\square$

定義 5.10.7 $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間とし，$A\subset X$, $B\subset Y$ とする．写像 $f:A\to B$ が <u>**点 $\boldsymbol{a}\in A$ で連続**</u>であるとは，

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\text{ s.t. }\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|_X<\delta,\boldsymbol{x}\in A\Rightarrow\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{a})\|_Y<\varepsilon$$

が成り立つことである．f が A の各点で連続であるとき，f は <u>**A で連続**</u>であるという．

$f:A\to B$ が点 $\boldsymbol{a}\in A$ で連続であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{a}$ に収束する任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}\subset A$ に対して，点列 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}\subset B$ が $f(\boldsymbol{a})$ に収束することである．このことは $\mathbb{R}$ 上の 1 変数関数のときと同様にして証明できる．

例 5.10.8 M 上の縮小写像は M で連続である．

定理 5.10.9 （一様縮小写像の原理）$(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$ を Banach 空間とし，M を X の閉集合，N を Y の閉集合とする．$f:M\times N\to M$ は $M\times N$ で連続とし，

$$\begin{aligned}&\exists\kappa\text{: }0\leq\kappa<1\text{ s.t. }\forall\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in M,\forall\boldsymbol{y}\in N\text{ に対して}\\&\qquad\qquad\|f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})\|_X\leq\kappa\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|_X.\end{aligned}$$

が成り立つとする.（このような $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は，**$\boldsymbol{y}$ について一様に $\boldsymbol{x}$ に関して縮小写像**であるといわれる.）このとき，$\forall\boldsymbol{y}\in N$ に対して，

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y})$$

をみたす $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}) \in M$ が一意に存在し，$N \ni \boldsymbol{y} \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}) \in M$ は 連続である．さらに，ある正定数 L が存在して，

$$\|f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2)\|_X \leq L\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|_Y$$

が任意の $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1), (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) \in M \times N$ に対して成り立つならば，

$$\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}_2)\|_X \leq \frac{L}{1-\kappa}\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2\|_Y$$

が成り立つ．

証明 定理 5.10.5 より，$\forall \boldsymbol{y} \in N$ に対して，

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})$$

をみたす $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}) \in M$ が一意に存在する．$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{y}$ について連続であることを示そう．$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y} \in N$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})\|_X &= \|f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}_1), \boldsymbol{y}_1) - f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})\|_X \\
&\leq \|f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}_1), \boldsymbol{y}_1) - f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}_1)\|_X \\
&\quad + \|f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}_1) - f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})\|_X \\
&\leq \kappa\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})\|_X + \|f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}_1) - f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})\|_X
\end{aligned}$$

であるから，$(1-\kappa)\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})\|_X \leq \|f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}_1) - f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})\|_X$ を得る．$0 \leq \kappa < 1$ だから，

$$\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})\|_X \leq \frac{1}{1-\kappa}\|f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}_1) - f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})\|_X$$

f は点 $(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})$ において連続だから，$\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}\|_Y \to 0$ のとき，$\|f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}_1) - f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y})\|_X \to 0$ である．したがって，$\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}\|_Y \to 0$ のとき，$\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})\|_X \to 0$ が成り立つ．すなわち，$\boldsymbol{x}$ は点 $\boldsymbol{y}$ において連続である．さらに，

$$\|f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) - f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|_X \leq L\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}\|_Y$$

ならば，

$$\|\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})\|_X \leq \frac{L}{1-\kappa}\|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}\|_Y$$

が成り立つ． □

注意 5.10.10 定理 5.10.2 において，$\boldsymbol{F}$ が C^m 級であれば，不動点 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})$ も $\boldsymbol{x}$ に関して C^m 級であることを示すことができる．$\boldsymbol{F}$ が C^m 級であるなどの定義をするには，いま少し紙数を要するので，ここでは不動点 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})$ の「微分可能性」については触れない．（定理 5.8.4 の証明を参照．）

以上で，定理 5.8.4 の証明を与えるための準備が整った．証明の前に，定理 5.8.4 を記号を少し変えた形で述べておく．

定理 5.10.11 $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$, $X \times Y = \mathbb{R}^{m+n}$ とする．$\Omega \subset X \times Y$ を開集合とする．写像 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \Omega \to Y$ は次をみたすとする．

(a) $\boldsymbol{F}$ はある $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in \Omega$ で $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{0}$ をみたし，$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ のある近傍 U で連続である．

(b) $\boldsymbol{F}$ は $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ の近傍 U で $\boldsymbol{y}$ について微分可能であり，その $\boldsymbol{y}$ についての微分 $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ は U で連続である．

(c) $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) : Y \to Y$ は全単射である．（すなわち，n 次正方行列 $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ は逆行列をもつ．）

このとき，以下のことが成り立つ．

(i) ある $B_X(\boldsymbol{x}_0, r) \times B_Y(\boldsymbol{x}_0, \rho) \subset U$ と写像 $\boldsymbol{f} : B_X(\boldsymbol{x}_0, r) \to B_Y(\boldsymbol{y}_0, \rho)$ が存在して，

$$\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{x} \in B_Y(\boldsymbol{x}_0, r))$$

が成り立つ．また，$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ をみたす任意の $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in B_Y(\boldsymbol{x}_0, r) \times B_{\mathbb{R}^n}(\boldsymbol{y}_0, \rho)$ に対して $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が成り立つ．

(ii) $\boldsymbol{F}$ が U で C^1 級ならば，$\boldsymbol{f}$ も C^1 級で，

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\right)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \quad (\boldsymbol{x} \in B_X(\boldsymbol{x}_0, r))$$

が成り立つ．

(iii) $\boldsymbol{F}$ が U で C^m 級ならば，$\boldsymbol{f}$ も C^m 級である．

証明 $\boldsymbol{x} = {}^{\top}(x_1, \cdots, x_m) \in X = \mathbb{R}^m$ のノルムを $\|\boldsymbol{x}\|_X = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2}$ と表す．$\boldsymbol{y} \in Y = \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, by) \in X \times Y = \mathbb{R}^{m+n}$ についても同様に，そのノルムをそれぞれ，$\|\boldsymbol{y}\|_Y$, $\|\boldsymbol{z}\|_{X\times Y}$ と表す．

一般性を失うことなく，$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ としてよい．以下では，$\boldsymbol{F}$ の $\boldsymbol{y}$ についての微分 $\dfrac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}$ を $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}$ と表す．すなわち，

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

とおく．写像 $\boldsymbol{G}$ を

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

と定める．このとき，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

である．したがって，各 $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \cdot)$ の不動点 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ が求まれば，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ が求める $\boldsymbol{f}$ である．

$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の $\boldsymbol{y}$ についての微分は

$$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{I}_Y - \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})^{-1}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

である．ここで，$\boldsymbol{I}_Y$ は Y から Y への恒等写像，すなわち，n 次単位行列である．このとき，$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{O}$（$n$ 次零行列）であり，$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{y}}$ は $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ の近傍で連続だから，ある正定数 r と ρ が存在して，

$$\sup\{\|\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\| : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in B_X(\boldsymbol{0}, r) \times B_Y(\boldsymbol{0}, \rho)\} \leq \frac{1}{2} \tag{5.10.2}$$

が成り立つ．ここで，n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，$\|A\|$ を

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

によって定める．

(5.10.2) の $\rho > 0$ を固定する．$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ だから，$r > 0$ をより小さくとれば，$\boldsymbol{G}$ の連続性より，

$$\sup\{\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|_Y : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) \in B_X(\boldsymbol{0}, r) \times B_Y(\boldsymbol{0}, \rho)\} \leq \frac{\delta}{2} \tag{5.10.3}$$

とできる．平均値の定理より，

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\left(\int_0^1 \boldsymbol{G}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+t(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}))\,dt\right)(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y})$$

を得る．したがって，

$$\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_Y\le\int_0^1 \|\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+t(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}))\|\,dt\,\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}\|_Y$$

が成り立つ．このとき，$\|\boldsymbol{x}\|_X\le r$, $\|\boldsymbol{y}\|_Y\le\rho$, $\|\boldsymbol{y}_1\|_Y\le\rho$ ならば，

$$\|\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+t(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y})\|_Y\le(1-t)\|\boldsymbol{y}\|_Y+t\|\boldsymbol{y}_1\|_Y\le\rho$$

であるから，(5.10.2) より，

$$\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_Y\le\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}\|_Y \tag{5.10.4}$$

を得る．(5.10.4) で $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{0}$ とすると，

$$\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_Y\le\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}\|_Y\le\frac{\rho}{2}$$

を得る．これと (5.10.3) より，$\|\boldsymbol{x}\|_X\le r$, $\|\boldsymbol{y}\|_Y\le\rho$ のとき，

$$\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_Y\le\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})\|_Y+\|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_Y\le\rho \tag{5.10.5}$$

が成り立つ．(5.10.4) と (5.10.5) より，$\boldsymbol{G}:B_X(\boldsymbol{0},r)\times B_Y(\boldsymbol{0},\rho)\to B_Y(\boldsymbol{0},\rho)$ は，$\boldsymbol{x}$ について一様な $\boldsymbol{y}$ に関する縮小写像である．したがって，定理 5.10.9 より，$\forall\boldsymbol{x}\in B_X(\boldsymbol{0},r)$ に対して，

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$$

をみたす $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\in B_Y(\boldsymbol{0},\rho)$ が一意に存在し，この $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ に関して連続である．$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ だから，$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ である．$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ とおくと，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{0}$ $\boldsymbol{x}\in B_X(\boldsymbol{0},r)$ が成り立ち，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\cdot)$ の不動点の一意性より，$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$ をみたす任意の $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in B_Y(\boldsymbol{x}_0,r)\times B_Y(\boldsymbol{y}_0,\rho)$ に対して $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が成り立つ．

(ii) を示そう．$\boldsymbol{F}$ は C^1 級であるとする．このとき，$\boldsymbol{F}$ の微分 $D\boldsymbol{F}$ は $D\boldsymbol{F}={}^\top(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}})$ と与えられる．平均値の定理より，

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})\|_Y\le L\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|$$

が成り立つ．ここで，$L=\sup\{\|\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|:(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in B_X(\boldsymbol{0},r)\times B_Y(\boldsymbol{0},\rho)\}$ である．したがって，定理 5.10.9 より，

$$\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_2)\|_Y \le 2L\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|_X \tag{5.10.6}$$

が成り立つ．

$t\in\mathbb{R}$（十分小），$\boldsymbol{h}\in X$ に対して，$\boldsymbol{z}(t)={}^\top(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}))$, $\boldsymbol{z}={}^\top(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{0}&=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h}))-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))\\
&=D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z})+\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}\|_{X\times Y})\\
&=t\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{h}+\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))\\
&\quad+\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}\|_{X\times Y})
\end{aligned}$$

を得る．ここで，$\|\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}\|_{X\times Y})\|_Y=o(\|\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}\|_{X\times Y})$ である．したがって，

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))+t\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{h}\\
&\quad=-\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}\|_{X\times Y})
\end{aligned}$$

を得る．

$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ に関して連続だから，$t\to 0$ のとき，$\|\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}\|_{X\times Y}\to 0$ である．したがって，$\forall\varepsilon>0$ に対して $\exists\delta>0$ s.t. $|t|<\delta$ ならば，

$$\|\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}\|_{X\times Y})\|_Y\le\varepsilon\|\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}\|_{X\times Y}\le\varepsilon|t|\|\boldsymbol{h}\|_X+\varepsilon\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\|_Y$$

が成り立つ．(5.10.6) より，$\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\|_Y\le 2L|t|\|\boldsymbol{h}\|_X$ であるから，$|t|<\eta$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\|(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{h})-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))+t\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{h}\|_Y\\
&\quad\le 2\|\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{z}(t)-\boldsymbol{z}\|_{X\times Y})\|_Y\\
&\quad\le C\varepsilon|t|\|\boldsymbol{h}\|_X,
\end{aligned}$$

すなわち，

$$\|(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{h}\|_Y=\boldsymbol{o}(\|\boldsymbol{h}\|_X)$$

が成り立つ．よって，$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ に関して微分可能であり，

$$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))$$

を得る．この式の右辺は $\boldsymbol{x}$ に関して連続だから，$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ に関して C^1 級である．したがって，(ii) を得る．次に $\boldsymbol{F}$ が C^2 級とすると，この式の右辺は C^1 級となる．したがって，$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ は C^2 級である．この議論を繰り返して，$m \geq 3$ の場合も，$\boldsymbol{F}$ が C^m 級ならば，$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$ は C^m 級であることがわかる． □

注意 5.10.12 定理 5.10.11 は，X, Y, Z を Banach 空間，Ω を $X \times Y$ の開集合として，$\boldsymbol{F} : \Omega \to Z$ の場合に拡張できる．参考文献として次のものをあげておく．

1. 非線型数学，増田久弥 著，朝倉書店，1985

2. 函数解析の基礎，上，下，コルモゴロフ 著，フォミーン 著，山崎三郎 訳，柴岡泰光 訳，1979

3. Methods of Bifurcation Theory, S.-N. Chow 著，J. K. Hale 著，1982

第6章　レポート問題

6.1　第1Q 解析学概論第一 レポート問題

レポート問題 1 (R2.5.4) 締切：令和 2 年 5 月 10 日（日）17:00

問. $\mathbb{Q}$ の部分集合 A, A' を

$$A = \{r \in \mathbb{Q} : r \leq 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : r > 0,\, r^2 < 2\},$$
$$A' = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0,\, r^2 > 2\}$$

と定める.

(i) A, A' は有理数の切断 (A, A') を定めることを示せ.

(ii) A' に属する最小の有理数はないことを示せ.

（A に属する最大の有理数がないことについては，たとえば，$r \in A$ に対して $s = 1 + \dfrac{r}{r+2}$ または $s = \dfrac{r(r^2+6)}{3r^2+2}$ などを考えてみよ．A' についても同様である.）

レポート問題 2 (R2.5.18) 締切：令和 2 年 5 月 24 日（日）17:00

問. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = +\infty$$

が成り立つことを示せ.

レポート問題 3 (R2.5.25) 締切：令和 2 年 5 月 31 日（日）17:00

問. 数列 $\{a_n\}$ に対して

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

が成り立つことを証明せよ．

レポート問題 4 (R2.6.1) 締切：令和 2 年 6 月 7 日（日）17:00

問. 数列 $\{a_n\}$ について次の問に答えよ．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|<\infty$ をみたすならば，$\{a_n\}$ は Cauchy 列であることを示せ．

(ii) $0<r<1$ をみたす定数 r と $N\in\mathbb{N}$ が存在して，任意の $n>N$ に対して $|a_{n+1}-a_n|\leq r|a_n-a_{n-1}|$ が成り立つならば，$\{a_n\}$ は Cauchy 列であることを示せ．

レポート問題 5 (R2.6.8) 締切：令和 2 年 6 月 14 日（日）17:00

問 1. 次の各場合に級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の収束発散を調べよ．

(i) $a_n=\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$ は発散し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ は収束する．（ただし，$a_n^+=\max\{a_n,0\}$, $a_n^-=\max\{-a_n,0\}$ である．）

問 2. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{\theta}{n}$ について次の問に答えよ．ただし，θ は正定数とする．

(i) この級数は収束することを示せ．

(ii) この級数は絶対収束しないことを示せ．

レポート問題 6 (R2.6.15) 締切：令和 2 年 6 月 21 日（日）17:00

問. 関数 $f(x)$ は区間 $[a,b)$ 上で単調増加かつ上に有界であるとする．このとき，$\displaystyle\lim_{x\to b-0}f(x)$ が存在することを示せ．

6.2 第 2Q 解析学概論第二 レポート問題

レポート問題 1 (R2.6.29) 締切：令和 2 年 7 月 5 日（日）17:00

以下の問 1 と問 2 に解答せよ．

問 1. $x_n > a$, $x_n \to a$ をみたす任意の数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ が存在するとする．このとき，$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ は $x_n > a$, $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ をみたす数列の取り方に依らず一定であることを示せ．

注. 問 1 は関数の右極限に関することであるが，関数の極限および左極限についても同様のことが成り立つ．

問 2. f を開区間 (a, b) で一様連続な関数とする．このとき，$\lim_{x\to a+0} f(x)$ が存在することを示せ．

注. 問 2 は関数の右極限に関することであるが，左極限についても同様のことが成り立つ．したがって，次の命題が成り立つことがわかる．

命題. f を有界開区間 (a, b) で連続な関数とする．このとき，次の (i) と (ii) は同値である．

(i) f は (a, b) で一様連続である．

(ii) $[a, b]$ 上の連続関数 g で，すべての $x \in (a, b)$ に対して $g(x) = f(x)$ をみたすものが存在する．

レポート問題 2 (R2.7.6) 締切：令和 2 年 7 月 12 日（日）17:00

問. I を区間とし，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を I 上の関数列，f を I 上の関数とする．次の (i), (ii) について，正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ．

(i) 各 f_n は I で有界であるとする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に I 上で一様収束するならば，f は I で有界であり，$\sup_{x\in I} f_n(x) \to \sup_{x\in I} f(x)$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

(ii) 各 f_n は I で有界かつ連続とする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I で有界な関数 f に I 上で各点収束するならば，$\sup_{x\in I} f_n(x) \to \sup_{x\in I} f(x)$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

レポート問題 3 (R2.7.13) 締切：令和 2 年 7 月 19 日（日）17:00

問 1. 区間 $[0,\pi]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_n(x) = e^{-an}\cos nx$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ について，次の (1), (2) の極限，積分がそれぞれ存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ．ただし，a は正定数とする．

$$(1)\ \lim_{x\to\pi}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad (2)\ \int_0^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)dx$$

問 2. α を正定数とする．区間 $[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(x) = n^{\alpha}xe^{-nx}$ $(n=1,2,\cdots)$ の各点収束および一様収束について調べよ．

レポート問題 4 (R2.7.20) 締切：令和 2 年 7 月 26 日（日）17:00

以下では，数列 $\{a_n\}$ に対して，$a_n \to \alpha$ $(n\to\infty)$, $\alpha\in[-\infty,\infty]$（ここでは $\alpha=\pm\infty$ も含む.）のとき，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が存在するということにする．

問 1. 整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \rho$ が存在するならば，ρ はこの級数の収束半径であることを示せ．

問 2. $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して，一般の二項係数 $\dbinom{\alpha}{n}$ を

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} \quad (n\geq 1), \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

によって定める．このとき，整級数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dbinom{\alpha}{n}x^n$ の収束半径を求めよ．

問 3. $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)$ $(x\to 0)$ ならば，$a_k = b_k$ $(k=0,1,\cdots,n)$ が成り立つことを示せ．

レポート問題 5 (R2.7.27) 締切：令和 2 年 8 月 2 日（日）17:00

問 1. 次の問に答えよ．

(i) $U(\boldsymbol{x},\varepsilon) = \{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2 : |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| < \varepsilon\}$ は開集合であることを示せ．

(iii) $A = \{\boldsymbol{x} = {}^{\top}(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y\in\mathbb{Q},\ 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$ に対して，$A^{\circ} = \emptyset$ および $\overline{A} = \{\boldsymbol{x} = {}^{\top}(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$ を示せ．

問 2. $\Omega = \{\boldsymbol{x} = {}^\top(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0,\, 0 < x_2 < 2\pi\}$ とし，Ω から $\mathbb{R}^2$ への写像

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

を

$$f_1(\boldsymbol{x}) = x_1 \cos x_2, \quad f_2(\boldsymbol{x}) = x_1 \sin x_2 \quad (\boldsymbol{x} = {}^\top(x_1, x_2) \in \Omega)$$

によって定める．$\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{x}$ における微分（Jacobi 行列）$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \left(= \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\right)$ を求めよ．

レポート問題 6 (R2.8.3) 締切：令和 2 年 8 月 9 日（日）17:00

問 1. $f = f(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x} = {}^\top(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の C^1 級関数とする．$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ を極座標 $\boldsymbol{r} = {}^\top(r, \theta)$ により，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{r}) : x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta\ (r \neq 0)$ と表す．$g = g(\boldsymbol{r})$ を $g(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{r}))$ と定める．次の問に答えよ．

(i) $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{r}}$ を求めよ.（答えのみでよい.）

(ii) 円周 C : $x^2 + y^2 = R^2$ 上の点 $\boldsymbol{x}_0 = {}^\top(x_0, y_0) = {}^\top(R\cos\theta_0, R\sin\theta_0)$ における C の単位法線ベクトル方向の f の方向微分は $\pm\dfrac{\partial g}{\partial r}(\boldsymbol{r}_0)$ であり，単位接線ベクトル方向の f の方向微分は $\pm\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(\boldsymbol{r}_0)$ であることを示せ．ただし，$\boldsymbol{r}_0 = {}^\top(R, \theta_0)$ とする．

6.3 第 1Q 解析学概論第一 レポート問題の略解

レポート問題 1 (R2.5.4) 略解

問. $\mathbb{Q}$ の部分集合 $A,\ A'$ を

$$A = \{r \in \mathbb{Q} : r \le 0\} \cup \{r \in \mathbb{Q} : r > 0,\ r^2 < 2\},$$
$$A' = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0,\ r^2 > 2\}$$

と定める．

(i) $A,\ A'$ は有理数の切断 (A, A') を定めることを示せ．

(ii) A' に属する最小の有理数はないことを示せ．

（A に属する最大の有理数がないことについては，たとえば，$r \in A$ に対して $s = 1 + \dfrac{r}{r+2}$ または $s = \dfrac{r(r^2+6)}{3r^2+2}$ などを考えてみよ．A' についても同様である.）

略解. (i) $\mathbb{Q} = A \cup A',\ A \cap A' = \emptyset$ は容易.（$r^2 = 2$ をみたす $r \in \mathbb{Q}$ は存在しないことに注意する.）また，$r \in A,\ r' \in A'$ ならば，$r < r'$ も容易に示すことができる．A に属する最大の有理数がないことは次のようにして示すことができる．A に最大値があれば $r > 0$ である.（たとえば，$1 \in A$ に注意.） $r \in A, r > 0$ として，$s = 1 + \dfrac{r}{r+2}$ とする．このとき，$s \in \mathbb{Q},\ s > 1$ であり，

$$s - r = \frac{2 - r^2}{r+2} > 0,$$

$$s^2 - 2 = \frac{2(r^2-2)}{(r+2)^2} < 0$$

であるから，$s \in A,\ s > r$ である．したがって，A には最大の有理数は存在しない．以上より，$A,\ A'$ は有理数の切断 (A, A') を定める．

(ii) $r \in A'$ に対して，上のように s を定めると，$s - r < 0,\ s^2 - 2 > 0$ を得るから，$s \in A',\ s < r$ が成り立つ．したがって，A' に属する最小の有理数はない． $\square$

レポート問題 2 (R2.5.18) 略解

問. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ のとき,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = +\infty$$

が成り立つことを示せ.

略解. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ より,

$$\forall M > 0 \text{ に対して } \exists N_0 \text{ s.t. } n > N_0 \text{ ならば } a_n > 2M$$

が成り立つ．よって $K = \max\{|a_1|, \cdots, |a_{N_0}|\}$ とおくと，$n > N_0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} &= \frac{a_{N_0+1} + \cdots + a_n}{n} + \frac{a_1 + \cdots + a_{N_0}}{n} \\ &> \frac{2M + \cdots + 2M}{n} - \frac{|a_1| + \cdots + |a_{N_0}|}{n} \\ &\geq \frac{2M(n - N_0)}{n} - \frac{KN_0}{n} = 2M - \frac{2N_0}{n}M - \frac{KN_0}{n}. \end{aligned}$$

が成り立つ．そこで，$N \geq \max\{4N_0, 2KN_0/M\}$ をみたす $N \in \mathbb{N}$ をとろう．このとき，$n > N$ に対して

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} > 2M - \frac{M}{2} - \frac{M}{2} = M$$

が成り立つ．したがって，$\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to \infty$ である． □

レポート問題 3 (R2.5.25) 略解

問. 数列 $\{a_n\}$ に対して

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$$

が成り立つことを証明せよ.

略解. $\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ とおく．$\alpha = \infty$ のときは明らかだから，$\alpha \in \mathbb{R}$ とする.

$A_n = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ とおく．$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$ より

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow a_n < \alpha + \varepsilon$$

が成り立つ．したがって，$n \geq N$ のとき，

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + \cdots + a_{N-1}}{n} + \frac{a_N + \cdots + a_n}{n} \\ &< \frac{a_1 + \cdots + a_{N-1}}{n} + \frac{(\alpha+\varepsilon) + \cdots + (\alpha+\varepsilon)}{n} \\ &= \frac{a_1 + \cdots + a_{N-1}}{n} + \left(1 - \frac{N-1}{n}\right)(\alpha+\varepsilon) \end{aligned}$$

が成り立つ．両辺の上極限をとって，

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n \leq \alpha + \varepsilon$$

を得る．$\varepsilon > 0$ は任意だから，$\varlimsup_{n\to\infty} A_n \leq \alpha$ が成り立つ． □

注意. 上の議論では，$a_n \leq b_n \Rightarrow \varlimsup_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} b_n$ を用いた．このことは，講義ノートに書いてないし，演習問題にもなっていないので，念のため証明を与えておく．

$n \geq k$ のとき，$b_n \leq \sup_{m\geq k} b_m$ だから，仮定 $(a_n \leq b_n)$ より，

$$a_n \leq \sup_{m\geq k} b_m \tag{6.3.1}$$

である．(6.3.1) の右辺は $n \geq k$ をみたす n には無関係なので，左辺において n $(n \geq k)$ に関して sup をとって，

$$\sup_{n\geq k} a_n \leq \sup_{m\geq k} b_m \tag{6.3.2}$$

を得る．(注：(6.3.1) の右辺は $n \geq k$ をみたす n には無関係なので，$\sup_{m\geq k} b_m$ は $\{a_n : n \geq k\}$ の 1 つの上界である．したがって (6.3.2) を得る．) (6.3.2) において $k \to \infty$ として，$\varlimsup_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} b_n$ を得る． □

もちろん，この注意を用いなくても問の不等式は証明できる．注意の議論を具体的に行えばよい．実際，次のようにすればよい．

別略解. 注意を用いるところ以降から書く．

$k \geq N$ とする．$n \geq k$ に対して，

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + \cdots + a_{N-1}}{n} + \frac{a_N + \cdots + a_n}{n} \\ &< \frac{|a_1| + \cdots + |a_{N-1}|}{n} + \frac{(\alpha+\varepsilon) + \cdots + (\alpha+\varepsilon)}{n} \\ &\leq \frac{|a_1| + \cdots + |a_{N-1}|}{k} + (\alpha+\varepsilon) + \frac{N-1}{k}(|\alpha| + \varepsilon) \end{aligned}$$

を得る．したがって，$k \geq N$ のとき，

$$\sup_{n \geq k} A_n \leq \frac{|a_1| + \cdots + |a_{N-1}|}{k} + (\alpha+\varepsilon) + \frac{N-1}{k}(|\alpha| + \varepsilon)$$

が成り立つ．両辺で $k \to \infty$ として，

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n \leq \alpha + \varepsilon$$

を得る．$\varepsilon > 0$ は任意だから，$\varlimsup_{n\to\infty} A_n \leq \alpha$ を得る．　□

レポート問題 4 (R2.6.1) 略解

問. 数列 $\{a_n\}$ について次の問に答えよ．

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$ をみたすならば，$\{a_n\}$ は Cauchy 列であることを示せ．

(ii) $0 < r < 1$ をみたす定数 r と $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n > N$ に対して $|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}|$ が成り立つならば，$\{a_n\}$ は Cauchy 列であることを示せ．

略解. (i) $m > n$ に対して，

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_n| \leq \cdots \leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k|$$

が成り立つ．仮定より $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ は収束するから，$\sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．したがって，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } m > n \geq N \text{ のとき } |a_m - a_n| < \varepsilon$$

を得る．これは $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることを意味する．

(ii) 仮定より任意の $n > N$ に対して，

$$|a_{n+1} - a_n| \leq r|a_n - a_{n-1}| \leq r^2|a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \cdots \leq r^{n-N}|a_{N+1} - a_N|$$

を得る．$0 < r < 1$ より，

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| \leq |a_{N+1} - a_N| \sum_{n=N+1}^{\infty} r^{n-N} < \infty$$

を得る．(i) より $\{a_n\}$ は Cauchy 列である． □

レポート問題 5 (R2.6.8) 略解

問 1. 次の各場合に級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束発散を調べよ．

(i) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ は発散し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ は収束する．（ただし，$a_n^+ = \max\{a_n, 0\}$, $a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$ である．）

略解. (i) 収束する．実際，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

だから収束する．

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すると仮定とすると，$a_n^+ = a_n + a_n^-$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ は収束するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_n^-)$ も収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ となる．これは矛盾である．したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

上記のように $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散するが，より精密には，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ が成り立つ．実際，$S^- = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \geq 0$ とおくと，任意の n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^- \leq S^-$

が成り立つ．一方，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ は発散するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ である．したがって，任意の $M > 0$ に対して $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^+ \geq M + S^-$ を得る．以上より，$n \geq N$ ならば $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n} a_k^- \geq M + S^- - S^- = M$ が成り立つ．よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ である．　□

問 2. 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin\frac{\theta}{n}$ について次の問に答えよ．ただし，θ は正定数とする．

(i) この級数は収束することを示せ．

(ii) この級数は絶対収束しないことを示せ．

略解. (i) $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $n \geq N \Rightarrow 0 < \dfrac{\theta}{n} < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ． $\sin 0 = 0$ であり，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で $\sin x > 0$ かつ $\sin x$ は単調増加である．したがって，$\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin\frac{\theta}{n}$ は交項級数だから収束する．よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin\frac{\theta}{n}$ は収束する．

(ii) 考え方：$x \to 0$ のとき，$\sin x \sim x$ であるから，$n \to \infty$ のとき $\sin\dfrac{\theta}{n} \sim \dfrac{\theta}{n}$ である．$\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ は発散するから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \sin\frac{\theta}{n} \right|$ は発散する．

実際，$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi} x$ が成り立つから，$n \geq N \Rightarrow \sin\dfrac{\theta}{n} \geq \dfrac{2\theta}{\pi}\dfrac{1}{n}$ が成り立つ．$\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ であるから，比較判定法より $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} \sin\frac{\theta}{n} = \infty$ である．したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin\frac{\theta}{n} \right| = \infty$ であるから，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin\frac{\theta}{n}$ は絶対収束しない．　□

レポート問題 6 (R2.6.15) 略解

問. $f(x)$ は区間 $[a,b)$ 上で単調増加かつ上に有界であるとする．このとき，$\lim_{x\to b-0} f(x)$ が存在することを示せ．

略解. 仮定より $f([a,b))$ は上に有界だから，$\alpha = \sup f([a,b))$ が存在する． このとき，任意の $x \in [a,b)$ に対して $f(x) \leq \alpha$ が成り立ち，また，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $x_0 \in [a,b)$ が存在して $\alpha - \varepsilon < f(x_0) \leq \alpha$ が成り立つ．$\delta = b - x_0 > 0$ とおく．このとき，$0 < b - x < \delta$ ならば，$x_0 < x < b$ である．一方，f は単調増加だから，$\alpha - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq \alpha$ が成り立つ．これは，$\lim_{x\to b-0} f(x) = \alpha$ を意味する． □

別解. $\{x_n\}$ を，$a \leq x_n < b$, $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots < b$ および $x_n \to b$ $(n \to \infty)$ をみたす数列とする．仮定より $\{f(x_n)\}$ は上に有界な単調増加数列であるから $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ が存在する．このとき，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N_1 \Rightarrow 0 \leq \alpha - f(x_n) < \varepsilon$$

が成り立つ．$x_{N_1} \leq x < b$ ならば，$f(x_{N_1}) \leq f(x)$ であるから，$\alpha - f(x) \leq \alpha - f(x_{N_1}) < \varepsilon$ を得る．一方， $x_n \uparrow b$ より，$x \leq x_{N_2}$ をみたす x_{N_2} $(N_2 > N_1)$ が存在する．このとき，$f(x) \leq f(x_{N_2}) \leq \alpha$ であるから，$0 \leq \alpha - f(x_{N_2}) \leq \alpha - f(x)$ を得る．以上より，$\delta = b - x_{N_1} > 0$ おくと，

$$0 < b - x < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．すなわち，$\lim_{x\to b-0} f(x) = \alpha$ である． □

6.4　第2Q 解析学概論第二 レポート問題の略解

レポート問題1 (R2.6.29) 略解

問1. $x_n > a$, $x_n \to a$ をみたす任意の数列 $\{x_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ が存在するとする．このとき，$\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ は $x_n > a$, $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ をみたす数列の取り方に依らず一定であることを示せ．

略解. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を $x_n > a$, $x_n \to a$, $y_n > a$, $y_n \to a$ をみたす2つの数列とする．$\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 交互に並べて得られる数列 $x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots$ を $\{z_n\}$ とすると，$z_n > a$, $z_n \to a$ であるから，$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \alpha$ が存在する．$\{f(x_n)\}$, $\{f(y_n)\}$ は $\{f(z_n)\}$ の部分列であるから同じ極限 α に収束する．したがって，極限 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ は $x_n \neq a$, $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ をみたす数列の取り方によらず一定である． □

問2. f を開区間 (a, b) で一様連続な関数とする．このとき，$\lim_{x\to a+0} f(x)$ が存在することを示せ．

略解. $x_n > a$, $x_n \to a$ をみたす任意の数列 $\{x_n\}$ をとる．f は一様連続だから，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } x, y \in (a, b), |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

が成り立つ．$x_n > a$, $x_n \to a$ だから，$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $m, n \geq N$ ならば $x_m, x_n \in (a, b), |x_m - x_n| < \delta$ が成り立つ．したがって，$|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ を得る．このことは，$\{f(x_n)\}$ が Cauchy 列であることを意味する．したがって，$\{f(x_n)\}$ はある α に収束する．問1より，α は $x_n > a$, $x_n \to a$ をみたす $\{x_n\}$ の取り方には依らない数である．講義のときと同じようにして，$\lim_{x\to a+0} f(x) = \alpha$ が成り立つことがわかる． □

レポート問題2 (R2.7.6) 略解

問. I を区間とし，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を I 上の関数列，f を I 上の関数とする．次の (i), (ii) について，正しければ証明し，正しくなければ反例を与えよ．

(i) 各 f_n は I で有界であるとする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に I 上で一様収束するならば，f は I で有界であり，$\sup_{x\in I} f_n(x) \to \sup_{x\in I} f(x)$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

(ii) 各 f_n は I で有界かつ連続とする．$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が I で有界な関数 f に I 上で各点収束するならば，$\sup_{x\in I} f_n(x) \to \sup_{x\in I} f(x)$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

略解. (i) 正しい．$\{f_n\}$ は F に I 上一様収束するから，

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in I \text{ に対して } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

が成り立つ．$\varepsilon = 1$ として，$\sup_{x\in I} |f(x)| \leq \sup_{x\in I} |f_{N_1}(x)| + 1 < \infty$ を得る．したがって，f は I 上有界である．また，

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in I \text{ に対して } f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

であるから，$n \geq N_\varepsilon$ ならば $\sup_{x\in I} f(x) - \varepsilon \leq \sup_{x\in I} f_n(x) \leq \sup_{x\in I} f(x) + \varepsilon$ が成り立つ．

実際，$n \geq N_\varepsilon$ ならば $f_n(x) < f(x) + \varepsilon \leq \sup_{x\in I} f(x) + \varepsilon$，したがって，$f_n(x) \leq \sup_{x\in I} f(x) + \varepsilon$ が $\forall x \in I$ に対して成り立つ．左辺で $x \in I$ について sup をとって $\sup_{x\in I} f_n(x) \leq \sup_{x\in I} f(x) + \varepsilon$ を得る．同様にして，$\sup_{x\in I} f(x) - \varepsilon \leq \sup_{x\in I} f_n(x)$ がわかるから，$n \geq N_\varepsilon$ ならば

$$\sup_{x\in I} f(x) - \varepsilon \leq \sup_{x\in I} f_n(x) \leq \sup_{x\in I} f(x) + \varepsilon,$$

つまり，

$$|\sup_{x\in I} f_n(x) - \sup_{x\in I} f(x)| \leq \varepsilon$$

が成り立つ．以上より，$\sup_{x\in I} f_n(x) \to \sup_{x\in I} f(x)$ $(n \to \infty)$ を得る．

□

(ii) 正しくない．たとえば，$I = (0, 1)$, $f_n(x) = x^n$ とすると，$\{f_n\}$ は I 上有界かつ連続，$\sup_{x\in I} f_n(x) = 1$ であり，I 上各点で $f_n \to f = 0$ である．$\sup_{x\in I} f(x) = 0$ だから，$\sup_{x\in I} f_n(x) \to \sup_{x\in I} f(x)$ $(n \to \infty)$ は成立しない．(講義ノートの例 4.1.3 には他の反例もある．) □

レポート問題 3 (R2.7.13) 略解

問 1. 区間 $[0, \pi]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, $f_n(x) = e^{-an} \cos nx$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ について，次の (1), (2) の極限，積分がそれぞれ存在するかどうかを調べ，存在する場合はその値を求めよ．ただし，a は正定数とする．

$$(1)\ \lim_{x\to\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad (2)\ \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx$$

略解. $\forall x \in [0,\pi]$ に対して $|f_n(x)| \le e^{-na}$ であり，$a > 0$ より，$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-na} = \frac{1}{1-e^{-a}} < \infty$ である．したがって，Weierstrass の優級数定理より，$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ は $[0,\pi]$ 上で一様収束する．ゆえに，f は $[0,\pi]$ 上で連続であるから，

$$\lim_{x\to\pi}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-na}\cos n\pi = \frac{1}{1+e^{-a}}.$$

また，項別積分可能であるから，

$$\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi} f_n(x)\,dx = \pi.$$

□

問 2. α を正定数とする．区間 $[0,1]$ 上の関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，$f_n(x) = n^{\alpha}xe^{-nx}$ $(n = 1,2,\cdots)$ の各点収束および一様収束について調べよ．

略解. $\alpha > 0$ のとき，$\{f_n\}$ は $[0,1]$ 上で $f = 0$ に各点収束する．$f_n'(x) = n^{\alpha}e^{-nx}(1-nx)$ より，$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)| = f_n(\frac{1}{n}) = n^{\alpha-1}e^{-1}$ を得る．したがって，$0 < \alpha < 1$ のとき，$\{f_n\}$ は $[0,1]$ 上で $f = 0$ に一様収束し，$\alpha \ge 1$ のとき，$\{f_n\}$ は $[0,1]$ 上で $f = 0$ に各点収束するが，一様収束しない． □

レポート問題 4 (R2.7.20) 略解

以下では，数列 $\{a_n\}$ に対して，$a_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$, $\alpha \in [-\infty,\infty]$（ここでは $\alpha = \pm\infty$ も含む.）のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が存在するということにする．

問 1. 整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \rho$ が存在するならば，ρ はこの級数の収束半径であることを示せ．

略解. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ が存在すれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \underline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ が成り立つことを注意しておく．$0 < \rho < \infty$ の場合を考える.（$\rho = 0,\infty$ のときは略.）$|x| < \rho$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{|x|}{\rho} < 1$$

だから，d'Alembert の判定法（定理 1.5.12）より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する（したがって収束する）．$|x| > \rho$ とする．$|x| > |x_0| > \rho$ をみたす x_0

をとる．$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束するとすると，定理 4.4.2 より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ は収束する．一方，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x_0^{n+1}}{a_n x_0^n}\right| = \frac{|x_0|}{\rho} > 1$$

だから，d'Alembert の判定法（定理 1.5.12）より，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ は発散することになり，矛盾が生じる．よって，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する．以上より，ρ は収束半径である． □

問 2. $\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して，一般の二項係数 $\displaystyle\binom{\alpha}{n}$ を

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} \quad (n \geq 1), \quad \binom{\alpha}{0} = 1$$

によって定める．このとき，整級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ の収束半径を求めよ．

略解. $a_n = \displaystyle\binom{\alpha}{n}$ とおく．$\alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ のとき，すべての $n \geq \alpha+1$ に対して $a_n = 0$ であるから，収束半径は ∞ である． $\alpha \notin \mathbb{N}\cup\{0\}$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1$$

であるから，問 1 より 収束半径は 1 である． □

レポート問題 5 (R2.7.27) 略解

問 1. 次の問に答えよ．

(i) $U(\boldsymbol{x},\varepsilon) = \{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2 : |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| < \varepsilon\}$ は開集合であることを示せ．

(iii) $A = \{\boldsymbol{x} = {}^\top(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q},\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ に対して，$A^\circ = \emptyset$ および $\overline{A} = \{\boldsymbol{x} = {}^\top(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ を示せ．

略解. (i) $\boldsymbol{y} \in U(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ とすると，$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| < \varepsilon$ である．$r = \varepsilon - |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$ とおくと，$r > 0$ である．$\boldsymbol{z} \in U(\boldsymbol{y}, r)$ ならば，$|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}| \leq |\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| <$

$r+|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=\varepsilon$ であるから，$\boldsymbol{z}\in U(\boldsymbol{x},\varepsilon)$. したがって，$U(\boldsymbol{y},r)\subset U(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ である．よって，任意の $\boldsymbol{y}\in U(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ は $U(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ の内点である．ゆえに，$U(\boldsymbol{x},\varepsilon)=U(\boldsymbol{x},\varepsilon)^\circ$ であるから，$U(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ は開集合である．

(ii) $\boldsymbol{q}={}^\top(q_1,q_2)\in A$ とする．$\forall\varepsilon>0$ に対して，$\exists x_1\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]$ s.t. $|q_1-x_1|<\varepsilon$. $\boldsymbol{x}={}^\top(x_1,q_2)$ とおくと，$\boldsymbol{x}\in U(\boldsymbol{q},\varepsilon)\cap A^c$ である．したがって，任意の $\boldsymbol{q}={}^\top(q_1,q_2)\in A$ は A の内点ではない．$A^\circ\subset A$ だから，$A^\circ=\emptyset$ である．$\boldsymbol{q}_n={}^\top(q_n,p_n)\in A$, $\boldsymbol{q}_n\to\boldsymbol{x}={}^\top(x,y)$ とする．$q_n\to x$, $p_n\to y$, $0\le q_n\le 1$, $0\le p_n\le 1$ だから，$0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ が成り立つ．したがって，$\boldsymbol{x}\in[0,1]\times[0,1]$ である．よって，$\overline{A}\subset[0,1]\times[0,1]$. $\boldsymbol{x}={}^\top(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ とすると，$\exists q_n,p_n\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ s.t. $q_n\to x$, $p_n\to y$. $\boldsymbol{q}_n={}^\top(q_n,p_n)\in A$ だから，$[0,1]\times[0,1]\subset\overline{A}$. 以上より，$\overline{A}=[0,1]\times[0,1]$. □

問 2. $\Omega=\{\boldsymbol{x}={}^\top(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1>0,\ 0<x_2<2\pi\}$ とし，Ω から $\mathbb{R}^2$ への写像

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\end{pmatrix} : \Omega\to\mathbb{R}^2$$

を

$$f_1(\boldsymbol{x})=x_1\cos x_2,\quad f_2(\boldsymbol{x})=x_1\sin x_2\quad(\boldsymbol{x}={}^\top(x_1,x_2)\in\Omega)$$

によって定める．$\boldsymbol{f}$ の $\boldsymbol{x}$ における微分（Jacobi 行列）$D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ $\left(=\dfrac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\right)$ を求めよ．

略解.

$$\begin{aligned}D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=D\begin{pmatrix}f_1(\boldsymbol{x})\\ f_2(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}Df_1(\boldsymbol{x})\\ Df_2(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cos x_2 & -x_1\sin x_2\\ \sin x_2 & x_1\cos x_2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

問 3. $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+o(x^n)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+o(x^n)$ $(x\to 0)$ ならば，$a_k=b_k$ $(k=0,1,\cdots,n)$ が成り立つことを示せ．

略解． 仮定より，

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+o(x^n)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n+o(x^n)\quad(x\to 0)\quad(6.4.1)$$

である．(6.3.1) で $x\to 0$ とすると，$a_0=b_0$ を得る．したがって，(6.4.1) で $a_0=b_0$ として両辺を x で割れば，

$$a_1+\cdots+a_nx^{n-1}+o(x^{n-1})=b_1+\cdots+b_nx^{n-1}+o(x^{n-1})\quad(x\to 0)\quad(6.4.2)$$

を得る．(6.4.2) で $x\to 0$ とすれば，$a_1=b_1$ を得る．この操作を繰り返せば，$n+1$ 回目までで $a_k=b_k$ $(k=0,1,\cdots,n)$ を得る．(「繰り返しせば」に抵抗を感じる場合は，帰納法を用いればよい．簡単な修正で済む．)

注意：$f(x)$ は必ずしも微分可能とは限らない． □

レポート問題 6 (R2.8.3) 略解

問 1． $f(\boldsymbol{x})=f(x,y)$ を C^1 級関数とする．極座標 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{r})$: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r\neq 0)$ により，$g(\boldsymbol{r})$ を $g(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{r}))$ と定める．

(i) $\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{r}}$ を求めよ．(答えのみでよい．レポート問題 5 の問 2 を参照．)

(ii) 円周 C : $x^2+y^2=R^2$ 上の点 $\boldsymbol{x}_0={}^\top(x_0,y_0)={}^\top(R\cos\theta_0,R\sin\theta_0)$ における C の単位法線ベクトル方向の f の方向微分は $\pm\dfrac{\partial g}{\partial r}(\boldsymbol{r}_0)$ であり，単位接線ベクトル方向の f の方向微分は $\pm\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(\boldsymbol{r}_0)$ であることを示せ．ただし，$\boldsymbol{r}_0={}^\top(R,\theta_0)$ とする．

略解. (i)

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{r}}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}.$$

(レポート問題 5 の問 2 とは記号が異なるだけである．)

(ii) C 上の点 $\boldsymbol{x}_0$ における単位法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n}_\pm=\pm{}^\top\left(\frac{x_0}{R},\frac{y_0}{R}\right)=\pm{}^\top(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$$

であり，単位接線ベクトルは

$$\boldsymbol{t}_\pm=\pm{}^\top\left(-\frac{y_0}{R},\frac{x_0}{R}\right)=\pm{}^\top(-\sin\theta_0,\cos\theta_0)$$

である．

合成関数の微分法より，

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}}$$

であり，(i) より

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である．(実際，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{r})$ の逆関数を $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$ とおくと，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ であるから，両辺を $\boldsymbol{x}$ に関して微分すると，合成関数の微分法より，$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}} = I$ を得る．ただし，I は 2 次単位行列である．これより，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^{-1}$ を得る．)

以上により，f の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_\pm$ 方向の方向微分は，

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}_\pm}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{n}_\pm = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{n}_\pm = \pm\frac{\partial g}{\partial r}(\boldsymbol{r}_0)$$

であり，単位接線ベクトル方向 $\boldsymbol{t}_\pm$ の方向微分は

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{t}_\pm}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{t}_\pm = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r}_0)\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0)\,\boldsymbol{t}_\pm = \pm\frac{1}{R}\frac{\partial g}{\partial \theta}(\boldsymbol{r}_0)$$

である． □

参考書

[1] 杉浦 光夫，解析入門 I, II，東京大学出版会，1980, 1985.

[2] 笠原 晧司，微分積分学，サイエンス社，1974.

[3] 中尾 愼宏，微分積分学，近代科学社，1987.

[4] 杉浦 光夫，清水 英男，金子 晃，岡本 和夫，解析演習，東京大学出版会，1989.

[5] 小平 邦彦，解析入門 I，II，岩波書店，2003.

[6] 高木 貞二，解析概論 （改訂第 3 版），岩波書店，1983.

[7] Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, 6te unvernderte Aufl. Friedr. Vieweg & Sohn. Braunschweig, 1960; 英訳：Dedekind, Essays on the Theory of Numbers, translated by W. W. Beman, Dover Books on Mathematics, 1963; 和訳： 数について—連続性と数の本質 (岩波文庫 青 924)，デーデキント 著，河野伊三郎 翻訳，1961 ; 数とは何かそして何であるべきか（ちくま学芸文庫)，リヒャルト・デデキント 著，渕野 昌 翻訳，2013

[8] 藤田 宏，伊藤 清三，黒田 成俊，関数解析，岩波書店，1991.

[9] 黒田 成俊，関数解析，共立出版，1980.

[10] 増田 久弥，非線型数学，朝倉書店，1985.

[11] コルモゴロフ，フォミーン， 函数解析の基礎，上，下，著，山崎三郎 訳，柴岡泰光 訳，1979.

[12] 増田 久弥 編，応用解析ハンドブック，シュプリンガー・ジャパン，2010.

[13] S.-N. Chow, J. K. Hale, Methods of Bifurcation Theory, Springer, 1982.