平成１０年度東工大大学院試験問題

平成９年８月２５日　　実施（手書きで出題）

専門科目（午前）　数学（基礎）：9:00–11:30

注意事項：以下の問題のうち、問１～問３は３題とも、問４～問６の中からは１題を選択し、解答せよ。

記号について：$\mathbb{Z}$ は整数全体、$\mathbb{R}$ は実数全体をあらわす。

問１．実行列

$$H = \begin{pmatrix} -1 & -2 & z \\ x & 2 & 2 \\ 4 & y & -1 \end{pmatrix}$$

に対し $U^{-1}HU$ が対角行列となるような実直交行列 U が存在するとする。x, y, z はどんな実数か。また上のような行列 U を見つけよ。

問２．$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ となる数列 $\{a_n\}$ に関し、次の問に答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = A$ であることを示せ。

(2) $A \neq 0$ とする。数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{1}{n^\alpha}(a_1 + 2^2 a_2 + \cdots + n^2 a_n) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

と定めたとき、$\{b_n\}$ が収束するような最小の実数 α を求めよ。また、そのときの極限値を求めよ。

問３．A, B を互いに交わらない $\mathbb{R}^2$ の空でない閉集合、d を $\mathbb{R}^2$ の標準的距離とする。

(1) $x \notin A$ に対して $\inf\{d(x,a) \mid a \in A\} > 0$ を示せ。また、ある $a_0 \in A$ が存在して $d(x, a_0) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$ となることを示せ。

(2) $\mathbb{R}^2$ の開集合 U, V で

$$A \subset U, \quad B \subset V \quad \text{かつ} \quad U \cap V = \emptyset$$

を満たすものが存在することを証明せよ。

問４．素数 p に対し

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}$$

は

$$SL(2, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

のシロー部分群になっていることを示せ。

問５．$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上の関数 $f(x, y, z) = z^2$ を考える。

(1) f は S^2 上の C^∞ 級関数であることを示せ。

(2) $df = 0$ となる点を求めよ。

問6. $\mathbb{R}$ 上の関数 $F(t)$ を次式によって定義する：

$$F(t)=\int_0^\infty \frac{2+\sin(tx^2)}{1+x^4}dx.$$

(1) $F(0)$ を求めよ。

(2) $F(t)$ は微分可能であることを示せ。

専門科目（午後）　数学（専門）：13:00–15:30

注意事項：以下の問題のうち3題を選択し、解答せよ。ただし、

口頭試問を代数班で受けることを希望する人は問1～問3から少なくとも1題、

口頭試問を幾何班で受けることを希望する人は問4～問6から少なくとも1題、

口頭試問を解析班で受けることを希望する人は問7～問9から少なくとも1題を、

選択する3題の中に入れること。

記号について：$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ、整数全体、有理数全体、実数全体、複素数全体をあらわす。

問1. $\mathbb{C}[X,Y]$ を2変数の多項式環とし、$R=\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2-X^5)$ とおく。

(1) R は整域であることを示せ。

(2) X と Y で生成される R のイデアル $\mathfrak{m}$ は単項イデアルでないことを証明せよ。

問2. 任意の有限体 F に対し、多項式環 $\mathbb{Z}[T]$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ で $\mathbb{Z}[T]/\mathfrak{m}\cong F$ となるものが存在することを示せ。一方、$\mathbb{Z}[T]/\mathfrak{m}\cong\mathbb{Q}$ となるものは存在しないことを示せ。

問3. G を有限群とし、p を G の位数を割る最小の素数とする。このとき G の、指数 p の部分群は正規部分群であることを示せ。

問4. $S^3=\{x\in\mathbb{R}^4 \mid \|x\|=1\}$ の中の滑らかな閉曲面を M とする。S^3 の点 a (ただし、$\pm a\notin M$) を一つ固定して、M 上の関数 h, ω, f を

$$h(p)=\langle a,p\rangle,\quad \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ は } \mathbb{R}^4 \text{ の内積},\quad \omega(p)=[a \text{ と } p \text{ の球面距離}],\quad f(p)=\|a-p\|^2$$

で定義する。

(1) 3つの関数 h, ω, f の臨界点は一致することを示せ。

(2) 臨界点 $p\in M$ では、a は M の接平面に直交することを示せ。

問5. M をコンパクト n 次元微分可能多様体とする。$f:M\to M$ が微分同相写像で $f^k=1$ ($k\geq 2$ は整数) を満たすものとする。すべての $1\leq j\leq k-1$ と $x\in M$ に対し、$f^j(x)\neq x$ であるとする。M を同値関係

$$x\approx y \Longleftrightarrow y=f^j(x) \text{ となる } 0\leq j\leq k-1 \text{ が存在する}$$

で割った商空間を N, $p:M\to N$ を射影とする。

(1) N はコンパクト n 次元微分可能多様体の構造を持ち、p は微分可能写像となることを示せ。

(2) M 上の微分形式 ω に対し、$\omega=p^*\nu$ となるような N 上の微分形式 ν があるための必要十分条件は $\omega=f^*\omega$ が成り立つことであることを証明せよ。

問6．2次元トーラス T^2 から相異なる p, q を除いた空間の整係数ホモロジー群

$$H_n(T^2 - \{p,q\};\mathbb{Z})$$

を求めよ。

問7．$f(x,y)$ を平面 $\mathbb{R}^2$ 上で定義され、$f(0,0)=0$ かつ任意の $(x,y),(x,y')\in\mathbb{R}^2$ に対して条件

$$|f(x,y)-f(x,y')|\le k|y-y'| \quad (k \text{ は } 0<k<1 \text{ をみたす定数})$$

を満たす実数値連続関数とする。このとき、$\mathbb{R}$ 上の連続関数 $\varphi(x)$ で $\varphi(0)=0$ かつ方程式 $\varphi(x)=f(x,\varphi(x))$ を満たすものがただ一つ存在することを証明せよ。さらに、$f(x,y)$ が C^1 級ならば $\varphi(x)$ も C^1 級であることを証明せよ。

問8．$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ を Lebesgue 積分可能な関数とする。$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$g(t)=\int_0^\infty f(x)\cos(tx)dx$$

で定義すると g は $\mathbb{R}$ 上の有界一様連続関数となることを示せ。

問9．$D=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ とし、$A_b(D)$ は D 上の有界正則関数全体とする。さらに、$F:D\to D$ は

(a) $F(0)=0$,

(b) $F'(0)\neq 0$,

(c) $\sup_{z\in D}|F(z)|<1$

を満たす正則関数とする。

(1) $F\in A_b(D)$ に対し、$\|f\|=\sup_{z\in D}|F(z)|$ と定義すると $A_b(D)$ は $\|\cdot\|$ をノルムとする Banach 空間となることを示せ。

(2) $T:A_b(D)\to A_b(D)$ を $(Tf)(z)=f(F(z))(z\in D)$ と定義すれば T は単射であるが全射ではないことを示せ。

外国語科目：16:00–17:00

G.H. Hardy "Ramanujan" より選んだ文章の和訳。文章自体はここでは割愛する。