

## 1 講義の目的

機械知能システム学科では、3年生を対象に、「教育上役に立つ実験装置の考案と製作を行う」ことを通じて、総合的に考える力を養成するのを目的とする講義を試みられているとのこと。

そもそも『総合的に考える力』とは何か？差し当たり、好奇心、探究心、色々別の観点でみることができる柔らかい心を持つ高い知性のこと？と解釈しておこう。

今朝 (01.13) 大学に来る途中電車の吊し広告で、週刊朝日の宣伝を見つける。そこに『コレステロール値、人間ドック学会では280— 高齢女性の投薬基準、動脈硬化学会では220, 何故こんなに違うのか』とあった。実は同じタイプの問題が昔にもあった。それは血糖値を調べるのはいいが、やたらと数値を出しても、どの値を持って糖尿病の危険ありと判断したら良いのか？という問題です<sup>1</sup>。これについての一つの方針がマイヨ-クリニックで提案された。ここでは、症例について統計的な処理をただけでは不十分で、インシュリンの量の人体内コントロールのメカニズム説明のために数理モデルを考えている。このような基礎的な事柄の理解の重要性はいつになってもなくなることはあるまい。勿論、ちらしだけの情報では分らないが、高コレステロールの身体への影響について数理的モデルでも提案されたのだろうか？多分、双方とも症例の統計処理を基にしていると思われるが、「統計的」というには莫大な資料の収集が不可欠であろう。しかし、医療内容の公開等が未だ当然のことと認められていない閉鎖的な日本社会ではそれも難しだろう。即ち、「統計的」というにはあまりにも基盤が脆弱なままの判断ではないのだろうか？ ← 数量的に物事を考えるとき、微分方程式を用いると有効だった<sup>2</sup>！

鎌倉中央公園が近いので連休に少し散歩をした。そのとき、丸太で縁をとった階段状の道があり、ここで歩行ロボットのラリーができないか？東工大で始めたロボコンの発展解消版としてどうか？と思いついた。偶然ネットサーフをしていたところ、

<http://elekitel.jp/elekitel/>

の中の [Science Talk] の中にロボットの「歩行」についての対談があった。他の読み物と共に若い人々が活用して欲しいものである。

当機械学科では、『数学は現象を記述する言語として重要』という認識をもたれているとのこと。これはもっともらしく聞こえる言葉であり、「数学者の存在をも容認している」言葉とも思えますから、数学者の一員を自称する者にとって有難いことです。しかし、『一体、機械知能システム専攻の誰がそう思ったのか？』より詳しくは、『具体的な局面で、何が問題として認識され、それが数学という言葉を用いて考察することによって、どう問題の解決に役立ったのか？』という事象が実生活上でどれだけあったのでしょうか？これが分るともう少し踏み込んだ関係が築けるかもしれません！

ところで「考える」という行為は言語無しではできないだろうし、その考えとやらを他の人に伝えることもできない。「言葉」という意味ではもっとも身近な日本語を考えるとき、日本ではほとんどすべての人が用いているという意味で日本語は重要であるが、「果たして何人が意味ある用い方しているのか」と問うこともできよう。

例えば、私もその一員とされている「数学者集団」に属する人は「数学の言語機能を十全に用いているのか？」と問うて見よう。言葉としての最大の機能は「考える」ことを可能ならしめ、そ

<sup>1</sup>量子力学に関する多くの散乱実験数値をどう処理したら意味を見い出すことができるのか、という問題意識から Random Matrix Theory ができた？!

<sup>2</sup>どうして日食がいつどこでおこるか前から分るのか？これが近代における科学的積み重ねのご利益だが、これらは物理現象の事。「科学万能主義」から「科学信仰」に落ちり、何処かの学会での数値があだこうだと大騒ぎするのは社会現象。これらの数値は天気予報よりも根拠がないのかもしれないに！

れを伝達できることであろう。で、果たして数学者は「考えることができる人」なのだろうか？もし、数学言語をうまく用いて論文を書くことができるとして、果たして実生活で「考えて行動」できることを意味するのだろうか？

こうなると頼りないが、教育という行為の原点の総合的に考える力を引き出す試みに、数学からの協力として何ができるのか？

私の話を聞いてくれるかどうかの自信はないし、数学者としてのものの考え方を説明することができたとしても、「教育上役に立つ実験装置の考案と製作を行う」ことに直接的に役立つとは思えない。しかし、「数学者も全く無意味な存在では無さそうだ」と思ってもらえるかもしれない機会を与えられたものとして話をしてみたい。

経済第一主義の世の中でもっとも効果が見えにくい学問の一つに携わり禄をはんでいる者として、数学者はいらないとなるとまずい。経済効率一辺倒から世の認識が改まるまでの時間つなぎに「数学者の職場」確保の方策として、他学科への出前講義の一環としての試みとでも言おうか。

「面白い話」と思えるのだが？: ニクソンにあることを要請された佐藤栄作は、その案件に対し日本語で「前向きの姿勢で善処する」( = 永田町用語で「さしあたってなにもしない」) と答えた、通訳は「forward-looking posture」(前向きの姿勢) と訳し、ニクソンは大喜びした。しかし、佐藤は「日本語の意味の通り」何もせず、ニクソンは激怒したとのこと(これが後に、日本にとってのニクソンショックを引き起こした?) 面白いのは、米国国際政治学者の語彙としてこの言い回し forward-looking posture が採用されたことだ。これぞ日本からの「珍妙な輸出品」(エス・チャング『タイム記者が出会った「巨魁」外伝』新潮社より)

「創造すること」に関連し、数学的に考えることはどういうことなのかを説明できるか？それができれば、『講義の目的』に対し、どうすれば数学教育が意味を持つのか、のヒントになるやもしれない。

「心から分かった」という物事の理解の状態、それを説明できる言葉を持っていること、この2つを実感できるもっとも易しく安く確実な経験を与えうる学問体系が数学だと私は思っている。ある者は「論理的な思考」の訓練として数学教育があると思っただが、私はそうとは思えないのである。どの分野にも論理があり、それがなければ意志の伝達ができないはずだからである。

ここでは、主として「解析学」特に「偏微分方程式による現象の理解」について述べるつもりである。しかし、これは「精神論」で具体的にコンピュータでどうすれば良いのか？という疑問には、ほとんど言及できない。そこで、一つの例として以下の本(私はまだ実物を見ていないが)

Eric Lengyel「ゲームプログラミングのための3Dグラフィックス」株式会社ポーンデジタル等を参照し、楽しみながら？ロボットの設計をされてもよからう。

本書は、ゲームプログラマにとってプロフェッショナル品質の3Dエンジンを開発するために欠かせない数学的概念を解説したものです。基本的にゲーム開発での応用を念頭に置いて書かれています。多くのトピックは3Dグラフィックス全般の興味をそそるものとなっています。本書はベクトル幾何や線形代数などの基本的な分野から始まり、照明計算や可視判定のような高度な3Dゲームプログラミングのトピックへと進んでいきます。重要な結果の導出過程は特に丁寧に解説されており、読者が理論の飛躍に悩まされることのないよう配慮されています。本書は、三角法や微積分学に関してある程度の知識を持つ読者を対象としていますが、それらの分野の中でも三角関数の各種公式、微分方程式、テイラー級数などの重要な道具については、復習用のセクションも設けられています。Game Programming Gems 読者には必携の参考書です。

- ・ 3D ゲームエンジンをプログラミングする上で鍵となる数学的トピックを重点的に解説
- ・ 業界で長年実績のあるクロスプラットフォームの OpenGL アーキテクチャを用いた応用例を紹介 NVIDIA 社の GeForce3 などの最新 3D ハードウェアについても言及
- ・ 四元数、同次座標、レイトレーシング、バンプマッピング、ポータルシステム、各種ポリゴン技法、シャドウ、物理学などを解説

- ・教科書としても利用できるよう各章末に練習問題付き

数学的概念の必要性（極めて易しい例）:

・例えば、Euler の公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i\sin \theta$  があれば、三角関数の各種の公式は必要に応じて極めて楽に導出できる（家庭教師をするとき便利だぞ！）。ここで、複素数の概念、冪級数、変数の複素数化、収束性等の概念がいつのまにか使われている。

- ・球面上の直線概念を述べたが、具体的に与えられた球面上にどう「直線」を引くか？

## 1.1 問題：音とは何か？

問：西瓜が熟しているかどうか、壁の裏側が空洞かどうか（壁に釘を打つ時）、コンクリート壁にひびが入っていないかどうか（トンネルのコンクリート落下事故防止）、飛行機の圧力隔壁にひびが入っていないかどうか、等々。鹿児島空港での出発飛行機の主脚破損、前からヒビがはいっていたらしいが、定期検査で不具合が見つからず今回の事故。

答：まずは壊れない程度に叩いて音を聞くのでは？ヒビの存在、非存在には「音診」が用いられているのでは？その診断の正確さをどう保証しているのか？

例：聴診器を用いて体内の音を聴き、問診して患者の状態を探る。患者の身体を浸潤せずに、的確な診断ができるか？鉱物学者に「この宝石が本物かどうか」調べることができるかと問うと、「壊せば分る」というが、少し困るんだな -。

量子力学の発見経過、黒体輻射、固有値分布と物体について

『朝永振一郎「量子力学Ⅰ」みすず書房』より

理論物理学者の仕事を大別して二つに分けることができる。一つは出来上がった理論を未だ理論的に解決されていない問題に適用して現象の由来を明らかにすることであり、今一つは新しい理論を作り上げることである。この後の仕事は、第一の仕事に劣らず重要であるが、その場合研究者を導くのに過去においてそういう仕事が如何にして行なわれたかという例が非常に役立つであろう。

黒体（空洞）輻射問題：ある温度に熱せられた物体はどういう色の光を出すであろうか？物体を熱したとき出る光は、温度の低い時には赤い色をしているが、温度の上がるにつれて次第に白い色を呈するようになる。この現象を原子論的に説明するとどうということになるのか？

温度  $T$  の壁で囲まれた室（空洞）があったとする。そうすると、熱的な釣り合いの状態において、この空洞内にはどんなスペクトルの光が存在するのであろうか？

Kirchhoff の法則『このスペクトルは温度  $T$  だけに係し、壁の物質、空洞の形、或いは大きさにはよらない』は実験的に知られていた。

結論：黒体（空洞）輻射問題の解決に M. Planck は後に言われるようになった Planck 定数の導入をし、古典力学からの飛躍「エネルギーは飛び飛びの値を取る」をなした。これが、量子力学の巨大な一歩のはじまり。しかし、それを支配する方程式の導出の仕方は、それまでのものとは明らかに異なっているし、未だに完全に解決したとは言いがたい（と少なくとも私は考えている）。

重要なことは、黒体（空洞）輻射問題も音のスペクトルも同じ微分方程式で支配されていると考えることができることです！これが抽象化の最大のご利益なのです。

各種の方程式の由来について

波動方程式の導出：

熱方程式、 $u_t = \Delta u$  : (以下は井川満「偏微分方程式論入門」裳華房より) 一直線にのびた針金を熱が伝わるとする。熱は針金の外には逃げないと仮定し、 $\mathbb{R}$  の各点と針金の場所を対応させ、時刻  $t$  での場所  $x$  における温度を  $u(x, t)$  で表す。熱は温度の高い方から温度の低い方へ、そこでの温度の傾きに比例して伝わるとする。即ち、時刻  $t$  から時刻  $t + \Delta t$  の間に  $x = a$  を右に向かって通過する熱量は

$$-\Delta t \kappa(a) \frac{\partial u}{\partial x}(a, t)$$

で与えられる。 $\kappa(a)$  は  $x = a$  における熱伝導率とする。同様にして、 $x = a + \Delta a$  を右に向かって通過する熱量は

$$-\Delta t \kappa(a + \Delta a) \frac{\partial u}{\partial x}(a + \Delta a, t).$$

従って、 $x = a$  と  $x = a + \Delta a$  とで切り取られる微小部分  $\Delta A$  での熱量変化は

$$-\Delta t \kappa(a) \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) + \Delta t \kappa(a + \Delta a) \frac{\partial u}{\partial x}(a + \Delta a, t). \quad (1)$$

一方、微小部分  $\Delta A$  での時刻が  $t$  から  $t + \Delta t$  に変わる間における温度変化は、 $\Delta A$  に加わった熱量に比例する。針金の  $a$  における密度を  $\rho(a)$  とすると、 $\Delta A$  の質量は  $\rho(a)\Delta a$  となる。針金の  $a$  における比熱を  $\gamma(a)$  とすると、微小部分  $\Delta A$  の温度が時刻  $t$  で  $u(a, t)$  であったものが、時間  $\Delta t$  後に  $u(a, t + \Delta t)$  に変わったとすれば、その温度変化に要した熱量は

$$\rho(a)\Delta a \gamma(a) \{u(a, t + \Delta t) - u(a, t)\} \quad (2)$$

(1) と (2) は等しいはずだから、それらを等しいとおいて、 $\Delta t$  で割り  $\Delta t \rightarrow 0$  とし次に  $\Delta a$  で割り  $\Delta a \rightarrow 0$  とすると

$$\rho(a)\gamma(a) \frac{\partial u}{\partial t}(a, t) = \frac{\partial u}{\partial x} \left( \kappa(a) \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) \right).$$

書き直して

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{\rho(x)\gamma(x)} \left( \kappa(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right). \quad (3)$$

Schrödinger 方程式  $E = H(t, q, p) = \frac{1}{2m}|p|^2 + V(q, t)$  に対して

$$i\hbar \frac{\partial u(q, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_q u(q, t) + V(q, t)u(q, t).$$

(Feynman の解釈) :  $\hbar \rightarrow 0$  のとき古典力学が復活するというのが、Bohr の対応原理、これを目に見えるように表現するには? どうしたらよいか。これを院生のときに考えそれを具体化したのが、経路積分を用いた Feynman の表示式であり、この海のものとも山のものとも思えない概念に最初に重要さを認めたのが、数学教授 M.Kac だった! (オチ: 経路積分は数学者の現在用意している積分論では正当化されないことは証明される。しかし、これを用いて新しい知見が次々と得られている。数学発展の大いなる余地あり!)

Dirac 方程式  $E^2 = m^2c^4 + p^2$ ,  $E = \alpha_j p_j + \beta mc^2$  に対して

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{\partial \psi(q, t)}{\partial q_j} + \beta mc^2 \psi(q, t)$$

時間に関しては 1 階、空間方向に関しても局所的、微分作用素、でなければならない! 関係式  $E = mc^2$  が原子力、原子爆弾の基!

元  $\{\alpha_k, \beta\}$  は Clifford 関係式

$$\alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j = 2\delta_{jk} \mathbb{I}_4, \quad \alpha_k \beta + \beta \alpha_k = 0, \quad \beta^2 = \mathbb{I}_4 \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (4)$$

を満たす。これらの元の表現として Dirac 行列

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad \text{for } k = 1, 2, 3,$$

があるが、別の表現もある。ここで

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とした。

形式的な量子化の方法：これらは  $q, p, E$  に対して

$$q \rightarrow q \text{ を掛ける}, \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_j \rightarrow \frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial q_j}$$

を代入することによって『方程式』が出てきた。この時期には、Dirac によると、三流の物理学者が一流の仕事ができた。← Dirac's lecture at Florida??

考えるということ

(a) 私の失敗から：試験問題の解答例の間違いの学生に依る指摘！一体どこが問題なのか？その特定と解法ありや？ロジックとは、論理的に考えるとは？

(b) 整数論との関係？格子点の数え上げ問題、

等周不等式：何故水滴は球形をなすのか？

%%%%%%%%

一方で重要な注意：企業の経済効率を高める為にと称し、リストラ、姥捨て山、で3万人もの方が自殺するという。かつて、マザーテレサが来日した時「この国は豊かになったと聞いたが、愛に飢えている人たちがいっぱいいることをわたくしは知った。愛に飢えている人が多いこの国は、わたくしは貧しい国だと思ふ」と言われたことがある。また、後に述べる、ディーゼルの言葉を参照せよ。

チャップリンの批判（モダンタイムズ）。大量生産ベルトコンベア方式の再検討と対中国方策（大量生産方式では熟練度は必要としない、人件費が安いところに最適。それに対抗する為に日本ではロボット技術が進歩したが、それでも大量生産で勝負しなければいけないとき、どうしたか？⇒流れ作業から屋台方式への変換）

流れ作業は職人のスキルネスを「考えること」とともに喪失させてしまっている！効率を高めるという名目で「保安要員」の人員カットをしているうちに、大きな事故を起こし反って損を引き起こしている！

原理的には分かっているが工業化が難しい技術の実用化の例：

ガソリンエンジンへの思いが本田宗一郎を自動車の殿堂入り！

ヤンマーディーゼル：ルドルフ・ディーゼルの社会観のその息子オイゲンによる説明（小島直記「出世を急がぬ男たち」新潮社、pp. 238-239）

周知のように、ジェームズ・ワットの蒸気機関の発明によって「産業革命」がはじまり、今までとはまったく異なる社会状態が現れた。すなわち、大部分の人間は数千年来おかれていた状態から引き出され、今迄の仕事場――水車小屋、鍛冶場、農場などから出て工場に吸いこまれ、機械生産のリズムと資本主義的計算に従属させられ、「一言で申せば、いわゆるプロレタリアとなった。これに伴い、社会の構成も、経済の諸関係も、法律制度も、激変に、迅速かつ満足できるように是正

適合することができず、階級闘争とよばれるところの、資本主義と社会主義の対立という社会的緊張が発生した」のである。

1850年代、もっとも優秀な、もっとも高価な、最大の蒸気機関が、石炭のもつ熱量の6ないし10パーセントを利用できるにすぎなかった。小さい蒸気機関の場合、熱効率はさらに低下して2パーセント以下であった。

いいかえると、小型蒸気機関は大型にくらべ、一馬力時当り3倍から5倍石炭を多く消費した。大企業または資本家は、小企業家または手工業者にくらべ、3分の1ないし5分の1の費用で単位馬力を使うことができた。そこで、小企業家は競争できなくなり、その事業は壊滅した。反面、大型蒸気機関のかたまっているところでは、今や賃金プロレタリアと変わった多数の労働者を擁する大工業が出現し、経済的、心理的緊張が必然的におこった。『共産党宣言』は、この時期に生まれている。

「私自身(オイゲン)としては、もしも小型中型蒸気機関が大型機関と同様な効率をあげておったならば、すなわち各個小企業も大資本企業と同様に機械力の経済的恩恵を受けられたならば、決して『共産党宣言』はこんな形で書かれなかったにちがいないと考えております」

このディーゼルエンジンの小型実用化は山岡孫吉(ヤンマー)によって行なわれた。詳しくは、小島直記「エンジン一代～山岡孫吉伝～」集英社文庫1983(この本を私はまだ読んでいない)

参照 <http://www.isuzu.co.jp/semi/diesel1/history/01.html>

ロータリーエンジン [epitrochoid (外トロコイド、まゆ卵?)]: マツダのスポーツ車

定曲線  $C$  に接しながら、その上を他の曲線  $C'$  が滑らないで転がるとき、 $C'$  に対して固定された点  $X$  の軌跡  $\Gamma$  を、一般に  $C$  を底線 (base)、 $C'$  を転曲線 (rolling curve)、 $X$  を極 (pole) とするルーレット (roulette) という。特に、 $C$  が直線、 $C'$  が円周で、 $X$  が  $C'$  上にあるとき、 $\Gamma$  をサイクロイド (cycloid)、 $X$  が  $C'$  上ないときの  $\Gamma$  をトロコイド (trochoid) という。その方程式は、 $C'$  の回転角  $\theta$  を助変数として

$$x = a\theta - b\sin \theta, \quad y = a\theta - b\cos \theta$$

で表される。 $a = b$  のときがサイクロイドとなる。底線  $C$ 、転曲線  $C'$  がともに円周で、 $X$  が  $C'$  上にあるとき、 $C, C'$  が外接する場合の  $\Gamma$  を外サイクロイド (epicycloid)、内接する場合の  $\Gamma$  を内サイクロイド (hypocycloid) という。 $X$  が  $C'$  上でない場合は、上の両方の場合に対応して、それぞれ外トロコイド (epitrochoid)、内トロコイド (hypotrochoid) が得られる。 $C, C'$  の半径を  $a, b$  とし、 $C'$  の中心から  $X$  までの距離を  $c$  とすれば、 $C'$  の回転角  $\theta$  を助変数とするそれらの方程式は、

$$x = (a \pm b)\cos \theta \mp c\cos (a \pm b)/b\theta, \quad y = (a \pm b)\sin \theta - c\sin (a \pm b)/b\theta$$

となる。(複号は外るとき上、内るとき下をとる。 $b = c$  のときがサイクロイドの場合である)

知的刺激を与えるものとしての『プロジェクト X』

(ものの見方として偏向している可能性もあるが、与えられた情報から「偏向」を取り除き「もっともらしいことを嗅ぎとる事も必要。NHK が言っているのだから正しい等と言うのは「甘えの構造」。しかし、誰をどう信じて良いのか分からないという状態はしんどいものがあるな。面倒だから信じてしまって騙されたらしょうがないと思うおうか? 「目撃者」が意図的に嘘をいい、そのうちにその当人が自らの嘘を事実だと思ってしまうと、嘘が真実となってしまう。神がいればどう嘘をついても、嘘は嘘だが、神がいらない世界ではどうなるか? しかし、物事の動きを後年になって賢い歴史家が探究すれば事実は現れるかもしれない。唯一神はいないようだが、少なくとも中国では「司書」ができるだけ正確な記録を残すために命をかけてきた文化がある。翻って日本では?)

<http://www.nhk.or.jp/projectx/library/library.html>

第 62 回 2001 年 7 月 24 日放送「起死回生 アラビアの友よ」～巨大油田に挑んだ技術者たち～

第 61 回 2001 年 7 月 17 日放送「炎のアラビア 一発必中 油をあてる」 wavelets

第 59 回 2001 年 7 月 3 日放送「兄弟 10 人 海の革命劇」～魚群探知機・ドンピリ船の奇跡～ sonar system

第 29 回 2000 年 11 月 14 日放送「ルマンを制覇せよ」～ロータリーエンジン 奇跡の逆転劇～

第 28 回 2000 年 11 月 7 日放送「ロータリー 47 士の闘い」～夢のエンジン・廃墟からの誕生～ rotary engine

第 22 回 2000 年 9 月 12 日放送「海底 3000 メートルの大捜索」～H2 ロケットエンジンを探せ～ classical mechanics

第 9 回 2000 年 5 月 23 日放送「海底ロマン！深海 6,500M への挑戦」～潜水調査船・世界記録までの 25 年～ pressure

日本は、原理が与えられているとき、それを実用化するための創意工夫が得意なのは。新しい原理を見出すことはどうだろうか？ problem solver と problem maker、trouble maker と trouble shooter。

新しく創られた概念があるとき、どの国でもそれを理解できる人は少ないだろう。特に、日本語という、一体感を重んじるどちらかという情動的な言語を使っている以上、それを人に伝えるところで大いなる困難があるように思われる。そこで、日本では今迄通り、既に原理的に与えられたものを磨き挙げて実用化することに特化した方が良いのかもしれない。勿論、新しい概念を考え出す人はいるのだが、その人々には日本でのその概念の直接的な受容を期待し世間の不受容に失望するより、外国で評価されるようにと便宜を図り、それから日本で布教するようにと忠告した方がよい。この戦略の問題点は、一般的に「ものの評価」に関しての能力が鍛えられない点、新しい概念やものの考え方をする人へのいわれのない偏見の公認化、にあるが、それは差し当たり仕方ないとしよう。

トランジスターの発明の物語り（菊池誠）← 全く新しい原理を見出すことの重要性とその時の軌跡の一つの例、今迄の方式では駄目だという判断をいつするか？

（真空管方式でない全く新しい方式の増幅器をつくるのが絶対に必要であるが、そのためには）物理学の理解を深めないと進めなくなる。

（一応一緒にやっている）この連中はしのぎを削っているのです。腹の中では相手を好いていないのだけれど、一流中の一流の男達が高度の知識を駆使して仕事を進め、その上にさっきお話ししたケリ - のような男がいるわけです。私は間もなく日本にもこういう仕事がかような形、かようなドラマで生まれてくることを期待しています。

特に大切だが「成功体験」があると極めて難しい！ ← 「失敗学会」 [www.shippai.org/shippai/html/](http://www.shippai.org/shippai/html/)

リール、電動リールは発明なのか実用化なのか？ スキーの安全器具（カンダハ、...） ← 機械科の人々の趣味的な働き場の一つでは

## 2 弦の振動（ヴァイオリン）

### 2.1 波動方程式の由来

張力  $K$  で引っ張られた長さ  $L$  の両端を固定した弦をとり、この弦を摘んで振動させることを考える。ここで重力の影響は無視する。

弦の線密度を  $\sigma$  とし、弦の左端に原点を取りそれから測った長さ  $x$  の地点での弦の素片の垂直方向へのずれを  $q(x, t)$  とする。この場所での弦の素片は

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial q(x, t)}{\partial x}\right)^2} dx$$

に伸びている。その結果ここに

$$\kappa \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial q(x, t)}{\partial x}\right)^2} - 1 \right] dx \sim \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial q(x, t)}{\partial x}\right)^2$$

なる位置エネルギーが蓄えられる。故に、弦全体としての位置エネルギーは

$$P[q] = \kappa \int_0^L \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial q(x, t)}{\partial x}\right)^2} - 1 \right] dx \quad (5)$$

となる。また、弦の運動エネルギーは

$$K[q] = \frac{\sigma}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial q(x, t)}{\partial t}\right)^2 dx \quad (6)$$

となる。

「古典力学的」には「最小作用原理」で『作用 = 運動エネルギー - 位置エネルギー』の「臨界点 (critical point)」が実際におこる運動を記述するとされる。

そこで、関数  $\{q\}$  たちから定まる汎関数  $J[q] = K[q] - P[q]$  の「停留点 (stationary point)」を求めてみる。

微分、偏微分、全微分、極値 大学入りたてのとき、多変数関数の Taylor の定理を考えたが、覚えているだろうか？ 2 変数関数  $f$  に対して

$$g(t) = f(a + t(x - a), b + t(y - b)) \quad \text{と} \quad \text{おいて} \quad g(t) = g(0) + tg'(0) + \frac{t^2}{2!} g''(\theta_t) \quad (0 < \exists \theta_t < 1)$$

かつ

$$f(x, y) - f(a, b) = g(1) - g(0) = g'(0) + \frac{1}{2} g''(\theta) \quad (0 < \exists \theta < 1)$$

に注意する。

$$g'(0) = (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = (x - a) f_x(a, b) + (y - b) f_y(a, b),$$

$$g''(\theta) = (x - a)[(x - a) f_{xx} + (y - b) f_{yx}] + (y - b)[(x - a) f_{xy} + (y - b) f_{yy}](a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))$$

$$= (x - a, y - b) \begin{pmatrix} f_{xx}(\ast) & f_{yx}(\ast) \\ f_{xy}(\ast) & f_{yy}(\ast) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

だから、2 変数関数の Taylor の定理は

$$f(x, y) = f(a, b) + [(x - a) f_x(a, b) + (y - b) f_y(a, b)] + \frac{1}{2!} \left[ (x - a, y - b) \begin{pmatrix} f_{xx}(\ast) & f_{yx}(\ast) \\ f_{xy}(\ast) & f_{yy}(\ast) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \right]$$

ここで  $(\ast)$  は  $(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b))$  の略記。この式を用いて、もし  $(a, b)$  が臨界点のとき、その点が極値であるかどうかを「Hessian 行列の符号」によって調べられるところ、が重要な点であった ( $f'(x_0) = 0$  なる点  $x_0$  で  $f''(x_0) > 0$  ならば極小値、等々)。これらの概念を、無限次元へまでどう拡張するか？そもそも無限次元とは一体何か？

質問：何故  $g(t)$  を考えたのか？これは、1 変数のときの微分係数の考え方を 2 変数以上にすると、特に偏微分係数のときどう考えたかを思い出すとよい。即ち、2 変数関数で  $(a, b)$  での  $x$ -方向への微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = f_x(a, b)$$

と考えたが、これは  $(a+h, b) = (a, b) + h(1, 0)$  と解釈すると

$$\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \frac{f((a, b) + h(1, 0)) - f(a, b)}{h}.$$

同様に  $y$ -方向への微分係数は

$$\frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} = \frac{f((a, b) + k(0, 1)) - f(a, b)}{k}.$$

より一般に  $(h, k)$ -方向への微分係数は

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((a, b) + t(h, k)) - f(a, b)}{t} = hf_x(a, b) + kf_y(a, b).$$

行列の定値性について、

**定義 2.1**  $n \times n$  行列  $H$  が正定値とは、 $\|u\| \neq 0$  なる任意の  $u$  に対し  $(u, Hu) > 0$  となることである。

**定義 2.2**  $\mathbb{R}^n$  上の 2 次形式を

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^n h_{ij} u_i u_j, \quad H = (h_{ij}), \quad h_{ij} = h_{ji} \in \mathbb{R}, \quad u = {}^t(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$$

とする。

- (i)  $\|u\| \neq 0$  なる任意の  $u$  に対し  $Q(u) > 0$  ならば、 $Q$  は正値という。
- (ii)  $\|u\| \neq 0$  なる任意の  $u$  に対し  $Q(u) < 0$  ならば、 $Q$  は負値という。
- (iii) ある  $u, v \in \mathbb{R}^n$  があって  $Q(u) > 0 > Q(v)$  となるとき、 $Q$  は不定符号という。
- (iv)  $\det H \neq 0$  なるとき  $Q$  は正則という。

$n$  次行列  $H$  の固有多項式  $\Phi(\lambda) = \det(\lambda I - H)$  の根を、 $H$  の固有値という。← 代数学の基本定理 (Gauss)

**定理 2.1** 2 次形式  $Q(u) = (u, Hu)$  に対して以下は互いに同値である。

- (a)  $u = 0$  で  $Q$  は狭義の最小値 0 をとる。
- (b)  $u = 0$  で  $Q$  は狭義の極小値 0 をとる。
- (c)  $Q$  は正値である。
- (d)  $H$  の固有値はすべて  $> 0$  である。
- (e)  $H$  のすべての主小行列式  $D_k$  は  $> 0$  である。即ち、

$$D_k = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix} > 0 \quad (1 \leq k \leq n).$$

正定値行列 (或いは、分解不能な非負行列) に対する Perron-Frobenius の定理: 最大の固有値に対応する固有ベクトルは正 (節なしの振動に相当)。ところで

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の最大及び最小の固有値を求めよ。(ここでは分解不能行列の定義も述べないが、気になる人は岩掘長慶編「線形代数学」裳華房を参照のこと)

## 2.2 Gateaux 微分と Fréchet 微分 (偏微分と全微分)

定義 2.3  $X, Y$  を線形位相空間とする。  $U \subset X$  を開集合とし、  $f: U \rightarrow Y$  とする。  $f$  が  $x \in U$  で Gateaux 微分  $df(x, y)$  を持つとは

$$\left. \frac{d}{dt} f(x + ty) \right|_{t=0} = df(x, y) \quad \forall y \in Y$$

となることである。

定義 2.4  $X, Y$  を線形位相空間とする。  $U \subset X$  を開集合とし、  $\phi: U \rightarrow Y$  とする。  $U$  を  $X$  での 0 近傍とする。  $\phi$  が 0 で水平的とは、 0 の  $Y$  における任意の近傍  $V$  に対し 0 の  $X$  における近傍  $U'$  と関数  $o(t)$  があって

$$\phi(tU') \subset o(t)V.$$

定義 2.5  $X, Y$  を線形位相空間とする。  $U \subset X$  を開集合とし、  $f: U \rightarrow Y, x_0 \in U$  とする。  $f$  が  $x_0$  で Fréchet 微分可能とは、線形連続写像  $A: X \rightarrow Y$  があって

$$f(x_0 + y) = f(x_0) + Ay + \phi(y)$$

とするとき、  $\phi$  が 0 で水平的なることをいう。

無限次元空間の例:  $\mathbb{R}^n \ni x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n)$  に対しノルム (絶対値概念の拡張) を  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$  と定める。  $d(x, y) = \|x - y\|$  とするとこれは距離概念を与えることは Schwarz 不等式

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\| \|y\|$$

から従う。これより

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \iff \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

が導かれるからである。

Schwarz 不等式の証明には scalar(inner) product

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

という概念が有効であった。(2次形式の性質)

$$\ell^2 = \{x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \mid \|x\| = (x, x)^{1/2} < \infty\}$$

とすると、この空間は Hilbert 空間をなし、  $n$  次元 Euclid 空間の  $n \rightarrow \infty$  の極限とも考えられる。

局所コンパクトではない! 即ち、Bolzano-Weierstrass の補題が成立しない。 Hilbert 空間の閉単位球はコンパクトではない!

例:  $x^{(n)} = (0, \dots, \overbrace{0, 1, \dots}^n, \dots)$  とすると  $\|x^{(n)}\| = 1$  であるが  $\|x^{(n)} - x^{(m)}\| = \sqrt{2} (n \neq m)$  だから、収束する部分列を持たない。

%%%%%%%%

ここで「命題の否定」について述べておく。  $\Leftarrow$  主張明確にする道具としての論理記号!

## 2.3 論理記号

### 2.3.1 論理記号を用いた幾つかの数学的叙述

#### Cauchy 列について

$\{a_n\}$  が Cauchy 列である  $\iff$  任意の  $\epsilon > 0$  に対してある  $n_0$  があって

$$m, n \geq n_0 \text{ なる限り } |a_m - a_n| < \epsilon \text{ となる}$$

$$\iff (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon)$$

$\{a_n\}$  は Cauchy 列とならない  $\iff (\exists \epsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists m, n \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0 \text{ かつ } |a_m - a_n| \geq \epsilon)$

$\iff$  ある  $\epsilon > 0$  に対して、どんな  $n_0$  をとっても

$$m, n \geq n_0 \text{ を満たす } m, n \text{ があって } |a_m - a_n| \geq \epsilon \text{ となる}$$

#### 連続性について

$f$  が  $U$  上で連続である  $\iff (\forall \epsilon > 0)(\forall x \in U)(\exists \delta > 0)(\forall y \in U)(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$

$f$  は  $U$  上で連続ではない  $\iff (\exists \epsilon > 0)(\exists x \in U)(\forall \delta > 0)(\exists y \in U)(|x - y| < \delta \text{ かつ } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon)$

$\iff$  ある  $\epsilon > 0$  及びある  $x \in U$  に対して、どんな  $\delta > 0$  をとっても、

$$|x - y| < \delta \text{ を満たす } y \in U \text{ があって } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon \text{ となる}$$

#### 一様連続性について

$f$  が  $U$  上で一様連続である  $\iff (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in U)(\forall y \in U)(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$

$f$  は  $U$  上で一様連続ではない  $\iff (\exists \epsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in U)(\exists y \in U)(|x - y| < \delta \text{ かつ } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon)$

$\iff$  ある  $\epsilon > 0$  に対して、どんな  $\delta > 0$  をとっても、

$$|x - y| < \delta \text{ を満たす } x, y \in U \text{ があって } |f(x) - f(y)| \geq \epsilon \text{ となる}$$

### 2.3.2 命題論理と述語論理

#### 命題論理について

$$(\neg A) \vee B \equiv (A \Rightarrow B), \quad \neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg((\neg A) \vee B) = A \wedge (\neg B),$$

$$\neg(\neg(A \Rightarrow B)) \equiv \neg(A \wedge (\neg B)) \equiv (\neg A) \vee B \equiv (A \Rightarrow B)$$

#### 述語論理について

$$\text{「}\forall x P(x)\text{」の否定は「}\neg(\forall x P(x)) \equiv (\exists x)(\neg P(x))\text{」,}$$

$$\text{「}\exists x P(x)\text{」の否定は「}\neg(\exists x P(x)) \equiv (\forall x)(\neg P(x))\text{」,}$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)),$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$$

%%%%%%%%

しかし、直交性があるのが Hilbert 空間の特徴！無限次元空間で直交性がないものがある。parallelogram 法則:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

ノルム空間のノルムが上の等式を満たすことが、そのノルムが内積かきたものかどうかの判定条件である。実際、 $C[a, b]$ ,  $\|u\| = \max_{x \in [a, b]} |u(x)|$  は Banach 空間だが Hilbert 空間ではない。

また、 $C[a, b]$  に  $\|u\| = \int_a^b |u(x)| dx$  でノルムを入れ、これを完備化したとき現れる関数は何か？これを理解する為には新しい積分論が必要になった（これは有理数からはみ出ている数  $\sqrt{2}$  を理解する為に実数という新しい概念が必要になったこと、代数方程式  $x^2 + 1 = 0$  の解を理解する為に複素数が必要になったことと比較せよ） $\Leftarrow$  概念の拡張！

## 2.4 波動方程式の導出

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} J(q + \epsilon\phi) \right|_{\epsilon=0} &= \sigma \int_0^L q_t \phi_t dx \Big|_{t=0}^{t=T} - \iint \sigma q_{tt} \phi dx dt \\ &\quad - \kappa \int_0^T \frac{q_x \phi_x}{\sqrt{1+q_x^2}} dt \Big|_{x=0}^{x=L} + \iint \kappa \left( \frac{q_x}{\sqrt{1+q_x^2}} \right)_x \phi dx dt \end{aligned}$$

$\phi \in C_0^\infty([0, L] \times [0, T])$  とすると、境界上で

$$\sigma \int_0^L q_t(x, t) \phi_t(x, t) dx \Big|_{t=0}^{t=T} = 0, \quad \frac{\kappa}{2} \int_0^T \frac{q_x \phi_x}{\sqrt{1+q_x^2}} \Big|_{x=0}^{x=L} = 0$$

を用いて

$$\iint \left[ \sigma q_{tt} - \frac{\kappa}{2} \left( \frac{q_x}{\sqrt{1+q_x^2}} \right)_x \right] \phi dx dt = 0.$$

上の式が任意の  $\phi \in C_0^\infty([0, L] \times [0, T])$  に対して成立しているとする、

$$\iint F(x, t) \phi(x, t) dx dt = 0 \implies "F(x, t) = 0"$$

に注意して  $q$  が

$$\sigma q_{tt} - \kappa \left( \frac{q_x}{\sqrt{1+q_x^2}} \right)_x = 0$$

の解であることが分る。

特に  $|q_x| \leq 1$  とすると

$$\sqrt{1+q_x^2} - 1 \sim \frac{1}{2} q_x^2 \quad \text{或いは} \quad \frac{q_x}{\sqrt{1+q_x^2}} \sim q_x$$

と考えると良いだろうから、

$$\sigma q_{tt} - \kappa q_{xx} = 0 \tag{7}$$

が得られる。これを波動方程式という。

膜の場合は

$$P[u] = \iint [\sqrt{1+u_x^2+u_y^2} - 1] dx dy$$

## 2.5 妙なる音？

さて、簡単のために  $\sigma = \kappa = 1$  とおいて、(7) の変数分離形  $q(x, t) = \phi(t)v(x)$  の解を探してみよう：

$$\phi''(t)v(x) = \phi(t)(Pv)(x) \implies \frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = \frac{(Pv)(x)}{v(x)}, \quad ' = \frac{d}{dt}, \quad P = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

これより、 $t, x$  とに無関係な定数  $\lambda$  があって

$$\text{すべての } t \text{ に対して } \frac{\phi''(t)}{\phi(t)} = \lambda, \quad \text{すべての } x \text{ に対して } \frac{(Lv)(x)}{v(x)} = \lambda$$

となる。

そこで、一般に

$$P(x, \partial_x)u(x) = \lambda u(x)$$

と境界条件を満たすものを探すことを考え、 $(\lambda, u)$  を spectre, eigenfunction という。

例えば、

$$-\phi''(t) = \lambda\phi(t), \quad \phi(0) = \phi(L) = 0$$

ならば

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad \phi_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right).$$

この固有関数  $\{\phi_n\}$  が沢山あってそれを用いると問題が易しくなるのが Fourier 展開の根本原理。

箱領域  $\Omega = (0, L) \times (0, M)$  で

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x, y) = \lambda u(x, y), \\ u(x, y)|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

を考え、 $u(x, y) = v(x)w(y)$  なる形の解を求めると

$$-(v_{xx}w + vw_{yy}) = \lambda vw \implies -\left(\frac{v_{xx}}{v} + \frac{w_{yy}}{w}\right) = \lambda,$$

故に、

$$-\frac{v_{xx}(x)}{v(x)} = \lambda + \frac{w_{yy}(y)}{w(y)}$$

なので、 $x$  と  $y$  に無関係な定数

$$-\frac{v_{xx}(x)}{v(x)} = \mu, \quad -\frac{w_{yy}(y)}{w(y)} = \lambda - \mu$$

がある。

$$-v_{xx}(x) = \mu v(x), \quad v(0) = v(L) = 0 \implies \mu_\ell = \frac{\ell^2\pi^2}{L^2}, \quad v_\ell(x) = \sin\left(\frac{\ell\pi}{L}x\right),$$

かつ

$$-w_{yy}(y) = (\lambda - \mu)w(y), \quad w(0) = w(M) = 0 \implies (\lambda - \mu)_m = \frac{m^2\pi^2}{M^2}, \quad w_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{M}y\right),$$

となるから

$$u_{\ell m}(x, y) = v_\ell(x) \otimes w_m(y), \quad -\Delta u_{\ell m}(x, y) = \left(\frac{\ell^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{M^2}\right)u_{\ell m}(x, y).$$

ここにスペクトルとして平方数が出てきた！

紀元前 2000 年頃チグリス川とユーフラテス川の間で生まれたメソポタミア文明、富は平方量（土地の面積に比例して富）ある整数の平方が他の整数の平方の和に分割できるか？を問うた。バビロニアの粘土版「プリンプトン 322」に 15 個のピタゴラス数<sup>3</sup> (3,4,5), (5,12,13) etc、が書かれていたという。ピタゴラス学派はこの数の性質を『直角三角形の斜辺の平方は他の二辺の平方の和に等しい』と幾何的に表現し、証明した。「知恵を愛す」という意味の哲学 (philosophy) と、「学ばべき学科」の意味の数学 (mathematics) という言葉もピタゴラスその人による造語と信じられている？

調和振動子のスペクトル：

<sup>3</sup>後にそう言われるようになったのだが、面倒なのでそう言おう

定理 2.2 作用素  $H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1$  に対して

$$\Omega_0(x) = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}, \quad \Omega_n(x) = (n!)^{-1/2} (b^*)^n \Omega_0(x), \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( x + \frac{d}{dx} \right)$$

とおくと、以下が成立する。

- (a)  $\{\Omega_n\}_{n=0}^\infty$  は  $L^2(\mathbb{R}, dx)$  の正規直交底をなす,
- (b)  $H\Omega_n = (2n)\Omega_n$ ,
- (c)  $\text{Spec}(H) = \{0, 2, 4, \dots\}$ .

直交多項式の例：単項式

$$1, s, s^2, s^3, \dots,$$

を区間  $(a, b)$  上で測度  $m(ds)$  で直交化したもの

$$P_0(s) = \text{constant}, P_1(s), P_2(s), \dots,$$

$$\int_a^b P_i(s) P_j(s) m(ds) = \delta_{ij}$$

を Tchebyshev system of polynomials という。

Hermite 多項式  $H_n(x)$ 、 $(-\infty, \infty)$ ,  $m(ds) = e^{-s^2} ds$ ;

$$H_n(x) = (-1)^n e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Legendre 多項式  $P_n(x)$ 、 $(-1, 1)$ ,  $m(ds) = ds$ ;

$$P_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

Laguerre 多項式  $L_n(x)$ 、 $(0, \infty)$ ,  $m(ds) = e^{-s} ds$ ;

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} \frac{(-x)^j}{j!}$$

## 2.6 膜の振動

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$  上での膜の振動方程式

$$\begin{cases} u_{tt} - \left( \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right)_x - \left( \frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right)_y = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1 \end{cases}$$

## 2.7 格子点問題

$C_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$  を半径  $R$  の円板、 $A(R) = C_R$  内にある格子点の個数 とするとき、

$$A(R) = \pi R^2 + o(R^\lambda)$$

となる指数  $\lambda < 1$  の下限を求めよ？面積に関する簡単な計算で、

$$|A(R) - \pi R^2| \leq 3\sqrt{2}\pi R \quad A(R) = \pi R^2 + o(R)$$

となるからである。

$$A(R) = \pi R^2 + o(R^{2/3} \log R) \quad \text{I.M. Vinogradov 1976,}$$

$$A(R) > \pi R^2 + o(R^{278/429} (\log R)^{1384/429}) \quad \text{W.G. Nowak 1985.}$$

## 2.8 Fermat の問題

A.D. Aczel “Fermat’s Last Theorem (unlocking the secret of an ancient mathematical problem) 1996”  
「天才数学者たちが挑んだ最大の難問」ハヤカワ・ノンフィクション文庫

$x^n + y^n = z^n$  は、 $n$  が 2 より大きいとき、自然数解を持たない。

注意：整数論では簡単に述べられて証明が難しい問題が多い。最近 1844 年の Catalan 予想

$x^u - y^v = 1$  を満たす整数解  $(x, y, u, v)$ ,  $x, y > 0$ ,  $u, v > 1$  は  $x^u = 3^2, y^v = 2^3$  に限る  
が解けた。

## 2.9 音だけからドラムの形を推定できるのか？

$$N(\lambda) = \#\{j \mid \lambda_j \leq \lambda\}$$

とすると、適当な条件下で

$$N(\lambda) = c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}), \quad c_0 = (2\pi)^{-n} \iint_{\Omega \times \{\xi \mid |\xi| \leq 1\}} dx d\xi.$$

これを、Lorentz の講演を聴いて Weyl が考えたことを敷衍して述べたのが

M. Kac ”One can hear the shape of drum?”

である。

## 2.10 逆問題

ひびの位置や形状を音だけから判定できるか？

## 考えるということ、それを人に伝えるということ

問題 [1] (詰め込み): 縦 4、横 2000 の細長い長方形に詰めることの出来る単位円の個数は最大限幾つか?  
[ Graham なる人物が 2011 個は詰められることを示している ]

問題 [2]:  $f$  を 0 の近くで定義された  $n$  回連続微分可能で  $f(0) = 0$  なる関数とする。このとき

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left[ \frac{f(x)}{x} \right] = \frac{1}{k} f^{(k)}(0) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

を示せ。

略解 (としたが、実は間違っているもの!): まず l'Hospital の法則を思い出しておこう。

定理 [l'Hospital の法則]  $f(x), g(x)$  は  $x = a$  の近くで連続で、 $x = a$  以外では微分可能であるとする。更に、 $f(a) = g(a) = 0$  であり、 $x = a$  以外では  $g'(x) \neq 0$  とする。このとき、もし

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

となる (即ち、上の極限が存在する) ならば、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

である。

$g(x) = f(x)/x$  とおく。条件  $f(0) = 0$  より l'Hospital の法則を用いて  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = f'(0)$  となる。即ち、 $k = 1$  の場合は ok。  $k \geq 2$  で  $\lim_{x \rightarrow 0} g^{(k-1)}(x) = \frac{1}{k} f^{(k)}(0)$  が成立すると仮定する。  $f(x) = xg(x)$  に対し Leibnitz の公式より  $f^{(k)}(x) = xg^{(k)}(x) + kg^{(k-1)}(x)$  となる。故に、 $g^{(k)}(x) = \frac{f^{(k)}(x) - kg^{(k-1)}(x)}{x}$  となるが、帰納法の仮定より  $f^{(k)}(0) - k \lim_{x \rightarrow 0} g^{(k-1)}(x) = 0$  となる。そこで、再度 l'Hospital の法則が適用出来て  $\lim_{x \rightarrow 0} g^{(k)}(x) = f^{(k+1)}(0) - k \lim_{x \rightarrow 0} g^{(k)}(x)$  となり、 $\lim_{x \rightarrow 0} g^{(k)}(x) = \frac{1}{k+1} f^{(k+1)}(0)$  が求まる。  $\square$

問題 [3]: (Fermat の定理の行列版)

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}$$

とする。  $n$  を自然数として、  $X, Y, Z \in SL(2, \mathbb{Z})$  についての方程式  $X^n + Y^n = Z^n$  を考える。なるべく多くの自然数  $n$  について、解  $X, Y, Z$  を求めよ。

問題 [4]: 配付した菊池誠「世界の生活を変えたトランジスタ --- その誕生までのドラマ ---」の読後感を書いて下さい。

問題 [5]: 今回及び次回の私の話を聴いての感想や、そもそもこの講義「機械知能システム学創造」に数学者を呼ぶと言うことについての意見もどうぞ。

%% %%

上の問題 1 については秋山仁氏の解説「離散数学のすすめ」から採取した。より詳しくは、秋山仁、R. Graham 著「離散数学入門」朝倉書店を参照せよ。問題 3 は第 1 回東工大数学コンテストに出題し、正解を作るのに出題者はどれほど苦労したことが。

### 3 追記：学生諸君からの感想に答えて

今回の講義の目的は何だったのか？一体何を言いたかったのか？という感想があった。一応私の立場をもう一度説明しておこう。

考えるということ、現象を数量的に捉えるとはどういうことか？ ← 微分方程式を用いる考え方。

[例] インシュリンのコントロールの適切さを血糖値で調べるためにはどうしたらよいか？その考え方をを用いて、コレステロール値の基準をどう決めていったら良いのか？多分数理モデルが必要になる。科学的説明なしに、数値で大騒ぎする空しさへの警告！特に「統計的処理」については、その処理をすることがその問題に対して意味があることなのか、考えなければならない。「統計的処理」ができるためには「ある種の仮定」が満たされているかどうか確かめる必要があるはずだが、しばしばその「仮定」がはっきりしない場合、はっきりしても「調べられない」可能性がある。出てきた数字を鵜呑みにして、ある事柄に対してかなり盲目的に数値が絶対的な意味を持つものとする危険性を注意した。事の序でに、試験の点数に一喜一憂することの無意味さにも気がついて欲しい！

「数学的に考えること」の技術的側面を「音」の「数理的な理解」をもとに説明した。

音を表す波動方程式、熱の伝播を表すとされる熱方程式、量子力学にあらわれる Schrödinger 方程式、これらから変数分離の方法で共通する方程式  $-\Delta u(x) = \lambda u(x)$  (eigen-value problem) が求まる。全く別々の現象を『一つの言葉で統一的に表現し理解できる』ことの素晴らしさであり、「数学的思考」の凄さを説明したつもりだが。

又、数学教育に数学者として関わることの意味は、技術としての数学の伝達では無いとさえ考えている！むしろ、ある事柄を「腑に落ちて分る」ということの実感体験ツアーのコンダクターになりたいのだが、ツアー参加者が集まらないのかもしれない。今回は折角、集客までを設けて下さったのに、ということになるのは残念。

更に、数学的思考の範囲内では、自分が分ったことを他人にもほぼ雑音なしに伝え得る機能を持っている。但し、「馬耳東風」だと、駄目だろうなあ。「自分の考えを他人にもほぼ雑音なしに伝えられる」ことの実感体験をどういう形でしたらよいのか？数学科の中では卒研の通称「セミナー」がそれに相当するが、必ずしも思うようにはならないものである。

現実の設計ではコンピュータを用いる計算をするだろう。これは、「無限次元的なもの」を「有限次元的なもの」で代用しているはずであろう。本当に正しい計算をしているのだろうか？たまには疑ってみて欲しいものである。コンピュータは命令されたままを計算しているのであって、命令が正しいかどうかをコンピュータ自身が判断している訳では無いのだから。

[例] 有限次元空間では成立する事柄が、無限次元では成立しなくなる。例えば、『有界な数列は収束する部分列を含む』という性質は、 $\ell^2 = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) \mid \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty\}$  なる空間では成立しない。これが、具体的にどんな不都合をもたらすかの説明はかなり難しいと思われる。

例えば、安定性が高い飛行機は当然小回りは効かない。今迄はもっぱら安定性を旨としてきたが、不安定なものでもうまく制御できれば操縦性能がよい飛行機がつけられる可能性がある。このような制御には、正に無限次元として扱わなければならないとそう簡単に有限次元計算のみで事足りるとはできないだろう。

ひとまず疑おう、当たり前と思われていることを：「ほんまかいな」「高々差し当たりそう考えておこうとしただけでは」と疑ってみよう。昔は太陽が地球の周りを廻っていた。しかし、コペルニクス的転回で、地球が太陽の周りを廻っているとなった。ところで、アメリカには未だにダーウインの進化論を信じない人々がいるとのこと。これもまた何とも頑固（だろうな？）で面白い。

菊池誠氏の論文

「世界の生活を変えたトランジスタ—その誕生までのドラマ—」 学士会会報 2004-I 第 844 号 pp.84-104

を何故配付したか<sup>4</sup>！特に「新しいこと」を考えることの難しさ、楽しさ。そして「原理原則に立ち戻って考える」ことの重要性を認識してもらうためである。この文章に対して、「トランジスタが世界を変えただ！」（電気じゃない機械だろうが、大切なのは）と思ったがという感想もあった。この反応は稚気に富んでいるとも言えるべきか。

何かの「真似」をし性能をあげ小さくしている限り大きな失敗は無いし、それでよいのだとしていた時代から少しずつ時代は変わりつつある。これは日本のいままでの改良型から創造型への変化を意味するのだろう。その結果、類例がない事柄を目指す限り失敗も多いのが当たり前で、それをどう評価するのか、が大切になってきた。やっと日本でも失敗の重要性が認識されつつあり、失敗学会が設立されたのは結構だが、その学会自身の組織の悪しき官僚化をどう妨げるかを見守りたい。

失敗学でも「元に戻って考える」ことの重要性が強調されている。特に「成功体験」が人の感受性を「頑な」にし、また新しい事への試みを逡巡させる。「大きな経済力」を持ってしまった現在、日本的一様化「皆と同じに」は極めて危険なことなのだ。しかし、「皆と同じが安心」という精神的構造を長らく持ち続けてきた民族がそう簡単に趣旨替えできるとも思われぬ。「皆と同じでない人や組織」の存在を許容できる人や集団をどういう形で確保するか。組織としての健全性は、意識的に異質な者を加えておけるかどうか、かもしれない。

昔、白川英樹氏の伝導性プラスチックの研究を無視し、つまらないとしてきた実績を持つ東工大という組織がどう変わるか？

ここが、これから「大変な時代」を工学をもって世の中をわたって行く若い人々の工夫のしどころ。それをうまくやってくれないと私の年金さえも怪しくなるー。

2004.01.31 追補

---

<sup>4</sup>この「論文」は読むに値すると思いますが、興味があっても、手に入れにくい人はご連絡下さい