

ランダム複素多項式力学系におけるランダム性誘起現象とリアプノフ指数の負値性 角 大輝 (大阪大学)

力学系理論は物事が時間とともにある法則にのっとなって変化していく様子を探る研究分野である。そのなかで、空間 X とその上の写像 $f: X \rightarrow X$ を用意して、 f の n 回合成 f^n について、写像族 $\{f^n\}$ の X への作用を調べる、というものがある。これを離散力学系という。(離散)力学系理論はありとあらゆる自然科学、社会科学において数理モデルとして顔を出す。ここで自然界や現実社会において多くのランダム項が存在するので、「ランダム力学系」を考えることが重要かつ自然と思われる。

その一方で、離散力学系の中で重要で、かつ研究対象としてポピュラーであるものの一つとして、実直線上の多項式力学系、すなわち、 $X = \mathbb{R}$, f は多項式関数、の場合がある。この場合は初期値の範囲を \mathbb{C} ひいてはリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に広げることが筋がよく、深い解析を可能にする。

以上のアイデアを統合して、「ランダム複素力学系」、すなわち、 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の有理写像の族を一つ与えて、その元を毎回ランダムに選択して点を動かしていくシステムを考えること、が重要かつ興味深い。

近年、通常の一つの写像の反復合成の力学系では決して現れない、ランダム力学系特有の現象が自然科学全体の多くの分野で数多く観察され注目されている。そのようなランダム力学系特有の現象を、ランダム性誘起現象 (randomness-induced phenomena) と呼ぶ。次はよく知られている。

定理 1 ([1]). $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を次数 2 以上の有理写像とする。このとき、
 $\dim_H(\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D(f^n)_z\| > 0\}) > 0$ となる。ただし \dim_H は球面距離に関するハウスドルフ次元、 f^n は f の n 回合成、 $\|\cdot\|$ は球面計量に関する微分のノルムを表す。特に、集合 $\{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D(f^n)_z\| > 0\}$ は非可算である。

上の定理は、 f による力学系が非可算コンパクト集合上でカオス的であることを示す。

しかし、ここでは次を示す。次は大概のランダム複素多項式力学系では上と全く異なることを意味する。

定理 2 (主定理, 概要). $\hat{\mathbb{C}}$ 上の大概の独立同分布ランダム複素多項式力学系 (系の各写像は次数 2 以上とする) においては、系に依存したある定数 $C < 0$ と、 $\hat{\mathbb{C}}$ のある部分集合 B で $\#\hat{\mathbb{C}} \setminus B \leq \aleph_0$ なるものが存在して、任意の $z \in B$ に対し、ほとんどすべての多項式列 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ に対して (ここで例外的多項式列の集合は z に依存する)、次の (1)(2) が成り立つ。

$$(1) \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D(\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1)_z\| \leq C < 0.$$

$$(2) (z, \gamma) \text{ に依存するある } \delta = \delta_{z, \gamma} > 0 \text{ が存在して } \text{diam}(\gamma_n \cdots \gamma_1(B(z, \delta))) \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{) となる。}$$

なお、上記の定理 1 から、定理 2 の主張は次数 2 以上の一つの有理写像の反復合成による通常の複素力学系では決して成り立たない。よって大概のランダム複素多項式力学系において、カオス性は一つの 2 次以上の有理写像による通常の複素力学系より著しく少なくなり、秩序性が増す。これはランダム性の効果によるものである。上記は一つの写像の反復合成による力学系には決して現れない、“ランダム性誘起現象”(ランダム力学系特有の現象)である。

参考文献

- [1] R. Mañé, *The Hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps*, Dynamical Systems (Valparaiso, 1986) (Lecture Notes in Math. 1331) (Berlin: Springer) 86-117, 1988.
- [2] H. Sumi, *Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps*, Proc. London Math. Soc. (2011) 102(1), pp 50-112.
- [3] H. Sumi, *Cooperation principle, stability and bifurcation in random complex dynamics*, Adv. Math., 245 (2013) pp 137-181.