

双曲幾何と境界値逆問題

磯崎 洋 (筑波大学数理物質科学研究科)

\mathbf{R}^ν ($\nu = 2, 3$) 内の有界開集合 Ω の電気伝導度を $\gamma(x)$ とし, $u(x)$ を電位とすれば次のような方程式が成り立つ:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma(x) \nabla u(x)) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

n を境界 ($\partial\Omega$) 上の単位法線ベクトルとするとき作用素

$$\Lambda : f \rightarrow \gamma(x) \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega}$$

を Dirichlet-Neumann 写像という. f は物体の表面で与えられた電位であり, これによって生ずる物体の表面上での電流分布が Λf である. Λ という作用素を境界全体で与えれば $\gamma(x)$ が唯一つ定まり, さらに再構成することもできるということが分かっている. ただし再構成の方法は数値計算しやすいようなものではない.

次のような問題を考えよう. 既知の電気伝導度をもつ物体内の一部分が変化したものとする. 例えば異質なものが含まれている, あるいは病変が起こった等である. このとき $\gamma(x)$ は領域のある一部分で不連続的に変化しているであろう. 境界上に与えるデータ f の台は実質的にある一部分に限り (これは数値計算をする場合には境界のある一部分以外では 0 であるようなものを扱うと考えてよいということである), 境界の一部分での計測から不連続部分の位置を特定できるであろうか? この問題は医療や工学上, 重要な応用を持っている. 例えば乳癌の場合には腫瘍をもつ細胞の電気伝導度は周囲の正常な細胞の約 4 倍であることが分かっている. 胸部前面にのみ電極を置いて, 腫瘍部分の位置を特定できるであろうか?

この一見, 実用上の興味だけのような問題が実は双曲幾何学に関係があった. $\gamma_0(x), \Lambda_0$ を背景の (既知の) 電気伝導度, Dirichlet-Neumann 写像とすると, 問題は方程式 $\nabla \cdot (\gamma_0(x) \nabla u(x)) = 0$ の解を構成して $\Lambda - \Lambda_0$ を評価することに帰着されるのだが, このとき双曲幾何を用いて方程式を変形することが重要な役割を果たした. この講義では包含物の位置を特定するための数学的に厳密な定理と探査のためのアルゴリズム, 数値計算例, さらに関係した話題を紹介する.