

注意事項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題5題すべてに解答せよ.
3. 解答は1題ごとに別々の答案用紙に記入せよ.
4. 各答案用紙ごとに必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で3ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを答案用紙の1ページ目の受験番号の下に書くこと.

記号について:

- \mathbb{N} は正の整数全体を表す.
- \mathbb{Z} は整数全体を表す.
- \mathbb{Q} は有理数全体を表す.
- \mathbb{R} は実数全体を表す.
- \mathbb{C} は複素数全体を表す.

- [1] 関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ 上で微分可能かつ $|f'(x)| \leq K$ を満たすものとする. このとき, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k) \right| \leq \frac{K(b-a)^2}{N}$$

が成り立つことを示せ. ただし, $x_k = a + \frac{k}{N}(b-a)$ とする.

- [2] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とし, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \alpha$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \alpha$ であることを示せ.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{n} = \beta$ ならば, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ が存在することを示し, その値を求めよ.

- [3] \mathbb{R}^2 の部分集合

$$X = \left\{ (0, 0), (0, 1) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

に対して, \mathbb{R}^2 の通常位相から定まる相対位相を与える.

- (1) X の $(0, 0)$ を含む連結成分を求めよ.
- (2) X の部分集合 A で, 以下の条件 (i) と (ii) をともに満たすものは存在するか.
 - (i) $(0, 0) \in A$ かつ $(0, 1) \notin A$.
 - (ii) A は X の開集合かつ閉集合.

[4] V を \mathbb{R} 上の有限次元ベクトル空間とし, $\text{End}(V)$ を V の線形変換全体のなす集合とする. 零写像でない $f \in \text{End}(V)$ に対して, 次の2つの条件 (a), (b) は同値であることを証明せよ.

(a) f は同型写像である.

(b) 任意の $g \in \text{End}(V)$ に対して, $\text{rank}(f \circ g) = \text{rank}(g \circ f)$ が成り立つ.

[5] d を 2 以上の整数とし, 次数が d より小さい複素数係数多項式の全体のなす \mathbb{C} 上の d 次元ベクトル空間 V_d を考える.

$$V_d = \{ f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid \deg f(x) < d \}$$

また, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ に対して, V_d の線形変換 $\varphi_{a,b}: V_d \rightarrow V_d$ を

$$\varphi_{a,b}: f(x) \mapsto f(ax + b)$$

で定義する.

- (1) $d = 4$, $a = -1$ のとき, $\varphi_{a,b}$ の固有値を求め, 各固有値に関する固有空間の基底を求めよ.
- (2) 一般の d, a および b に対し, $\varphi_{a,b}$ の固有値をすべて求めよ.
- (3) $\varphi_{a,b}$ が V_d の適当な基底により対角行列で表現できるための必要十分条件を, a と b を用いて表せ.

筆答専門試験科目（午後）

2020 大修

数学系

時間 13:00~15:00

注意事項

1. 試験開始時刻まではこの問題冊子を開いてはならない.
2. 以下の問題のうち2題を選択して解答せよ.
3. 解答は1題ごとに別々の答案用紙に記入せよ.
4. 各答案用紙ごとに必ず問題番号および受験番号を記入せよ.
5. この問題冊子はこの表紙を入れて全体で4ページからなる.
6. 口頭試問を代数分野, 幾何分野, 解析分野のどれで受けることを希望するかを答案用紙の1ページ目の受験番号の下に書くこと. (午前と同じ分野を書くこと.)

記号について:

- \mathbb{N} は正の整数全体を表す.
- \mathbb{Z} は整数全体を表す.
- \mathbb{Q} は有理数全体を表す.
- \mathbb{R} は実数全体を表す.
- \mathbb{C} は複素数全体を表す.

[1] $f: A \rightarrow B$ を可換環の準同型, I を A のイデアルとする. IB で $f(I)$ で生成された B のイデアルを表し, $p: A \rightarrow A/I$ と $q: B \rightarrow B/IB$ は標準的全射準同型とする.

- (1) $\bar{f} \circ p = q \circ f$ を満たす環準同型 $\bar{f}: A/I \rightarrow B/IB$ が一意的存在することを示せ.
- (2) $h \circ f = p$ かつ $q = \bar{f} \circ h$ を満たす環準同型 $h: B \rightarrow A/I$ が存在するとき, 任意の $y \in B$ は, ある $z \in A$ と $w \in \text{Ker}(h)$ によって $y = f(z) + w$ と書けることを示せ.
- (3) (2) のとき, \bar{f} は同型であることを示せ.

[2] K は標数 $p > 0$ の代数閉体とする. 整数 $r \geq 1$ および K -係数の p^r 次多項式

$$f = c_0X + c_1X^p + \cdots + c_rX^{p^r} = \sum_{j=0}^r c_jX^{p^j}$$

を固定する. ただし $c_0 \neq 0, c_r \neq 0$ と仮定する. f が定める写像

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & K \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

も同じ記号 f により表す. 写像 $f: K \rightarrow K$ を k 回合成したものを f^k と表す.

$A = \mathbb{F}_p[T]$ を p 元体 \mathbb{F}_p 上の 1 変数多項式環とする. A の K への作用を, $a = \sum_{k=0}^n a_k T^k \in A$ および $x \in K$ に対し

$$ax = \sum_{k=0}^n a_k f^k(x)$$

により定める. これにより K は A -加群となる. また, 各 $a \in A$ に対し $V_a = \{x \in K \mid ax = 0\}$ とおく.

- (1) $a \neq 0$ ならば V_a は有限生成 A -加群であることを示せ.
- (2) $a = T$ のとき, V_a の A -加群としての構造を

$$A^{\oplus m} \oplus A/a_1A \oplus \cdots \oplus A/a_lA$$

(m, l は 0 以上の整数, $a_1, \dots, a_l \in A$) の形で求めよ.

- (3) K は A -加群として有限生成ではないことを示せ.

[3] c を実定数とする. 4次元実ユークリッド空間 \mathbb{R}^4 の部分集合 M_c を次のように定める.

$$M_c = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 = c\}$$

- (1) $c \neq 0$ のとき, M_c は \mathbb{R}^4 の部分多様体であることを示せ.
- (2) $c \neq 0$ のとき, M_c は $\mathbb{R}^2 \times S^1$ と微分同相であることを示せ. ここで, S^1 は円周を表す.

[4] $\omega \in \mathbb{C}$ を 1 の原始立方根とし, $a, b \in \mathbb{C}$ に対し

$$[a, b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$$

とおく. \mathbb{C} の部分集合

$$P = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \cup [0, 1] \cup [0, \omega] \cup [0, \omega^2]$$

に対し, $P \times [0, 1]$ の,

$$(z, 0) \sim (\omega z, 1) \quad (z \in P)$$

で生成される同値関係による商空間

$$X = P \times [0, 1] / \sim$$

を考える. X の整数係数ホモロジー群 $H_*(X)$ を求めよ.

[5] D を \mathbb{C} 内の原点 0 を含む単連結領域とし, 正則関数 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ は $f(0) = 0$ かつ $z \neq 0$ のとき $f(z) \neq z$ を満たすものとする. また, $\lambda = f'(0)$ とおき, 0 を中心とする D 内の円周 C を 1 つとり,

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z - f(z)} dz$$

とおく. ただし, 積分路は円周 C 上を反時計回りに 1 周するものとする.

(1) $\lambda \neq 1$ のとき, I の値を求めよ.

(2) $\lambda = 1$ かつ $I = 2019$ となるような $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ の例を 1 つ求めよ.

[6] 実数 $1 \leq p < \infty$ に対して, 数列空間

$$l^p = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

は $\|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{l^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}$ をノルムとしてバナッハ空間になる. また, 実数 $\alpha \geq 0$ に対して,

$$T_{\alpha}(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{n^{-\alpha} a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

と定める.

(1) 任意の $p > 1$ に対して, $l^1 \subset l^p$ であることを示せ.

(2) $\alpha > \frac{1}{2}$ ならば, T_{α} は l^2 から l^1 への有界線形作用素となることを示せ.

(3) $T_{1/2}$ が l^2 から l^1 への有界線形作用素となるかどうかを判定し, それを証明せよ.

(4) $\alpha > \frac{1}{2}$ ならば, l^2 の任意の有界集合の T_{α} による像が, l^1 の相対コンパクト集合となることを示せ.

[7] \mathbb{R} 上で定義された実数値ルベグ可積分関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、ほとんどすべての点である関数 f に収束しているものとする。このとき、以下の各命題について、正しければ証明し、正しくなければ反例を挙げよ。

(1) ϕ はある有界区間の外では値 0 をとる連続関数とする。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f(x) dx$$

が成り立つ。

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m\left(\{x \in [-\epsilon^{-1}, \epsilon^{-1}] \mid |f(x) - f_n(x)| > \epsilon\}\right) = 0$$

が成り立つ。ここで、 m はルベグ測度である。

(3) Φ は \mathbb{R} 上で定義された非負値連続関数で、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \Phi(f_n(x)) dx = 0$$

とする。このとき、 $\Phi(f(x)) = 0$ がほとんどすべての x に対して成り立つ。

(4) Ψ は \mathbb{R}^2 上で定義された連続関数で、あるコンパクト集合の外では値 0 をとるとする。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \Psi(x, f_n(x)) dx = \int_{\mathbb{R}} \Psi(x, f(x)) dx$$

が成り立つ。

[8] 実数値関数 $u(t)$ は $t \geq 0$ で連続であるとする。

(1) $u(t)$ がすべての $t \geq 0$ に対して

$$u(t) \leq \int_0^t u(s) ds + c \quad (c \text{ は定数})$$

を満たせば、 $t \geq 0$ に対して $u(t) \leq ce^t$ が成り立つことを示せ。

(2) $u(t)$ がすべての $t \geq 0$ に対して

$$u(t) \leq \int_0^t (s+1)^{-1} u(s) ds + (t+1)^2$$

を満たせば、 $t \geq 0$ に対して

$$u(t) \leq 2t^2 + 3t + 1$$

が成り立つことを示せ。

(3) 「すべての $t \geq 0$ に対して

$$u(t) \geq \int_0^t u(s)^2 ds + 1$$

を満たすような $u(t)$ は存在しないことを示せ。