

DIRICHLET L 関数, HURWITZ ゼータ関数の巾乗平均値の漸近展開公式について

松本耕二

ゼータ関数, L 関数の理論において, その種々のタイプの平均値を考察することは古くから考えられてきた問題の一つである。

Dirichlet の L 関数 $L(s, \chi)$ (χ は mod q の Dirichlet 指標) の指標についての二乗平均値

$$\sum_{\chi \bmod q} |L(s, \chi)|^2$$

の q に関する漸近展開, また Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s, \alpha)$ の parameter についての二乗平均値

$$\sum_{a=1}^q |\zeta(s, a/q)|^2$$

の q に関する漸近展開を講演者が桂田昌紀氏との共同研究で得たのはもう 10 年以上も前のことであるが, その議論の中にある種の二重ゼータ関数が現れる。その後桂田氏は, それらの二重ゼータ関数の Mellin-Barnes 積分による表示を用いて, 漸近展開の証明を簡易化した。

そうすると, より一般の多重ゼータ関数を扱うことで, 二乗でないもっと高次の巾乗平均値を扱えるかもしれない, という発想が自然に生まれる。江上繁樹氏と講演者は, Hurwitz ゼータ関数の高次巾平均値はこの方法で実際に扱うことができ, 原理的にはいくらでも詳しい漸近展開式が得られることを示した。しかしそれ以外のタイプの高次巾平均値は, 多重ゼータ関数の解析的な理論がかなり整備されてきたにもかかわらず, 依然として手がついていない。この談話会ではそうしたこの問題の現状を概観する。