

# 量子力学における時間作用素について

新井朝雄

北海道大学大学院理学研究院数学部門

複素ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の自己共役作用素  $H$  に対して,  $\mathcal{D}$  の部分空間  $\mathcal{D} \neq \{0\}$  と  $\mathcal{H}$  上の対称作用素  $T$  があって,  $\mathcal{D} \subset D(HT) \cap D(TH)$  (線形作用素  $A$  に対して,  $D(A)$  は  $A$  の定義域を表す) かつすべての  $\psi \in \mathcal{D}$  に対して

$$[H, T]\psi = i\psi$$

が成り立つとき,  $T$  を  $H$  の時間作用素 (time operator) と呼ぶ. ただし,  $[H, T] := HT - TH$ . 表現論的観点からは,  $(H, T)$  は自由度 1 の正準交換関係 (canonical commutation relation; CCR) の表現と呼ばれる. 量子力学への応用においては, 通常,  $H$  としてハミルトニアン (量子系の全エネルギーを表す作用素) がとられる (“時間作用素” という呼称は, この文脈と「古典力学においてエネルギー変数の正準共役変数は時間変数である」という構造ならびに古典-量子対応的観点に由来する).

時間作用素の強い概念も存在する.  $\mathcal{H}$  上の対称作用素  $T$  について  $e^{-itH}D(T) \subset D(T), \forall t \in \mathbb{R}$  かつ

$$Te^{-itH}\psi = e^{-itH}(T - t)\psi, \quad \forall \psi \in D(T)$$

が成立するとき,  $T$  を  $H$  の強時間作用素 (strong time operator) という.  $T$  が強時間作用素ならば,  $T$  の閉包  $\bar{T}$  も強時間作用素であり,  $D(\bar{T}H) \cap D(H\bar{T})$  は稠密で,  $\bar{T}$  は  $H$  の時間作用素である. だが, 強時間作用素は時間作用素とは限らない.

本講演では主に次の点についてお話をしたい:

- (i)  $H$  が下に有界でそのスペクトルが純離散的である場合の時間作用素の存在と性質. この場合の時間作用素は強時間作用素ではない.
- (ii) 強時間作用素の基本的性質と例および (ユニタリ同値を除いての)一意性の問題.