

平成14年度東工大大学院試験問題

平成13年8月1日 実施

専門科目（午前） 数学：9:00–11:00

注意事項：以下の3題すべてに答えよ。

記号について： \mathbb{R} は実数全体、 \mathbb{C} は複素数全体をあらわす。

[1] A を n 次複素正方行列で $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^2)$ をみたすものとする。いま、 $f_A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ を A の表す線型写像とする。このとき、次を示せ。

- (1) \mathbb{C}^n は像 $\text{Im} f_A$ と核 $\text{Ker} f_A$ との直和である。
- (2) $m \geq 2$ に対して $\text{rank}(A^m) = \text{rank}(A)$ である。

[2] (1) $S = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}$ を求めよ。ただし、 α, β は正の定数である。

(2) $\gamma > 0$ とし、 $f(x, y) = |x^2 + y^2 + y|^\gamma$ とする。 f が \mathbb{R}^2 の原点 $(0, 0)$ で3回偏微分可能となるための必要十分条件を求めよ。

[3] 次の各命題について正しければ証明し、正しくなければ反例をあげよ。

位相空間 X と Y の直積 $X \times Y$ に積位相をいれる。このとき、

- (1) $X \times Y$ がハウスドルフ空間ならば X および Y もハウスドルフ空間になる。
- (2) X および Y がハウスドルフ空間ならば $X \times Y$ もハウスドルフ空間になる。

位相空間 X の部分集合 $A, B, A \cup B$ に部分位相をいれる。このとき、

- (3) $A \cup B$ がハウスドルフ空間ならば A および B もハウスドルフ空間になる。
- (4) A および B がハウスドルフ空間ならば $A \cup B$ もハウスドルフ空間になる。

位相空間 X から集合 Y への全射 $f: X \rightarrow Y$ によって、 Y に商位相をいれる。このとき

- (5) X がハウスドルフ空間ならば Y もハウスドルフ空間になる。
- (6) Y がハウスドルフ空間ならば X もハウスドルフ空間になる。

専門科目（午後）: 12:30–15:00

注意事項：以下の問題のうち3題を選択して解答せよ。ただし、口頭試問を

- (1) 代数班で受けることを希望する人は、問1～問4のうちから少なくとも1題、
- (2) 幾何班で受けることを希望する人は、問5～問7のうちから少なくとも1題、
- (3) 解析班で受けることを希望する人は、問8～問11のうちから少なくとも1題

を選択する3題の中に入れること。

記号について： $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ、整数、有理数、実数、複素数、それぞれの全体を表すものとする。

[1] m_1, \dots, m_n を自然数とする . 直積

$$\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z}$$

が巡回群となるための m_1, \dots, m_n に関する必要十分条件を求めよ .

[2] 素数 p に対して $\alpha^2 = -p$ となる複素数 α をとり

$$R = \{ m + n\alpha \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

とおく .

- (1) R は複素数体の部分環であることを示せ .
- (2) α は R の既約元かつ素元であることを示せ .
- (3) p を R において既約元の積に分解せよ .
- (4) R において既約元分解ができることを示せ .
- (5) R が一意分解整域 (UFD) になる p をすべて求めよ .

[3] 素数 p に対し , \mathbb{Q} の部分環

$$R_p = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ は } p \text{ で割れない} \right\}$$

を考える .

- (1) R_p のイデアルを重複なくすべて挙げよ .
- (2) R_p -加群 M の元の個数が有限ならば M は p 群であることを示せ .

[4] 素体 \mathbb{F}_p 上の特殊線型群 $SL(3, \mathbb{F}_p) = \{ g \in M_3(\mathbb{F}_p) \mid \det g = 1 \}$ を考える .

- (1) 位数 $|SL(3, \mathbb{F}_p)|$ を求めよ .
- (2) p シロー群をひとつ求めよ .

[5] 4次元単体 Δ^4 の k -skeleton (k 次元以下のすべての単体からなる部分複体) X_k の \mathbb{Z} 係数ホモロジー群 $H_*(X_k; \mathbb{Z})$ を求めよ . ここで $k = 0, 1, 2, 3, 4$ である .

[6] (1) M を境界のない多様体とする . M 上のコンパクトな台を持つベクトル場は完備であることを示せ .

(2) 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 上の完備でないベクトル場の例を作れ .

[7] M を3次元実射影空間とし、 $\tilde{f}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ を

$$\tilde{f} \left(\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} 4x \\ 3y \\ 2z \\ w \end{pmatrix}$$

で定義する .

- (1) \tilde{f} は同相写像 $f: M \rightarrow M$ を誘導することを示せ .
- (2) 次のような点 $p_\infty \in M$ を求めよ .

$$p_\infty \text{ を含むある開集合 } U \text{ のすべての点 } p \text{ に対して } \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) = p_\infty .$$

(ただし、 f^n は f を n 回合成して得られる写像である .)

- (3) この p_∞ に対して、上のような U のうち最大のものを求めよ .

[8] f を \mathbb{R}^n 上のコンパクトな台を持つ連続関数とする. F を

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \log |x - y| dy \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

で定義する.

- (1) F は \mathbb{R}^n 上の連続関数であることを示せ.
- (2) F が \mathbb{R}^n 上で有界になるための必要十分条件を求めよ.

[9] (1) f は $1 \leq |z| < \infty$ で正則かつ有界とする. $M = \max_{|z|=1} |f(z)|$ とすると, $1 \leq |z| < \infty$ で $|f(z)| \leq M$ となることを証明せよ.

(2) P を次数 k ($k \geq 1$) の多項式で, $|z| \leq 1$ において $|P(z)| \leq 1$ であると仮定する. このとき, $|z| \geq 1$ で

$$|P(z)| \leq |z|^k$$

を示せ.

[10] $f \in C^1([0, 2\pi])$ は $f(0) = f(2\pi)$ を満たすとする. このとき

$$c_n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} f(x) dx, \quad b_n = \int_0^{2\pi} \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} f'(x) dx, \quad f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

と定める. 以下を示せ.

$$(a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2 < \infty \text{ かつ } \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 < \infty.$$

$$(b) \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

$$(c) g_M(x) = \sum_{n=-M}^M c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \text{ と定義すると, } M \rightarrow \infty \text{ のとき } g_M(x) \text{ は } [0, 2\pi] \text{ 上 一様収束する.}$$

[11] $X = L^1([0, 2])$ を区間 $I = [0, 2]$ 上の実数値可積分関数からなる Banach 空間とし, $f \in X$ に対して

$$\|f\| = \int_0^2 |f(t)| dt$$

とおく. X から X への作用素 T を

$$Tf(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$$

で定義する. T の作用素ノルム $\|T\|_{X \rightarrow X}$ を

$$\|T\|_{X \rightarrow X} = \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \|Tf\|$$

と定義する.

- (1) $Tf(x)$ は I 上で 1 回微分可能であることを示せ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|_{X \rightarrow X}$ を求めよ.

外国語科目 : 15:20–16:20

Raoul Bott のインタビュー - 記事の和訳。文章自体はここでは割愛する。