

V 類 T 組実力調査テスト解答例 2005.04.13

問題 (I) : (i) $\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}$ は無理数であることを証明せよ。

(ii) a, b, c を整数とする。もし $a\sqrt{2} + b\sqrt{5} + c = 0$ となるならば、 $a = b = c = 0$ なることを示せ。 a, b, c を整数とする。もし $a\sqrt{2} + b\sqrt{5} + c = 0$ となるならば、 $a = b = c = 0$ なることを示せ。

解答例 : (i) $\sqrt{5}$ が無理数である事を示す。もし有理数ならば $\sqrt{5} = s/r$ 、 $r, s \in \mathbb{N}$ と表示できる。ここで $r, s \in \mathbb{N}$ は互いに素、即ち最大公約数が 1 と仮定して良い。故に、 $k, \ell \in \mathbb{Z}$ が存在して $1 = ks + \ell r$ である。この式に s を掛け、関係式 $5r^2 = s^2$ を代入すると $s = ks^2 + \ell rs = 5r^2k + \ell rs = r(5rk + \ell s)$ となる。これは r が s を整除することになり、 r, s が互いに素に矛盾。

$\sqrt{2}$ が無理数である事を示す (省略)。

(ii) $2a^2 = 5b^2 + 2bc\sqrt{5} + c^2$ より $2a^2 - 5b^2 - c^2 = 2bc\sqrt{5}$ 、この左辺が整数、右辺が無理数だから $bc = 0$ でなければならない。

(i) もし $c = 0$ ならば $a\sqrt{2} + b\sqrt{5} = 0$ であり、ここで a, b は互いに素になるまで割ってしまっても考える。 $a \neq 0$ とすると $2a^2 = 5b^2$ となり、 b が偶数でなければならないが、すると a が偶数となり、互いに素と言う事に矛盾。即ち $a = 0$ でなければならない。故に $b = 0$ でもある。

(ii) もし $b = 0$ ならば $a\sqrt{2} + c = 0$ となるが、もし $a \neq 0$ ならば $\sqrt{2}$ が有理数になってしまうので、 $a = 0$ でなければならない。故に $c = 0$ でもある。

問題 (II) : $0 \leq a \leq 2$ に対し

$$f(a) = \int_0^1 |x^2 - a^2| dx$$

とおく。このとき、次の問に答よ。

(1) $f(a)$ を求めよ。

(2) $f(a)$ の最小値を求めよ。

解答例 : $a^2 - x^2 = (a - x)(a + x)$ に注意する。

(1)(i) $1 \leq a \leq 2$ のとき、 $G(x) = a^2x - \frac{x^3}{3}$ とおくと

$$f(a) = \int_0^1 (a^2 - x^2) dx = [G(x)]_0^1 = G(1) = a^2 - \frac{1}{3}.$$

(ii) $0 \leq a < 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^a (a^2 - x^2) dx - \int_a^1 (a^2 - x^2) dx = [G(x)]_0^a - [G(x)]_a^1 \\ &= G(a) - [G(1) - G(a)] = 2G(a) - G(1) = \frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

即ち、

$$f(a) = \begin{cases} a^2 - \frac{1}{3} & (1 \leq a \leq 2), \\ \frac{4}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3} & (0 \leq a < 1). \end{cases}$$

(2) $1 \leq a \leq 2$ での $f(a)$ の最小値は $f(1)$ である。 $0 \leq a < 1$ での $f(a)$ の最小値を求める。

$$f'(a) = 4a^2 - 2a = 2a(2a - 1)$$

だから $f'(a) = 0$ となるのは $a = 0, 1/2$ のときである。

$$\begin{cases} f(1/2) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{4}, \\ f(0) = \frac{1}{3}, \\ f(1) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

であり、増減表を書いて $f(a)$ の最小値 $1/4$ が求まる。

a	0	...	1/2	...	1
$f'(a)$	0	-	0	+	+
$f(a)$	1/3	↘	1/4	↗	2/3

問題 (III) : 数列 $x_n, y_n ; n = 0, 1, 2, \dots$ が次の漸化式

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n, \\ y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

を満たすとする。 $x_0 = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ なるとき、 y_0 の値を求めよ (ヒント : $x_{n+1} + ay_{n+1} = b(x_n + ay_n)$ となる a, b を探して見よ)。

解答例 : ヒントを用いて $a = \pm 1/2$ ととれば良いことが分るので

$$\begin{cases} x_{n+1} + \frac{1}{2}y_{n+1} = (1 + \frac{1}{2})(x_n + \frac{1}{2}y_n), \\ x_{n+1} - \frac{1}{2}y_{n+1} = (1 - \frac{1}{2})(x_n - \frac{1}{2}y_n), \end{cases}$$

となる。これより

$$x_0 + \frac{1}{2}y_0 = \frac{2}{3}(x_1 + \frac{1}{2}y_1) = \dots = \left(\frac{2}{3}\right)^n (x_n + \frac{1}{2}y_n) \tag{1}$$

であり、更に与えられた第 1 の式と $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ を用いて

$$\frac{1}{2}y_n = 2(x_{n+1} - x_n) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

が従う。(1) を再度用いて

$$x_0 + \frac{1}{2}y_0 = 0 \implies y_0 = -2. \quad \square$$

問題 (IV) : 三角形に関する余弦定理とは何かを述べ、証明せよ。

=====

解答例 : 絵を書けばすぐ分るが、私はどうしたら Latex で絵がかけられるのか分かっていないので割愛。

問題 (V) : 自然数 n について $a_n = \frac{1}{n!} \int_1^e (\log x)^n dx$ とする。

(1) $a_n \leq \frac{e-1}{n!}$ となることを示せ。

(2) $n \geq 2$ について $a_n = \frac{e}{n!} - a_{n-1}$ が成り立つことを示せ。

(3) $n \geq 2$ について $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ とする。 S_n を a_n を用いて表し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

=====

解答例：(1) $1 \leq x \leq e$ より $0 \leq \log x \leq 1$ である。故に、

$$a_n = \frac{1}{n!} \int_1^e (\log x)^n dx \leq \frac{1}{n!} \int_1^e 1^n dx = \frac{e-1}{n!}$$

(2)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n!} \int_1^e (\log x)^n dx = \frac{1}{n!} \left([x(\log x)^n]_1^e - \int_1^e x \cdot n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ &= \frac{1}{n!} \left(e - n \int_1^e (\log x)^{n-1} dx \right) = \frac{e}{n!} - a_{n-1} \end{aligned}$$

(3) $a_1 = 1$ と (2) から、 $n \geq 2$ のとき $\frac{1}{e}(a_n + a_{n-1}) = \frac{1}{n!}$ である。これより

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{e} [(a_2 + a_1) - (a_3 + a_2) + \cdots + (-1)^n (a_n + a_{n-1})] \\ &= \frac{1}{e} (a_1 + (-1)^n a_n) = \frac{1}{e} (1 + (-1)^n a_n) \leq \frac{1}{e} (a_1 + (-1)^n \frac{e-1}{n!}) \end{aligned}$$

故に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1/e$. \square