

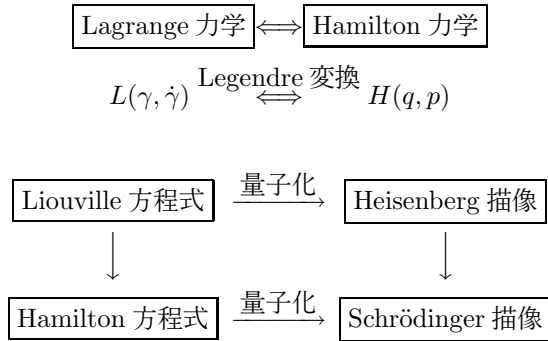
Spin とは何か？
—Zitterbewegung の解釈を巡って

作用素論セミナー 2005年9月3日 於 富山

井上 淳
ATLUM

1 Fermion の量子化

1.1 Boson の量子化



古典力学

Hamilton 方程式

$$\begin{cases} \dot{q} = H_p(q, p), \\ \dot{p} = -H_q(q, p), \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \mathbb{J} \begin{pmatrix} H_q \\ H_p \end{pmatrix}$$

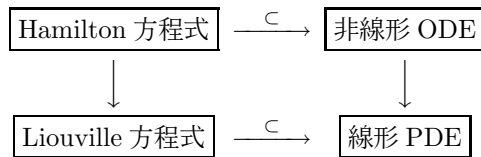
但し、

$$\begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{q} \\ \underline{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Liouville 方程式

$$\dot{\phi} = \{\phi, H\} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \phi}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial \phi}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \quad \text{ここで} \quad \phi(0, q, p) = \underline{\phi}(q, p).$$

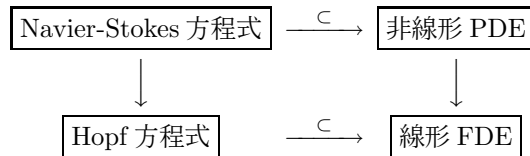
注意 1:



注意 2: 並木美喜雄が「光または電子のような物質粒子を用いた干渉の実験で、その入射波の強度を少しでも弱くしていったら、干渉図形は消えて粒子が一つ一つ観測されるような写真が実験でとれないだろうか」と市ノ川竹男に依頼し、市ノ川は 1978.1 岩波講座現代物理学の基礎 (第 2 版) 月報で写真を示した。そして、粒子性と波動性の確実な把握のための実験であるとした。

こうなると統計力学と量子力学の違いは何か、**方程式で時間を虚数にすることとの関係、Fokker-Planck 方程式なるものをこの図式でどういう位置に置いたらよいのかとか、分らないことだらけになる。

上の対応は



と一般化できる。しかし、「量子化」に相当する部分は汎関数微分方程式 (FDE=Functional Derivative Equations) になるだろう以上には見当がつかない。McKean や Bourgain 等が非線形偏微分方程式の不変測度を探すと言う試みをしているが、量子化との関係や、対応する Fokker-Planck 方程式はどうなるのか、私は知らない。

量子力学

(S) 状態関数 $u(t)$ の時間的変動を規制する方法:

Schrödinger 描像

$$i\hbar \frac{\partial u(t)}{\partial t} = \hat{H}u(t) \quad \text{ここで} \quad u(0) = \underline{u}, \quad \text{i.e.} \quad u(t) = e^{-i\hbar^{-1}t\hat{H}} \underline{u}.$$

(H) 力学量演算子 $\hat{F}(t)$ の時間的変動を規制する方法 :

$$\boxed{\text{Heisenberg 描像}} \quad i\hbar \frac{d}{dt} \hat{F}(t) = [\hat{F}(t), \hat{H}] \quad \text{ここで} \quad \hat{F}(0) = \hat{F}.$$

(F) Bohr の対応原理を明確にする経路積分表示 :

$$\boxed{\text{Feynman 描像}} \quad E(t, 0, q, \underline{q}) = \int_{C_{t,q,\underline{q}}} \exp(i\hbar^{-1} \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds) d_F \gamma(\cdot),$$

$$C_{t,q,\underline{q}} = \{\gamma \in C([0, t] : \mathbb{R}^d) \mid \gamma(0) = \underline{q}, \gamma(t) = q\}, \quad E(t, 0, q, \underline{q}) \sim D(t, 0, q, \underline{q})^{1/2} e^{i\hbar^{-1} S(t, 0, q, \underline{q})}.$$

1.2 Fermion の量子化

問題: 電子の運動を表示している Dirac 方程式、或いは、Zitterbewegung とよばれる「現象」には古典的対応物があるのか？以下は Feynman (p.355 of Feynman & Hibbs [4]) からの引用 :

... path integrals suffer grievously from a serious defect. They do not permit a discussion of spin operators or other such operators in a simple and lucid way. They find their greatest use in systems for which coordinates and their conjugate momenta are adequate. Nevertheless, spin is a simple and vital part of real quantum-mechanical systems. It is a serious limitation that the half-integral spin of the electron does not find a simple and ready representation. It can be handled if the amplitudes and quantities are considered as quaternions instead of ordinary complex numbers, but the lack of commutativity of such numbers is a serious complication.

2 問題の設定

自由 Dirac 方程式の初期値問題は、与えられた初期値 $\underline{\psi}(q)$ に対して以下を満たす $\psi(t, q) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$ を求めることである :

$$(1) \quad \begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, q) = \mathbb{H} \psi(t, q) \\ \psi(0, q) = \underline{\psi}(q) \end{cases}$$

ここで

$$\mathbb{H} = -i\hbar c \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial}{\partial q_k} + mc^2 \beta,$$

\hbar, c, m は物理定数, $\psi(t, q) = {}^t(\psi_1(t, q), \psi_2(t, q), \psi_3(t, q), \psi_4(t, q))$, また $\{\alpha_k, \beta\}$ は Clifford 関係式

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} \mathbb{I}_4, \quad \alpha_k \beta + \beta \alpha_k = 0, \quad \beta^2 = \mathbb{I}_4$$

を満たすものである。以下では $\{\alpha_k, \beta\}$ の Dirac 行列表現を用いる :

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

問題: 非相対論的量子力学における速度作用素の時間変化は、 $\hat{q}_j^H(t) = e^{i\hbar^{-1}t\mathbf{H}} \hat{q}_j e^{-i\hbar^{-1}t\mathbf{H}}$, $\mathbf{H} = \frac{|\hat{p}|^2}{2m} + V(q)$, $|\hat{p}|^2 = \sum_{j=1}^3 \hat{p}_j^2 = -\hbar^2 \Delta_q$ として、

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{q}_j^H(t) = [\hat{q}_j^H(t), \mathbf{H}]_- = \frac{\hat{p}_j}{m} = \hat{v}_j,$$

即ち、 $m\hat{v}_j = \hat{p}_j$ という比例関係がある。

Dirac 方程式の場合は以下に示されるように

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{q}_j^H(t) = [\hat{q}_j^H(t), \mathbb{H}]_- = c\boldsymbol{\alpha}_j$$

で、速度と運動量とは無関係になってしまう。更に、 $\boldsymbol{\alpha}_j$ の固有値は ± 1 だから、「電子」は光速で走っていることになってしまうが、観測されるものは光速以下である。ところで $[\boldsymbol{\alpha}_j, \mathbb{H}]_- \neq 0$ だから $\hat{q}_j^H(t)$ は運動の恒量ではなく、観測しているものは

$$\langle \boldsymbol{\alpha}_j \rangle = \int \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha}_j \psi dx / \int \psi^\dagger \psi dx$$

で、「電子」の瞬間速度は光速に達したとしても、電子は絶えず行きつ戻りつし平均すれば光速以下で進む。(西島和彦「相対論的量子力学」p32)

また、波動即粒子、粒子即波動という西田哲学めいた命題が量子論では何の矛盾もなく成立するというのだが？(朝永振一郎「スピンはめぐる」では第2量子化を用いて説明している、p164からの断章取義的引用。事の序での経路積分的説明との関連は？)

Pauli が言ったとされている 古典的に記述不可能な2価性とは？その解決策は？

補題 1 $\hat{p}_k = -i\hbar\partial_{q_k}$ として

$$[\boldsymbol{\alpha}_j, \mathbb{H}]_{\pm} = c[\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\alpha}_k]_{\pm} \hat{p}_k + mc^2[\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}]_{\pm} = \begin{cases} -2ci\hbar\delta_{jk}\partial_{q_k} & \text{但し } +, \\ -2ci\hbar(1 - \delta_{jk})\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\alpha}_k\partial_{q_k} + 2mc^2\boldsymbol{\alpha}_j\boldsymbol{\beta} & \text{但し } -, \end{cases}$$

$$[\boldsymbol{\beta}, \mathbb{H}]_{\pm} = \begin{cases} 2mc^2 & \text{但し } +, \\ -2ci\hbar\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}_k\partial_{q_k} & \text{但し } -. \end{cases} \quad [\hat{q}_j, \mathbb{H}]_- = i\hbar c\boldsymbol{\alpha}_j, \quad [\hat{p}_k, \mathbb{H}]_- = 0.$$

これより、

$$\hat{q}_j^H(t) = e^{i\hbar^{-1}t\mathbb{H}} \hat{q}_j e^{-i\hbar^{-1}t\mathbb{H}}, \quad \hat{p}_k^H(t) = e^{i\hbar^{-1}t\mathbb{H}} \hat{p}_k e^{-i\hbar^{-1}t\mathbb{H}}$$

と定義して、Dirac 方程式に対応する Heisenberg 描像の一部を得る：

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{q}_j^H(t) = [\hat{q}_j^H(t), \mathbb{H}]_-, \quad i\hbar \frac{d}{dt} \hat{p}_k^H(t) = [\hat{p}_k^H(t), \mathbb{H}]_-.$$

3 Zitterbewegung の物理的解釈

3.1 速度作用素

さて

$$\boldsymbol{\alpha}_j^H(t) = e^{i\hbar^{-1}t\mathbb{H}} \boldsymbol{\alpha}_j e^{-i\hbar^{-1}t\mathbb{H}}, \quad \hat{p}_j^H(t) = e^{i\hbar^{-1}t\mathbb{H}} \hat{p}_j e^{-i\hbar^{-1}t\mathbb{H}} \quad \text{etc,}$$

$$\mathbb{H}^2 = |\mathbb{H}|^2 \mathbb{I}_4 = (-c^2\hbar^2\Delta_q + c^4m^2)\mathbb{I}_4 \quad \text{より} \quad \mathbb{H}^{-1} = \frac{\mathbb{H}}{|\mathbb{H}|^2}$$

とおき、前の補題1を用いると

$$i\hbar \frac{d}{dt} \boldsymbol{\alpha}_j^H(t) = 2\mathbb{H}(\boldsymbol{\alpha}_j^H(t) - \mathbb{H}^{-1}\hat{p}_j^H(t)) \quad \text{但し } j = 1, 2, 3,$$

となる。そこで

$$\hat{\eta}_j^H(t) = \boldsymbol{\alpha}_j^H(t) - c\mathbb{H}^{-1}\hat{p}_j \quad \text{但し } j = 1, 2, 3,$$

と定義すると

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\eta}_j^H(t) = 2\mathbb{H}\hat{\eta}_j^H(t) = [\mathbb{H}, \hat{\eta}_j^H(t)]_-.$$

補題 1 より

$$[\hat{\eta}_j^H(t), \mathbb{H}]_+ = 0 = [\hat{\eta}_j, \mathbb{H}]_+,$$

となるから、

$$\hat{\eta}_j^H(t) = e^{-2i\hbar^{-1}t\mathbb{H}}\hat{\eta}_j = e^{i\hbar^{-1}t\mathbb{H}}\hat{\eta}_je^{-i\hbar^{-1}t\mathbb{H}},$$

となり、“ $\hat{\eta}_j^H(t)$ ” という表現は妥当である。

さて \hat{q}_j を掛け算作用 $q_j \times$ として、

$$\hat{q}_j^H(t) = e^{i\hbar^{-1}t\mathbb{H}}\hat{q}_je^{-i\hbar^{-1}t\mathbb{H}}$$

とし

$$\hat{q}_{C,j}(t) = \hat{q}_j + c^2t\mathbb{H}^{-1}\hat{p}_j, \quad \hat{q}_{Z,j}(t) = \frac{1}{2}i\hbar c\hat{\eta}_j\mathbb{H}^{-1}e^{-2i\hbar^{-1}t\mathbb{H}} = \frac{1}{2}i\hbar c\hat{\eta}_j^H(t)\mathbb{H}^{-1}$$

とおくと、

補題 2 以下のように分解される：

$$\hat{q}_j^H(t) = \hat{q}_{C,j}(t) + \hat{q}_{Z,j}(t)$$

略証：

$$\frac{d}{dt}\hat{q}_j^H(t) = c\alpha_j^H(t) = c^2\mathbb{H}^{-1}\hat{p}_j + c\hat{\eta}_je^{-2i\hbar^{-1}t\mathbb{H}}.$$

を 0 から t まで積分せよ。 □

注意： $\hat{q}_C(t)$ は相対的質量の位置作用素で、 $\hat{q}_Z(t)$ はマクロスコピックな高振動数の Zitterbewegung を表す。また、 $c^2\mathbb{H}^{-1}\hat{p}_j$ は古典的速度作用素、 $\hat{q}_{Z,j} = c\hat{\eta}_je^{-2i\hbar^{-1}t\mathbb{H}}$ は速度作用素の Zitterbewegung である。

4 Zitterbewegung—ATLOM の解釈

微分作用素 \mathbb{H} を Fourier 変換して

$$\mathbb{H}(p) = c\alpha_j p_j + mc^2\beta = c \begin{pmatrix} mc & 0 & p_3 & p_1 - ip_2 \\ 0 & mc & p_1 + ip_2 & -p_3 \\ p_3 & p_1 - ip_2 & -mc & 0 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 & 0 & -mc \end{pmatrix}$$

が得られる。ここで $\mathbb{H}^2(p) = c^2|p|_{mc}^2\mathbb{I}_4$, $|p|_{mc} = \sqrt{m^2c^2 + |p|^2}$ を用いて

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(t, p) = \mathbb{H}(p)\hat{\psi}(t, p)$$

の解は、

$$e^{-i\hbar^{-1}t\mathbb{H}(p)} = \cos(ch^{-1}t|p|_{mc})\mathbb{I}_4 - \frac{i}{c|p|_{mc}}\sin(ch^{-1}t|p|_{mc})\mathbb{H}(p).$$

但し、これでは、「古典力学」が見えてこないし Bohr の対応原理があるのかも分からない。

主定理 1 (Dirac 方程式の解の経路積分的表現)

$$\psi(t, q) = b \left((2\pi)^{-3/2} e^{\pi i/4} \iint_{\mathfrak{R}^{3|3}} d\underline{\xi} d\underline{\pi} \mathcal{D}^{1/2}(t, \bar{x}, \bar{\theta}, \underline{\xi}, \underline{\pi}) e^{i\hbar^{-1}S(t, \bar{x}, \bar{\theta}, \underline{\xi}, \underline{\pi})} \mathcal{F}(\sharp\psi)(\underline{\xi}, \underline{\pi}) \right) \Big|_{\bar{x}_B=q}.$$

ここで、 $S(t, \bar{x}, \bar{\theta}, \underline{\xi}, \underline{\pi})$ と $\mathcal{D}(t, \bar{x}, \bar{\theta}, \underline{\xi}, \underline{\pi})$ はそれぞれ、Hamilton-Jacobi 方程式と連続の方程式の解、 \mathcal{F} はスーパー空間 $\mathfrak{R}^{3|3}$ 上の関数に対する Fourier 変換である。

4.1 証明の概要

(1) “spinor” $\psi(t, q) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^4$ をスーパー偶関数 $u(t, x, \theta) : \mathbb{R} \times \mathfrak{R}^{3|3} \rightarrow \mathfrak{C}_{\text{ev}}$ と同一視する.

$$\mathbb{C}^4 \ni \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \stackrel{\#}{\longleftarrow} \underset{b}{u}(\theta) = u_0 + u_1\theta_1\theta_2 + u_2\theta_2\theta_3 + u_3\theta_3\theta_1$$

ここで、 $\mathfrak{R}^{3|3}$ はスーパー空間、 $u_{j-1}(t, x)$ は $\psi_j(t, q)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) の Grassmann 接続である。

(2) スピンをスーパー空間上のスーパー偶関数とし、Dirac 行列はスーパー関数に働く微分作用素と見なす変換で、偏微分方程式系 $\mathcal{H}(-i\hbar\partial_x, \theta, \partial_\theta)$ は

$$\mathcal{H}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) = c\left(\theta_3 + \frac{\partial}{\partial\theta_3}\right) \left[\left(\theta_1 - \frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + i\left(\theta_1 + \frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_2} - \left(\theta_2 - \frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_3} \right] + mc^2\left(\theta_3 + \frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\left(\theta_3 - \frac{\partial}{\partial\theta_3}\right),$$

となり、スーパー空間上の Dirac 方程式は

$$(2) \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}u(t, x, \theta) = \mathcal{H}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)u(t, x, \theta)$$

と表示される。更に、 $\mathcal{H}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)$ の完全 Weyl 象表は

$$\mathcal{H}(\xi, \theta, \pi) = c(\theta_3 + ik^{-1}\pi_3)[(\xi_1 + i\xi_2)\theta_1 - ik^{-1}(\xi_1 - i\xi_2)\pi_1 - \xi_3(\theta_2 - ik^{-1}\pi_2)] - 2imc^2k^{-1}\theta_3\pi_3.$$

ここで、 $k \neq 0$ は奇変数に関する Fourier 変換に際し勝手に導入した定数である。これが、 $\mathcal{T}^*\mathfrak{R}^{3|3} = \mathfrak{R}^{6|6}$ 上のスーパー Hamiltonian 関数である。

(3) そこで $\mathcal{H}(\xi, \theta, \pi)$ に対応する古典力学の流れ (Hamilton Flow) を考察する：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_j = \frac{\partial\mathcal{H}(t, x, \xi, \theta, \pi)}{\partial\xi_j}, & \frac{d}{dt}\xi_k = -\frac{\partial\mathcal{H}(\xi, \theta, \pi)}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{d}{dt}\theta_l = -\frac{\partial\mathcal{H}(\xi, \theta, \pi)}{\partial\pi_l}, & \frac{d}{dt}\pi_m = -\frac{\partial\mathcal{H}(\xi, \theta, \pi)}{\partial\theta_m}. \end{cases}$$

即ち、supersymplectic 行列 \mathcal{J} を

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_3 & 0 & 0 \\ -\mathbb{I}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbb{I}_3 \\ 0 & 0 & -\mathbb{I}_3 & 0 \end{pmatrix} : \mathfrak{R}^{6|6} \rightarrow \mathfrak{R}^{6|6}.$$

として

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \xi \\ \theta \\ \pi \end{pmatrix} = \mathcal{J} \begin{pmatrix} \partial_x \mathcal{H}(\xi, \theta, \pi) \\ \partial_\xi \mathcal{H}(\xi, \theta, \pi) \\ \partial_\theta \mathcal{H}(\xi, \theta, \pi) \\ \partial_\pi \mathcal{H}(\xi, \theta, \pi) \end{pmatrix} \quad \text{ここで} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ \xi(0) \\ \theta(0) \\ \pi(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{\xi} \\ \underline{\theta} \\ \underline{\pi} \end{pmatrix}.$$

この古典力学の方程式を解いて、

$$\mathcal{S}_0(t, \underline{x}, \underline{\xi}, \underline{\theta}, \underline{\pi}) = \int_0^t \{ \langle \dot{x}(s) | \xi(s) \rangle + \langle \dot{\theta}(s) | \pi(s) \rangle - \mathcal{H}(\xi(s), \theta(s), \pi(s)) \} ds.$$

とし、以下のように定義する：

$$\mathcal{S}(t, \bar{x}, \underline{\xi}, \bar{\theta}, \underline{\pi}) = \langle \underline{x} | \underline{\xi} \rangle + \hbar k^{-1} \langle \underline{\theta} | \underline{\pi} \rangle + \mathcal{S}_0(t, \underline{x}, \underline{\xi}, \underline{\theta}, \underline{\pi}) \Big|_{\substack{\underline{x}=y(t, \bar{x}, \underline{\xi}, \bar{\theta}, \underline{\pi}) \\ \underline{\theta}=\omega(t, \bar{x}, \underline{\xi}, \bar{\theta}, \underline{\pi})}}.$$

命題 3 自由 *Dirac* 方程式に対して、 $\mathcal{S}(t, \bar{x}, \underline{\xi}, \bar{\theta}, \underline{\pi})$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(t, \bar{x}, \underline{\xi}, \bar{\theta}, \underline{\pi}) = & \langle \bar{x} | \underline{\xi} \rangle + \hbar k^{-1} \langle \bar{\theta} | \underline{\pi} \rangle + \bar{\mathcal{B}}(t) [2i\hbar k^{-1} m c \bar{\theta}_3 \underline{\pi}_3 + (\hbar k^{-1} - 1)(i\bar{\theta}_3 \underline{\Pi} + k^{-1} \underline{\Pi} \underline{\pi}_3) \\ & + k(\bar{\Theta} - ik^{-1} \underline{\Pi})(\bar{\theta}_3 + i\hbar k^{-2} \underline{\pi}_3)] \end{aligned}$$

と具体的に計算される。ここで

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{B}}(t) &= \bar{\mathcal{A}}(t) \bar{\delta}^{-1}(t), \quad \bar{\mathcal{A}}(t) = a(t) - 2imcb(t), \quad \bar{\delta}(t) = 1 - 2b(t)|\underline{\xi}|^2 - 2imc\bar{\mathcal{A}}(t), \\ a(t) &= \frac{\sin 2\nu t}{2|\underline{\xi}|_{mc}}, \quad b(t) = \frac{1 - \cos 2\nu t}{4|\underline{\xi}|_{mc}^2}, \quad \nu = ck^{-1}|\underline{\xi}|_{mc}, \quad |\underline{\xi}|_{mc}^2 = |\underline{\xi}|^2 + m^2 c^2 \quad \text{かつ} \\ \bar{\Theta} &= (\underline{\xi}_1 + i\underline{\xi}_2)\bar{\theta}_1 - \underline{\xi}_3\bar{\theta}_2, \quad \underline{\Pi} = (\underline{\xi}_1 - i\underline{\xi}_2)\underline{\pi}_1 - \underline{\xi}_3\underline{\pi}_2. \end{aligned}$$

この関数は、 $\hbar = k$ ならば *Hamilton-Jacobi* 方程式を満たす：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{S}(t, \bar{x}, \underline{\xi}, \bar{\theta}, \underline{\pi}) + \mathcal{H}\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \bar{x}}, \bar{\theta}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \underline{\pi}}\right) = 0, \\ \mathcal{S}(0, \bar{x}, \underline{\xi}, \bar{\theta}, \underline{\pi}) = \langle \bar{x} | \underline{\xi} \rangle + \langle \bar{\theta} | \underline{\pi} \rangle. \end{cases}$$

次に

$$\mathcal{D}(t, \bar{x}, \underline{\xi}, \bar{\theta}, \underline{\pi}) = (-1)^3 \text{sdet} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \bar{x} \partial \underline{\xi}} & \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \bar{x} \partial \underline{\pi}} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \bar{\theta} \partial \underline{\xi}} & \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial \bar{\theta} \partial \underline{\pi}} \end{pmatrix},$$

とおくと

命題 4

$$\mathcal{D}(t, \bar{x}, \underline{\xi}, \bar{\theta}, \underline{\pi}) = (\hbar k^{-1})^{-3} \bar{\delta}(t).$$

であり、これは $\hbar = k$ のとき、以下の連続方程式を満たす：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{\xi}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} \left(\mathcal{D} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{\pi}} \right) = 0, \\ \mathcal{D}(0, \bar{x}, \underline{\xi}, \bar{\theta}, \underline{\pi}) = 1. \end{cases}$$

上の表示で \mathcal{D} の独立変数は $(t, \bar{x}, \underline{\xi}, \bar{\theta}, \underline{\pi})$ 、一方 \mathcal{H}_ξ と \mathcal{H}_π の独立変数は $(\mathcal{S}_{\bar{x}}, \bar{\theta}, \mathcal{S}_{\bar{\theta}})$ である。

(4) (以降、量子化するときは独立変数の並べ方を $(\bar{x}, \underline{\xi}, \bar{\theta}, \underline{\pi})$ から $(\bar{x}, \bar{\theta}, \underline{\xi}, \underline{\pi})$ に変える) $\nu_3 = e^{3\pi i/4}$ として

$$(\mathcal{U}(t)u)(\bar{x}, \bar{\theta}) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \nu_3 k^{3/2} \iint d\underline{\xi} d\underline{\pi} \mathcal{D}^{1/2}(t, \bar{x}, \bar{\theta}, \underline{\xi}, \underline{\pi}) e^{i\hbar^{-1} \mathcal{S}(t, \bar{x}, \bar{\theta}, \underline{\xi}, \underline{\pi})} \mathcal{F}u(\underline{\xi}, \underline{\pi}).$$

$\hbar = k$ のとき、 $u(t, \bar{x}, \bar{\theta}) = (\mathcal{U}(t)\underline{u})(\bar{x}, \bar{\theta})$ が方程式(2)の解となることが示される。

一方、Fourier 変換を用いて

$$\mathcal{H}\left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \theta, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \hat{\mathcal{H}}$$

となることが分る。ここで Weyl 型擬微分作用素 $\hat{\mathcal{H}}$ は表象 $\mathcal{H}(\xi, \theta, \pi)$ をもつ：

$$(\hat{\mathcal{H}}u)(x, \theta) = (2\pi\hbar)^{-3} \nu_3^2 k^3 \iint d\xi d\pi dy d\omega e^{i\hbar^{-1}(x-y|\xi) + ik^{-1}(\theta-\omega|\pi)} \mathcal{H}\left(\xi, \frac{\theta+\omega}{2}, \pi\right) u(y, \omega).$$

(6) *Zitterbewegung* の古典的対応物は次の定理で与えられる：

定理 5 各 $j = 1, 2, 3$, と $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 : \mathbb{C})^4$ に対して

$$e^{i\hbar^{-1}t\mathbb{H}}\hat{q}_j e^{-i\hbar^{-1}t\mathbb{H}}\psi = \hat{q}_{C,j}^H(t)\psi + \hat{q}_{Z,j}^H(t)\psi = b\hat{x}_{C,j}(t)\sharp\psi + b\hat{x}_{Z,j}(t)\sharp\psi = b\hat{x}_j(t)\sharp\psi.$$

ここで、 \hat{q}_j は q_j の掛け算、 $\hat{x}_j(t)$ は表象 $x_j(t, \underline{x}, \underline{\xi}, \underline{\theta}, \underline{\pi})$ をもつ $\mathfrak{R}^{3|3}$ 上の Weyl 型擬微分作用素、 $\hat{q}_{C,j}^H(t)$ と $\hat{q}_{Z,j}^H(t)$ は

$$\begin{aligned}\hat{q}_{C,j}^H(t) &= \hat{q}_j + c^2\hat{p}_j\mathbb{H}^{-1}t, \\ \hat{q}_{Z,j}^H(t) &= \hbar\left(\frac{c\alpha_j}{|\mathbb{H}|} - \frac{c^2\hat{p}_j\mathbb{H}}{|\mathbb{H}|^3}\right)\sin(\hbar^{-1}t|\mathbb{H}|)\cos(\hbar^{-1}t|\mathbb{H}|) + i\hbar\frac{\sum_{k \neq j}\alpha_k\alpha_j\hat{p}_k + d\beta\alpha_j}{|\mathbb{H}|^2}\sin^2(\hbar^{-1}t|\mathbb{H}|).\end{aligned}$$

作用素 $\hat{x}_{C,j}(t)$ と $\hat{x}_{Z,j}(t)$ の Weyl 表象は

$$x_j(t, \underline{x}, \underline{\xi}, \underline{\theta}, \underline{\pi}) = x_{C,j}(t, \underline{x}, \underline{\xi}, \underline{\theta}, \underline{\pi}) + x_{Z,j}(t, \underline{x}, \underline{\xi}, \underline{\theta}, \underline{\pi}),$$

と分解される。ここで、

$$x_{C,j}(t, \underline{x}, \underline{\xi}, \underline{\theta}, \underline{\pi}) = \underline{x}_j + \frac{t\xi_j}{|\underline{\xi}|_{mc}^2}\mathcal{H}(\underline{\xi}, \underline{\theta}, \underline{\pi}),$$

$$x_{Z,j}(t, \underline{x}, \underline{\xi}, \underline{\theta}, \underline{\pi}) = \hbar\frac{\sin(c\hbar^{-1}t|\underline{\xi}|_{mc})\cos(c\hbar^{-1}t|\underline{\xi}|_{mc})}{|\underline{\xi}|_{mc}}\left[\alpha_j - \frac{\xi_j\mathcal{H}(\underline{\xi}, \underline{\theta}, \underline{\pi})}{c|\underline{\xi}|_{mc}^2}\right] + i\hbar\frac{\sin^2(c\hbar^{-1}t|\underline{\xi}|_{mc})}{|\underline{\xi}|_{mc}^2}\left[\sum_{k \neq j}\xi_k\alpha_k\alpha_j + d\beta\alpha_j\right],$$

かつ、 α_j, β は作用素 $\sharp\alpha_j, \sharp\beta$ の Weyl 表象である。

A 4 × 4 行列の分解公式

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} &= \frac{1}{4}(b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44})\mathbb{I}_4 \\ &+ \frac{1}{4}(b_{11} + b_{22} - b_{33} - b_{44})\beta + \frac{1}{4}(b_{14} + b_{23} + b_{32} + b_{41})\alpha_1 \\ &+ \frac{i}{4}(b_{14} - b_{23} + b_{32} - b_{41})\alpha_2 + \frac{1}{4}(b_{13} - b_{24} + b_{31} - b_{42})\alpha_3 \\ &+ \frac{1}{4}(b_{14} + b_{23} - b_{32} - b_{41})\beta\alpha_1 + \frac{i}{4}(b_{14} - b_{23} - b_{32} + b_{41})\beta\alpha_2 \\ &+ \frac{1}{4}(b_{13} - b_{24} - b_{31} + b_{42})\beta\alpha_3 + \frac{i}{4}(-b_{11} + b_{22} - b_{33} + b_{44})\alpha_1\alpha_2 \\ &+ \frac{1}{4}(-b_{12} + b_{21} - b_{34} + b_{43})\alpha_1\alpha_3 + \frac{i}{4}(-b_{12} - b_{21} - b_{34} - b_{43})\alpha_2\alpha_3 \\ &+ \frac{i}{4}(-b_{11} + b_{22} + b_{33} - b_{44})\beta\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{4}(-b_{12} + b_{21} + b_{34} - b_{43})\beta\alpha_1\alpha_3 \\ &+ \frac{i}{4}(-b_{12} - b_{21} + b_{34} + b_{43})\beta\alpha_2\alpha_3 + \frac{i}{4}(-b_{13} - b_{24} - b_{31} - b_{42})\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ &+ \frac{i}{4}(-b_{13} - b_{24} + b_{31} + b_{42})\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3.\end{aligned}$$

証明. $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1, \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2$ より

$$\begin{aligned}\beta\alpha_k &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1\alpha_2 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2\alpha_3 = \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix}, \\ \alpha_3\alpha_1 &= \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \beta\alpha_1\alpha_2 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \beta\alpha_2\alpha_3 = \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}, \\ \beta\alpha_3\alpha_1 &= \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{I}_2 \\ i\mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{I}_2 \\ -i\mathbb{I}_2 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

後は単純な計算で求める式が得られる。 □

注意: *Gamma* 行列 $\{\gamma_k\}$ を

$$\gamma_k = -i\beta\alpha_k \quad (k = 1, 2, 3), \quad \gamma_4 = \beta$$

と定めると $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\mathbb{I}_4$ であり

$$\begin{cases} \mathbb{I}_4 & \text{scalar} \\ \gamma_\mu & \text{vector} \\ \gamma_\mu\gamma_\nu \ (\mu \neq \nu) & \text{anti-symmetric tensor} \\ \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma \ (\mu \neq \nu \neq \sigma \neq \mu) & \text{axial vector} \\ \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\sigma\gamma_\rho \ (\text{all of } \mu, \nu, \sigma, \rho \text{ are distinct}) & \text{pseudo-scalar} \end{cases}$$

スーパー空間上の微分作用素としての表現:

$$\mathbb{C}^4 \ni \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[b]{\#} u(\theta) = u_0 + u_1\theta_1\theta_2 + u_2\theta_2\theta_3 + u_3\theta_3\theta_1$$

ここで $u_{j-1} = \psi_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$).

すると、スーパー空間上の微分作用素として

$$\begin{cases} \alpha_1\left(\theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \left(\theta_3 + \frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\left(\theta_1 - \frac{\partial}{\partial\theta_1}\right), \\ \alpha_2\left(\theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) = i\left(\theta_3 + \frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\left(\theta_1 + \frac{\partial}{\partial\theta_1}\right), \\ \alpha_3\left(\theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) = -\left(\theta_3 + \frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\left(\theta_2 - \frac{\partial}{\partial\theta_2}\right), \\ \beta\left(\theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right) = \left(\theta_3 + \frac{\partial}{\partial\theta_3}\right)\left(\theta_3 - \frac{\partial}{\partial\theta_3}\right) = 1 - 2\theta_3\frac{\partial}{\partial\theta_3}, \end{cases}$$

とおくと

$$\begin{cases} b\alpha_1\left(\theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\#\psi = \alpha_1\psi, & b\alpha_2\left(\theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\#\psi = \alpha_2\psi, \\ b\alpha_3\left(\theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\#\psi = \alpha_3\psi, & b\beta\left(\theta, \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\#\psi = \beta\psi. \end{cases}$$

これより、

$$\begin{cases} (\#\beta\alpha_1b)(\theta, \partial_\theta) = (\theta_1 - \partial_{\theta_1})(\theta_3 - \partial_{\theta_3}), \\ (\#\beta\alpha_2b)(\theta, \partial_\theta) = i(\theta_1 + \partial_{\theta_1})(\theta_3 - \partial_{\theta_3}), \\ (\#\beta\alpha_3b)(\theta, \partial_\theta) = -(\theta_2 - \partial_{\theta_2})(\theta_3 - \partial_{\theta_3}), \\ (\#\alpha_1\alpha_2b)(\theta, \partial_\theta) = i(1 - 2\theta_1\partial_{\theta_1}), \\ (\#\alpha_1\alpha_3b)(\theta, \partial_\theta) = (\theta_1 - \partial_{\theta_1})(\theta_2 - \partial_{\theta_2}), \\ (\#\alpha_2\alpha_3b)(\theta, \partial_\theta) = i(\theta_1 + \partial_{\theta_1})(\theta_2 - \partial_{\theta_2}), \\ (\#\beta\alpha_1\alpha_2b)(\theta, \partial_\theta) = i(1 - 2\theta_1\partial_{\theta_1})(1 - 2\theta_3\partial_{\theta_3}), \\ (\#\beta\alpha_1\alpha_3b)(\theta, \partial_\theta) = (\theta_1 - \partial_{\theta_1})(\theta_2 - \partial_{\theta_2})(1 - 2\theta_3\partial_{\theta_3}), \\ (\#\beta\alpha_2\alpha_3b)(\theta, \partial_\theta) = i(\theta_1 + \partial_{\theta_1})(\theta_2 - \partial_{\theta_2})(1 - 2\theta_3\partial_{\theta_3}), \\ (\#\alpha_1\alpha_2\alpha_3b)(\theta, \partial_\theta) = i(1 - 2\theta_1\partial_{\theta_1})(\theta_2 - \partial_{\theta_2})(\theta_3 + \partial_{\theta_3}), \\ (\#\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3b)(\theta, \partial_\theta) = -i(1 - 2\theta_1\partial_{\theta_1})(\theta_2 - \partial_{\theta_2})(\theta_3 - \partial_{\theta_3}). \end{cases}$$

これらの微分作用素に対応する Weyl 表象は

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta, \pi) = \sigma_w(\sharp\alpha_1 b)(\theta, \pi) = (\theta_3 + i\pi_3)(\theta_1 - i\pi_1), \\ \alpha_2(\theta, \pi) = \sigma_w(\sharp\alpha_2 b)(\theta, \pi) = i(\theta_3 + i\pi_3)(\theta_1 + i\pi_1), \\ \alpha_3(\theta, \pi) = \sigma_w(\sharp\alpha_3 b)(\theta, \pi) = -(\theta_3 + i\pi_3)(\theta_2 - i\pi_2), \\ \beta(\theta, \pi) = \sigma_w(\sharp\beta b)(\theta, \pi) = (\theta_3 + i\pi_3)(\theta_3 - i\pi_3) = -2i\theta_3\pi_3. \end{cases}$$

であり、これらの作用素の合成の表象は

$$\begin{cases} \sigma_w(\sharp\beta\alpha_1 b)(\theta, \pi) = (\theta_1 - i\pi_1)(\theta_3 - i\pi_3), \\ \sigma_w(\sharp\beta\alpha_2 b)(\theta, \pi) = i(\theta_1 + i\pi_1)(\theta_3 - i\pi_3), \\ \sigma_w(\sharp\beta\alpha_3 b)(\theta, \pi) = -(\theta_2 - i\pi_2)(\theta_3 - i\pi_3), \\ \sigma_w(\sharp\alpha_1\alpha_2 b)(\theta, \pi) = -2i\theta_1\pi_1, \\ \sigma_w(\sharp\alpha_1\alpha_3 b)(\theta, \pi) = (\theta_1 - i\pi_1)(\theta_2 - i\pi_2), \\ \sigma_w(\sharp\alpha_2\alpha_3 b)(\theta, \pi) = i(\theta_1 + i\pi_1)(\theta_2 - i\pi_2), \\ \sigma_w(\sharp\beta\alpha_1\alpha_2 b)(\theta, \pi) = 4i\theta_1\theta_3\pi_1\pi_3, \\ \sigma_w(\sharp\beta\alpha_1\alpha_3 b)(\theta, \pi) = -2i(\theta_1 - i\pi_1)(\theta_2 - i\pi_2)\theta_3\pi_3, \\ \sigma_w(\sharp\beta\alpha_2\alpha_3 b)(\theta, \pi) = 2(\theta_1 + i\pi_1)(\theta_2 - i\pi_2)\theta_3\pi_3, \\ \sigma_w(\sharp\alpha_1\alpha_2\alpha_3 b)(\theta, \pi) = 2\theta_1\pi_1(\theta_2 - i\pi_2)(\theta_3 + i\pi_3), \\ \sigma_w(\sharp\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3 b)(\theta, \pi) = -2\theta_1\pi_1(\theta_2 - i\pi_2)(\theta_3 - i\pi_3). \end{cases}$$

問題： Dirac の導入した Clifford 関係式の行列表現には、Standard(or Dirac-Pauli), Supersymmetric, Weyl(or spinor), Majorana 等の色々な表現がある。これらを、スーパー空間上の微分作用素の変数変換公式として理解できないものか？

B 自由 Weyl 方程式

$$\mathbb{C}^2 \ni \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\flat]{\sharp} u(\theta) = u_0 + u_1\theta_1\theta_2 \in \mathfrak{C}_{\text{ev}} \quad \text{ここで} \quad u_0 = \psi_1, u_1 = \psi_2.$$

$\lambda \in \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ を任意に導入した定数として

$$\begin{aligned} \sigma_1\left(\sqrt{\frac{i}{\lambda}}\theta, \sqrt{\frac{\lambda}{i}}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) &= i\lambda^{-1}\left(\theta_1\theta_2 + \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right), \\ \sigma_2\left(\sqrt{\frac{i}{\lambda}}\theta, \sqrt{\frac{\lambda}{i}}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) &= -\lambda^{-1}\left(\theta_1\theta_2 - \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right), \\ \sigma_3\left(\sqrt{\frac{i}{\lambda}}\theta, \sqrt{\frac{\lambda}{i}}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) &= 1 - \theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}. \end{aligned}$$

注意： $|\lambda| = 1$ のとき、 $\{b\sigma_j(\theta, -i\lambda\partial_\theta)\sharp\}$ はユニタリ行列で、特に $\lambda = i$ なるとき通常の Pauli 行列になる。

また、 $k \in \mathbb{R}^\times$ 或いは $i\mathbb{R}^\times$ ($\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$) を奇変数に関する Fourier 変換に導入された任意の定数として、Weyl 方程式に対する表象が

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\xi, \theta, \pi) &= ic\lambda^{-1}(\theta_1\theta_2 - \lambda^2k^{-2}\pi_1\pi_2)\xi_1 - c\lambda^{-1}(\theta_1\theta_2 + \lambda^2k^{-2}\pi_1\pi_2)\xi_2 - ick^{-1}(\theta_1\pi_1 + \theta_2\pi_2)\xi_3 \\ &= ic\lambda^{-1}(\xi_1 + i\xi_2)\theta_1\theta_2 - ic\lambda k^{-2}(\xi_1 - i\xi_2)\pi_1\pi_2 - ick^{-1}\xi_3(\theta_1\pi_1 + \theta_2\pi_2). \end{aligned}$$

Hamilton flows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x_1 = ic\lambda^{-1}(\theta_1\theta_2 - \lambda^2k^{-2}\pi_1\pi_2) = c\sigma_1(\theta, \pi), \\ \frac{d}{dt}x_2 = -c\lambda^{-1}(\theta_1\theta_2 + \lambda^2k^{-2}\pi_1\pi_2) = c\sigma_2(\theta, \pi), \\ \frac{d}{dt}x_3 = -ick^{-1}(\theta_1\pi_1 + \theta_2\pi_2) = c\sigma_3(\theta, \pi), \\ \frac{d}{dt}\xi_j = 0 \quad \text{但し } j = 1, 2, 3, \\ \frac{d}{dt}\theta_1 = ic\lambda k^{-2}(\xi_1 - i\xi_2)\pi_2 - ick^{-1}\xi_3\theta_1, \\ \frac{d}{dt}\theta_2 = -ic\lambda k^{-2}(\xi_1 - i\xi_2)\pi_1 - ick^{-1}\xi_3\theta_2, \\ \frac{d}{dt}\pi_1 = -ic\lambda^{-1}(\xi_1 + i\xi_2)\theta_2 + ick^{-1}\xi_3\pi_1, \\ \frac{d}{dt}\pi_2 = ic\lambda^{-1}(\xi_1 + i\xi_2)\theta_1 + ick^{-1}\xi_3\pi_2. \end{array} \right.$$

ここで、 $\frac{d}{dt}\xi_j = 0$, i.e. $\xi_j(t) = \underline{\xi}_j$ がポイント！

上式を書き直すと、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = ic\mathbb{X} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} \quad \text{ここで} \quad \begin{pmatrix} \theta_1(0) \\ \theta_2(0) \\ \pi_1(0) \\ \pi_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\theta}_1 \\ \underline{\theta}_2 \\ \underline{\pi}_1 \\ \underline{\pi}_2 \end{pmatrix}.$$

ここで

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} -k^{-1}\xi_3 & 0 & 0 & \lambda k^{-2}(\xi_1 - i\xi_2) \\ 0 & -k^{-1}\xi_3 & -\lambda k^{-2}(\xi_1 - i\xi_2) & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1}(\xi_1 + i\xi_2) & k^{-1}\xi_3 & 0 \\ \lambda^{-1}(\xi_1 + i\xi_2) & 0 & 0 & k^{-1}\xi_3 \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{X}^2 = k^{-2}|\xi|^2\mathbb{I}_4$ となるから

$$e^{ict\mathbb{X}} = \cos(ck^{-1}t|\xi|)\mathbb{I}_4 + ik|\xi|^{-1}\sin(ck^{-1}t|\xi|)\mathbb{X}.$$

以降、 $\eta = \underline{\xi}_1 + i\underline{\xi}_2$, $\bar{\eta} = \underline{\xi}_1 - i\underline{\xi}_2$ という記号を使う。

一方、

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= i\lambda^{-1}(\theta_1(t)\theta_2(t) - \lambda^2k^{-2}\pi_1(t)\pi_2(t)), \\ \sigma_2(t) &= -\lambda^{-1}(\theta_1(t)\theta_2(t) + \lambda^2k^{-2}\pi_1(t)\pi_2(t)), \\ \sigma_3(t) &= -ick^{-1}(\theta_1(t)\pi_1(t) + \theta_2(t)\pi_2(t)), \end{aligned}$$

とおき、 t に関して微分して

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = 2ck^{-1}\mathbb{Y} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \text{ここで} \quad \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

これより、

$$\mathbb{Y}^2 = \begin{pmatrix} -\xi_3^2 - \xi_2^2 & \xi_2\xi_1 & \xi_3\xi_1 \\ \xi_1\xi_2 & -\xi_3^2 - \xi_1^2 & \xi_3\xi_2 \\ \xi_1\xi_3 & \xi_2\xi_3 & -\xi_2^2 - \xi_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad \mathbb{Y}^3 = -|\xi|^2\mathbb{Y},$$

となるから、

$$e^{2c\bar{k}^{-1}t\mathbb{Y}} = \mathbb{I}_3 + |\xi|^{-1} \sin(2c\bar{k}^{-1}t|\xi|)\mathbb{Y} + |\xi|^{-2}(1 - \cos(2c\bar{k}^{-1}t|\xi|))\mathbb{Y}^2.$$

即ち、「行列構造」は以下のように「変化」する。

$$\begin{aligned}\sigma_1(s) &= \underline{\sigma}_1 + \sin(2c\bar{k}^{-1}s|\underline{\xi}|)|\underline{\xi}|^{-1}(-\underline{\xi}_3\underline{\sigma}_2 + \underline{\xi}_2\underline{\sigma}_3) \\ &\quad + (1 - \cos(2c\bar{k}^{-1}s|\underline{\xi}|))|\underline{\xi}|^{-2}[-(\underline{\xi}_2^2 + \underline{\xi}_3^2)\underline{\sigma}_1 + \underline{\xi}_1\underline{\xi}_2\underline{\sigma}_2 + \underline{\xi}_1\underline{\xi}_3\underline{\sigma}_3], \\ \sigma_2(s) &= \underline{\sigma}_2 + \sin(2c\bar{k}^{-1}s|\underline{\xi}|)|\underline{\xi}|^{-1}(\underline{\xi}_3\underline{\sigma}_1 - \underline{\xi}_1\underline{\sigma}_3) \\ &\quad + (1 - \cos(2c\bar{k}^{-1}s|\underline{\xi}|))|\underline{\xi}|^{-2}[\underline{\xi}_1\underline{\xi}_2\underline{\sigma}_1 - (\underline{\xi}_1^2 + \underline{\xi}_3^2)\underline{\sigma}_2 + \underline{\xi}_2\underline{\xi}_3\underline{\sigma}_3], \\ \sigma_3(s) &= \underline{\sigma}_3 + \sin(2c\bar{k}^{-1}s|\underline{\xi}|)|\underline{\xi}|^{-1}(-\underline{\xi}_2\underline{\sigma}_1 + \underline{\xi}_1\underline{\sigma}_2) \\ &\quad + (1 - \cos(2c\bar{k}^{-1}s|\underline{\xi}|))|\underline{\xi}|^{-2}[\underline{\xi}_1\underline{\xi}_3\underline{\sigma}_1 + \underline{\xi}_2\underline{\xi}_3\underline{\sigma}_2 - (\underline{\xi}_1^2 + \underline{\xi}_2^2)\underline{\sigma}_3].\end{aligned}$$

C Miscellaneous

$E, E_1, E_2 \in \mathcal{C}_{\text{SS, ev}}(T^*\mathfrak{R}^{m|n})$ と $O, O_1, O_2 \in \mathcal{C}_{\text{SS, od}}(T^*\mathfrak{R}^{m|n})$ に対して、次数付き (graded) Poisson 括弧 $\{\{, \}\}$ を以下のように定める：

$$\left\{ \begin{aligned}\{\{E_1, E_2\}\} &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_j} \frac{\partial E_2}{\partial \xi_j} - \frac{\partial E_2}{\partial x_j} \frac{\partial E_1}{\partial \xi_j} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial E_1}{\partial \theta_k} \frac{\partial E_2}{\partial \pi_k} - \frac{\partial E_2}{\partial \theta_k} \frac{\partial E_1}{\partial \pi_k} \right), \\ \{\{E, O\}\} &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial E}{\partial x_j} \frac{\partial O}{\partial \xi_j} - \frac{\partial O}{\partial x_j} \frac{\partial E}{\partial \xi_j} \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial E}{\partial \theta_k} \frac{\partial O}{\partial \pi_k} + \frac{\partial O}{\partial \theta_k} \frac{\partial E}{\partial \pi_k} \right), \\ \{\{O_1, O_2\}\} &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial O_1}{\partial x_j} \frac{\partial O_2}{\partial \xi_j} + \frac{\partial O_2}{\partial x_j} \frac{\partial O_1}{\partial \xi_j} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial O_1}{\partial \theta_k} \frac{\partial O_2}{\partial \pi_k} + \frac{\partial O_2}{\partial \theta_k} \frac{\partial O_1}{\partial \pi_k} \right).\end{aligned}\right.$$

すると、 $\mathcal{H} \in \mathcal{C}_{\text{SS, ev}}(T^*\mathfrak{R}^{m|n})$ から定まる古典力学は

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi(t) = \{\{\varphi(t), \mathcal{H}\}\}, \\ \varphi(0) = \varphi(X, \Xi) \end{cases}$$

によって支配される。ここで、 $\varphi \in \mathcal{C}_{\text{SS}}(T^*\mathfrak{R}^{m|n})$ であり、特性曲線の方法で $\varphi(t) = \varphi(X(t), \Xi(t))$ となる：

$$\begin{aligned}X(t) &= (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)), \\ \Xi(t) &= (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t), \pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t)), \\ x_j(t) &= x_j(t, x, \xi, \theta, \pi), \quad \theta_k(t) = \theta_k(t, x, \xi, \theta, \pi), \quad \text{etc} \\ X &= X(0) = (x, \xi, \theta, \pi), \quad \Xi = \Xi(0) = (x, \xi, \theta, \pi).\end{aligned}$$

Fourier 変換を用いて、

$$\left\{ \begin{aligned}\hat{x}_j u(x, \theta) &= (2\pi\hbar)^{-3} i_3^2 k^3 \int_{\mathfrak{R}^{3|3} \times \mathfrak{R}^{3|3}} d\xi d\pi dx' d\theta' e^{i\hbar^{-1}\langle x-x'|\xi\rangle + ik^{-1}\langle \theta-\theta'|\pi\rangle} \frac{x_j + x'_j}{2} u(x', \theta'), \\ \hat{\xi}_k u(x, \theta) &= (2\pi\hbar)^{-3} i_3^2 k^3 \int_{\mathfrak{R}^{3|3} \times \mathfrak{R}^{3|3}} d\xi d\pi dx' d\theta' e^{i\hbar^{-1}\langle x-x'|\xi\rangle + ik^{-1}\langle \theta-\theta'|\pi\rangle} \xi_k u(x', \theta'), \\ \hat{\theta}_l u(x, \theta) &= (2\pi\hbar)^{-3} i_3^2 k^3 \int_{\mathfrak{R}^{3|3} \times \mathfrak{R}^{3|3}} d\xi d\pi dx' d\theta' e^{i\hbar^{-1}\langle x-x'|\xi\rangle + ik^{-1}\langle \theta-\theta'|\pi\rangle} \frac{\theta_l + \theta'_l}{2} u(x', \theta'), \\ \hat{\pi}_m u(x, \theta) &= (2\pi\hbar)^{-3} i_3^2 k^3 \int_{\mathfrak{R}^{3|3} \times \mathfrak{R}^{3|3}} d\xi d\pi dx' d\theta' e^{i\hbar^{-1}\langle x-x'|\xi\rangle + ik^{-1}\langle \theta-\theta'|\pi\rangle} \pi_m u(x', \theta')\end{aligned}\right.$$

と定めると、

$$\begin{aligned}\hat{x}_j u(x, \theta) &= x_j u(x, \theta), \quad \hat{\xi}_k u(x, \theta) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} u(x, \theta) \quad \text{但し } j, k = 1, 2, 3, \\ \hat{\theta}_l u(x, \theta) &= \theta_l u(x, \theta), \quad \hat{\pi}_m u(x, \theta) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \theta_m} u(x, \theta) \quad \text{但し } l, m = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

これより、

$$[\hat{\xi}_k, \hat{x}_j]_- = \frac{\hbar}{i} \delta_{jk}, \quad [\hat{\pi}_m, \hat{\theta}_l]_+ = \frac{\hbar}{i} \delta_{lm}.$$

作用素 \hat{A} の偶奇 $p(\hat{A})$ を

$$\begin{cases} p(\hat{A}) = 1 & \text{もし } \hat{A} \text{ がスーパー関数の偶奇を変える作用素,} \\ p(\hat{A}) = 0 & \text{もし } \hat{A} \text{ がスーパー関数の偶奇を変えない作用素} \end{cases}$$

とし、次数付き交換子 (graded commutator) $[[\cdot, \cdot]]$ を

$$(3) \quad [[\hat{A}, \hat{B}]] = \hat{A}\hat{B} - (-1)^{p(\hat{A})p(\hat{B})} \hat{B}\hat{A},$$

と定める。すると、SCCR(=super canonical commutation relation) が求まる：

$$[[\hat{\Xi}_K, \hat{X}_J]] = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{1-p(\hat{X}_J)p(\hat{\Xi}_K)} \left(\frac{\hbar}{i}\right)^{p(\hat{X}_J)p(\hat{\Xi}_K)} \delta_{JK} \quad \text{但し } J, K = 1, \dots, 6.$$

更に

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}u(x, \theta) &= (2\pi\hbar)^{-3} i_3^2 k^3 \int_{\mathfrak{R}^{3|3} \times \mathfrak{R}^{3|3}} d\xi d\pi dx' d\theta' \\ &\quad \times e^{i\hbar^{-1}\langle x-x'|\xi\rangle + ik^{-1}\langle \theta-\theta'|\pi\rangle} \mathcal{H}\left(\xi, \frac{\theta+\theta'}{2}, \pi\right) u(x', \theta'), \\ \hat{\alpha}_j u(x, \theta) &= i_3^2 k^3 \int_{\mathfrak{R}^{0|3} \times \mathfrak{R}^{0|3}} d\pi d\theta' e^{ik^{-1}\langle \theta-\theta'|\pi\rangle} \alpha_j\left(\frac{\theta+\theta'}{2}, \pi\right) u(x, \theta'), \\ \hat{\beta} u(x, \theta) &= i_3^2 k^3 \int_{\mathfrak{R}^{0|3} \times \mathfrak{R}^{0|3}} d\pi d\theta' e^{ik^{-1}\langle \theta-\theta'|\pi\rangle} \beta\left(\frac{\theta+\theta'}{2}, \pi\right) u(x, \theta').\end{aligned}$$

Fermion の量子化 : Liouville から Heisenberg へ

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi(t) = \{\{\varphi(t), \mathcal{H}\}\}, & \text{量子化} \\ \varphi(0) = \varphi(X, \Xi), \end{cases} \quad \begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt}\hat{\varphi}^H(t) = [[\hat{\varphi}^H(t), \hat{\mathcal{H}}]], \\ \hat{\varphi}^H(0) = \hat{\varphi}. \end{cases}$$

上式が Fermion に対応する Heisenberg 描像であり、前に述べた解の経路積分表示が Feynman の求められなかったものである。4 元数を使うという Feynman の考え方の方向性はそれ程間違っていなかったとも言えるが、可算無限個の生成元 $\{\sigma_j\}$ を用いたスーパー数 $\mathfrak{R}, \mathfrak{C}$ の導入の必然性は考えつかなくても当然であろう。

参考文献

- [1] F.A. Berezin and M.S. Marinov, *Particle spin dynamics as the Grassmann variant of classical mechanics*, Ann.of Physics 104(1977), pp. 336-362.
- [2] R. Casalbuoni, *On the quantization of systems with anticommuting variables*, Nuovo Cimento A 33(1976), pp. 115-125.
- [3] ———, *The classical mechanics for Bose-Fermi systems*, Nuovo Cimento A 33(1976) pp. 389-431

- [4] R. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, New York, McGraw-Hill Book Co.(1965).
- [5] J. L. Martin, *Generalized classical dynamics, and 'classical analogue' of a Fermi oscillator*, Proc.Roy.Soc. A 251(1959), pp. 536-542.
- [6] ——— *The Feynman principle for a Fermi system*, Proc.Roy.Soc. A 251(1959), pp. 543-549.
- [7] B. Thaller, *The Dirac Equation*, Springer-Verlag, Texts and Monographs in Physics, Berlin, 1992.
- [8] 朝永振一郎, 「スピンはめぐる—成熟期の量子力学」, 中央公論社 自然選書, 東京, 1974.
- [9] 西島和彦, 「相対論的量子力学」, 培風館 新物理学シリーズ 13, 1973.