# 偏微分方程式系と非可換解析

Systems of Part.Diff.Eqns and Non-commutative Analysis

(研究課題番号　10640201)

平成１０年度 – 平成１２年度科学研究費補助金（基盤研究(C)2）

研究成果報告書

平成１３年３月


研究代表者　　井上　淳

(東京工業大学大学院理工学研究科教授)

研究組織：

研究代表者　　井上　淳（ 東京工業大学大学院理工学研究科教授)

研究分担者

野村祐司（東京工業大学大学院理工学研究科助手)
磯部健志（東京工業大学大学院理工学研究科助手)
村田　実（東京工業大学大学院理工学研究科教授)
伊藤秀一（東京工業大学大学院理工学研究科助教授)
盛田健彦（東京工業大学大学院理工学研究科助教授)

| | | |
|---|---|---|
| | 平成１０年度 | １４００千円 |
| 研究経費： | 平成１１年度 | １２００千円 |
| | 平成１２年度 | ５００千円 |

**研究内容概略**：

Feynman の経路積分は存在しない測度を用いているとする悪評もあるが、Schrödinger 方程式の基本解の積分表示とみなすことができる（一つの数学的正当化が藤原によって与えられている)。ところで、Schrödinger 方程式と同様の考察で Dirac 方程式の経路積分表示ができるか、というのが Feynman の問題であった。

Martin の試みがあったが、それとは独立に Berezin は光子と電子を同等に扱う基盤として新しい変数 (Grassmann) を用いた解析の必要性を提唱した（これは Feynman 自身の予測「Dirac 方程式の経路積分表示には、例えば４元数を用いた解析が必要になろう」に対応する)。

多くの人々の Banach-Grassmann 代数を "基礎体" とする空間上の微積分ではなく、筆者は前田と共に１０年程前に加算無限個の生成元を用いた Fréchet-Grassmann 代数を "基礎体" とする空間（スーパー空間といい $\mathfrak{R}^{m|n}$ と書く）上の微積分、実解析を作り上げた。

これを用いて、定数係数の偏微分方程式系の Feynman 流の基本解の作り方、即ち、偏微分方程式系に対応する Hamilton-Jacobi 方程式を定義し、その解を相関数とするスーパー空間上の Fourier 積分作用素で偏微分方程式系の基本解を表示した（配位空間上の関数を要素とする行列を如何にして Hamilton 関数とみなし、それから古典力学を構成するかが本質的問題。その Hamilton 方程式の解の構成、評価には Fréchet-Grassmann 代数を "基礎体" として用意したことが役立つ)。更に、最も簡単な変数係数偏微分方程式系の例として、電磁気ポテンシャルを付け加えた Weyl 方程式のパラメトリックスを上で述べた方法で構成した。

これらとは全く独立の問題であるランダム行列理論へのスーパー解析の応用が 1983 年 Efetov によって見い出され、多くの結果が物理学者によって得られている。但し、彼等のスーパー行列を用いた積分表示、鞍点法を用いた計算の数学的な意味付けは不十分であった。野村裕司の協力を得て、有名なガウス型ランダム行列に対する Wigner の半円則のスーパー解析を用いた物理学者による導出に対して厳密な数学的意味を与えた。ランダム行列理論と完全可積分系との関連はまだ手がつかないでいる。

研究成果報告

過去３年間「偏微分方程式系と非可換解析」なる題目で研究及び教育に携わってきた。

以下に収録した文献を記す。

# 参考文献


[1] A. Inoue: *On a construction of the fundamental solution for the free Weyl equation by Hamiltonian path-integral method —an exactly solvable case with "odd variable coefficients"*, Tôhoku J.Math.50(1998), pp. 91-118.

[2] ______: *On a construction of the fundamental solution for the free Dirac equation by Hamiltonian path-integral method —the classical counterpart of Zitterbewegung*, Japanese J.Math.24(1998), pp. 297-334.

[3] ______: *The first term of spectral asymptotic formula related to the continuum mechanics– generalizations of Weyl's Theorem*, pp. 184-192, in "Navier-Stokes equations: theory and numerical methods" (ed. L. Salvi), Longman. 1998.

[4] ______: *On a "Hamiltonian path-integral" derivation of the Schrödinger equation*, Osaka J.Math.36(1999), pp. 111-150.

[5] ______: *A partial solution for Feynman's problem: a new derivation of the Weyl equation*, Mathematical Physics and Quantum Field Theory, Electron.J.Diff.Eqns., Conf.04, 2000, pp. 121-145. http://ejde.swt.edu

[6] ______: *On a construction of a good parametrix for the Weyl equartion with external electro-magnetic potentials by "super Hamiltonian path-integral method"*, preprint.

[7] A. Inoue and Y. Nomura: *Some refinements of Wigner's semi-circle law for Gaussian Random Matrices using superanalysis*, Asymptotic Analysis 23(2000) pp. 329-375.

[8] A. Inoue: *What is superanalysis? Is it necessary? -What is done, what is left open*, preprint.