

1次元HK積分の効用について

井上淳

平成17年7月4日

序：何故、今さら積分論なのか？¹

Lebesgue の各種収束定理の条件をおまじないとして唱えると、あら不思議²、極限操作と積分操作が入れ替えられる。この条件の check が Riemann 積分のそれと比較して容易なので、Lebesgue 積分は Riemann 積分の上位概念であると思ひ込まれ、実際思ひ込んでききた³。Lebesgue 積分に基礎をおいた確率論や関数解析的方法による偏微分方程式の研究の発展も、この思ひ込みに疑いを差し挟むことを躊躇させた。

ところが、Lebesgue 積分論は「究極の積分論なのか？」⁴ という素朴な疑問を持った人々が古くからあり、それが例えば、Perron-Denjoy 達だった。彼等は Lebesgue 積分論を精密化することで「究極の積分論？」を得たはずなのだが、議論が煩雑なので理論自体はほとんど打ち捨てられていた。1950年代後半になって、Kurzweil と Henstock が独立に、

Riemann 積分論をちょっと「柔らかくした」積分論⁵

を展開し、これが実は Perron-Denjoy 積分と同値であることが後になって示された⁶。この小論はその理論を紹介し、特に“測度論無し”での「新しい装いの1次元版積分」の効用を述べてみたい。多次元の場合は別に述べることにするが、多次元での発散定理と Fubini の定理を共に究極的に整備することはできない⁷、ということとは注目に値する。

1 既存の微分積分学の基本定理について

定理 1.1 (Riemann 積分での微分積分学の基本定理) (1) f が $I = [a, b]$ 上 Riemann 可積分であり、 I 上原始関数 $F(x)$ を持つならば

$$\int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

¹ 著者が工夫したのは「テニヲハ」だけ！

² 囲碁・将棋・麻雀では「手順前後は大違い」というが、2つの極限操作が入れ替えられないかもしれないという疑いは通常の感覚か？

³ 一方で、「絶対収束級数ならば足し算の順序をどう変えてもよいが、条件収束だとそうはいかない」と1年生に教えてきた。となると、絶対積分可能と条件積分可能の概念を知りながら、Lebesgue 積分が一途に「上位概念と思ひ込み」疑わなかったのだから、恥ずかしい！

⁴ Pfeffer による表現では、“If we can calculate the value of an integral of a function, then such a function ought to be integrable”

⁵ 関数の Riemann 積分可能性、「任意の $\epsilon > 0$ に対してある「定数」 $\delta > 0$ があって…」を、「ある「正の関数」 $\delta(x) > 0$ があって…」と変えるだけ！とは言っても、正定数と正関数とでは「選択度」が大いに違う！

⁶ 例えば、P-Y. Lee [5] に説明がある

⁷ The ability to integrate the divergence of an arbitrary differentiable vector field is incompatible with the Fubini theorem, pp.208-209 of Pfeffer [12]. 条件収束する2重級数の和の順序変更は厄介な代物だが、Lebesgue 積分は絶対収束するものを扱っている！

(2) f が $I = [a, b]$ 上 *Riemann* 可積分であり、かつ $x \in I$ で連続ならば、 f の不定積分 $F(x) = \int_a^x f$ は x で微分可能で

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(y)dy = f(x).$$

主張 1.1 (1) [Volterra の例] 有界閉区間上の有界関数で、原始関数を持っていても、*Riemann* 積分可能ではないものが存在する。[即ち、これは積分論が不完全だということではないのか?]⁸

(2) f が $[a, b]$ 上で *Riemann* 積分可能でも、関数 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ は f の不連続点では微分可能とは限らない。[即ち、*Riemann* 積分可能でも、その不定積分は原始関数を必ずしも与えない。だとしたら、不定積分をうまく特徴付ける積分論がないのか?]⁹

定理 1.2 (Lebesgue 積分での微分積分学の基本定理) (1) F を区間 $[a, b]$ 上で複素数値、絶対連続関数とすると、殆ど到る所で F は微分可能で、 $F' \in L^1([a, b])$ であり

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a) \quad (\forall x \in [a, b])$$

が成立する。

(2) 区間 $I = [a, b]$ 上の関数 F に対し、ある $f \in L^1([a, b])$ があって

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$$

と書き表せる必要十分条件は、 F が区間 $[a, b]$ 上で絶対連続なることである。このとき、 (a, b) の殆ど至るところで $F' = f$ である。

主張 1.2 F が $[a, b]$ 上微分可能でも F' が $[a, b]$ 上 *Lebesgue* 積分可能とは限らない。

素朴な疑問： F' が *Riemann* 積分可能とか、 F が絶対連続とかの条件無しでは、積分と微分は逆演算とは言えないのか？

後にもっと一般化するが、幾分弱い形でこの HK 積分による結果を述べると、

主張 1.3 F が $[a, b]$ 上連続で (a, b) 上微分可能ならば、 F' は $[a, b]$ 上 *HK* 積分可能である。

2 HK 積分の定義

定義 2.1 φ を $S \subset \mathbb{R}$ 上の増加関数とする。 S の任意の部分区間 $B = [c, d](c < d)$ に対し、非負な数 $\varphi(B) = \varphi(d) - \varphi(c)$ を B の φ -長さという。特に、 $\varphi = \lambda$ 、即ち $\lambda(x) = x$ のとき、 \mathbb{R} での *Lebesgue* 長さという。

定義 2.2 I_1, \dots, I_p が非重複¹⁰な閉区間で、点 ξ_1, \dots, ξ_p が \mathbb{R} に属するとき、集まり

$$\mathcal{P} = \{(I_1, \xi_1), (I_2, \xi_2), \dots, (I_p, \xi_p)\} \quad (\text{必ずしも } \xi_i \in I_i \text{ を仮定していない!})$$

を、*Lebesgue* 仕切り或いは単に仕切り (partition) という。特に、任意の $i \in \{1, \dots, p\}$ に対し $\xi_i \in I_i$ なるとき \mathcal{P} を *Perron* 仕切り或いは *P*-仕切り¹¹といい、 $\dot{\mathcal{P}}$ とも書く。

⁸そう思いもしなかった筆者は、あまりにも素朴で従順！読者はどうかな？

⁹こういう根本を疑う考え方は、若いときか歳をとってからがし易いのかも知れない。中堅は日々の生活に追われ、論文を書かなければアカンノダーと思っているのだから！

¹⁰相異なる 2 つの区間 I_i, I_j の共通部分が内点を含まない

¹¹called a tagged partition by Bartle、目印付仕切り

定義 2.3 $E \subset \mathbb{R}$ 上で定義された正の関数 δ をとる。 $\{\xi_1, \dots, \xi_p\} \subset E$ なる仕切り $\{(I_1, \xi_1), \dots, (I_p, \xi_p)\}$ が δ -細 (δ -fine) とは、任意の $i \in \{1, \dots, p\}$ に対し $I_i \subset U(\xi_i, \delta(\xi_i))$ 、即ち

$$I_i = [a_i, b_i] \implies \xi_i - \delta(\xi_i) < a_i < b_i < \xi_i + \delta(\xi_i) \quad (1)$$

となることである¹²。特に、 δ -細 P -仕切りを $\dot{P} \ll \delta$ と表記する。 $\{(I_1, \xi_1), \dots, (I_p, \xi_p)\}$ を仕切り、 I を閉区間とする。 $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ と $\cup_{i=1}^p I_i$ とが I の部分集合のとき、 \mathcal{P} を I 中の仕切り、特に $I = \cup_{i=1}^p I_i$ のとき \mathcal{P} を I の仕切りと呼ぶ。

命題 2.1 (Cousin の補題) 閉区間 I 上の任意の正関数 δ (ゲージと呼ぶ) に対し δ -細なる I の Perron 仕切りが存在する。

定義 2.4 (Riemann-Stieltjes 和) 閉区間 I 上の増加関数 φ と I 中の仕切り $\mathcal{P} = \{(I_1, \xi_1), \dots, (I_p, \xi_p)\}$ をとる。 $\{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ 上の任意の関数 f に対し、

$$\sigma(f, I; \varphi) = \sigma_{\mathcal{P}}(f, I; \varphi) = \sum_{i=1}^p f(\xi_i) \varphi(I_i)$$

とおき、この数を \mathcal{P} に随伴した f の φ -Riemann-Stieltjes 和、或いは単に Riemann-Stieltjes 和と呼ぶ¹³。閉区間 I を略して単に $\sigma(f; \varphi)$, $\sigma_{\mathcal{P}}(f; \varphi)$ とも記す。

以下では、 $\varphi(x) = x$ のとき $\varphi(I_i) = |I_i|$ とし

$$\sigma(f, I) = \sigma_{\mathcal{P}}(f, I) = \sum_{i=1}^p f(\xi_i) |I_i|$$

と略記する。

定義 2.5 φ を閉区間 I 上増加関数とする。 I 上の関数 f が I で HK-積分可能 (Henstock-Kurzweil integrable) 或いは gR-積分可能 (generalized Riemann integrable) であるとは、実数 A があって、任意の $\epsilon > 0$ に対し I 上の正関数 δ をうまくとると、 I の任意の δ -細 P -仕切り $\dot{\mathcal{P}}$ に対し

$$|\sigma_{\dot{\mathcal{P}}}(f, I; \varphi) - A| < \epsilon$$

となることをいう。このとき、 $\int_I f d\varphi = A$ と書く。また、 I 上の HK-積分可能な関数全体を $\mathcal{R}_{\text{HK}}(I, \varphi)$ と記す。特に、 $\varphi(x) = \lambda(x) = x$ のときは、単に $\mathcal{R}_{\text{HK}}(I)$ と記す。

主張 2.1 『 f が I 上 Lebesgue 積分可能 』 \iff 『 $f, |f| \in \mathcal{R}_{\text{HK}}(I)$ 』

定義 2.6 $f \in \mathcal{R}_{\text{HK}}(I)$ とし、任意の $u \in I$ をとる。このとき $F_u : I \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$F_u(x) = \int_u^x f$$

で定め、基点 u とする f の不定積分 (=indefinite integral) という。 $u = a$ のとき、単に $F(x) (= F_a(x))$ と書く。

定義 2.7 (測度ゼロ集合、或いは、零集合) \mathbb{R} の部分集合 Z が測度ゼロであるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対し高々可算個の閉区間 I_1, I_2, \dots が存在して $Z \subset \cup_{j=1}^{\infty} I_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \epsilon$ となることをいう。

¹²この場合でも $\xi_i \in I_i$ とは限らない、即ち、 P -仕切りとは限らない

¹³ φ -RS 和とか RS 和とも書く、 $\varphi(x) = x$ のときは単に R 和という

定義 2.8 $I = [a, b]$ とし、関数 $F, f : I \rightarrow \mathbb{R}$ を考える :

(a) F が I 上で f の原始関数 (primitive, anti-derivative) とは、任意の $x \in I$ に対し $F'(x)$ が存在し $F'(x) = f(x)$ となることである。

(b) F が I 上で f の $a.e^{14}$ -原始関数とは、 F が I 上で連続であり、ゼロ集合 E があって $x \in E$ に対し $F'(x)$ が存在しないか、存在しても $f(x)$ と一致しないときをいう。 集合 E が 可算集合 (或いは有限集合) の時、 F を f の cme^{15} -原始関数 (或いは fme^{16} -原始関数) という。

補題 2.1 (The straddle lemma) 関数 $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ が $\xi \in I$ で微分可能とする。任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta_\epsilon(\xi) > 0$ があって、 $u, v \in I$ が

$$\xi - \delta_\epsilon(\xi) \leq u \leq \xi \leq v \leq \xi + \delta_\epsilon(\xi)$$

を満たすならば

$$|F(v) - F(u) - F'(\xi)(v - u)| \leq \epsilon(v - u).$$

ポイント : 微分可能の定義からは $F(\xi + h) - F(\xi) - F'(\xi)h = o(|h|)$ が従うが、この補題は $F'(\xi)$ と $F(x)$ の ξ 近辺での振る舞いとを関連付けている。

定理 2.1 (Henstock lemma) $f \in \mathcal{R}_{HK}([a, b], \lambda)$ であり、 f は原始関数 F を持つとする。このとき、任意の $\epsilon > 0$ に対し正関数 $\delta_\epsilon(\xi)$ があって、どんな δ -細 P 仕切り $\dot{D} = \{([a_j, b_j], \xi_j)\}$ に対しても

$$\sum_{\dot{D}} |F(b_j) - F(a_j) - f(\xi_j)(b_j - a_j)| < \epsilon.$$

ポイント : $f(\xi_j)(b_j - a_j)$ は $F(b_j) - F(a_j)$ の近似値であり $F(b_j) - F(a_j) - f(\xi_j)(b_j - a_j)$ は誤差と考えられる。HK 積分の定義より誤差の総和は小さいことは保証されているが、実は、誤差の絶対値の総和も小さいことがこの Henstock の補題の意味である。更に、如何なる部分和の誤差も小さい事も示されている。この補題は HK 積分可能な関数の不定積分の連続性の証明に使われる。

定理 2.2 (Fundamental Theorem I) F が閉区間 $I = [a, b]$ 上で cme -微分可能ならば、 $F' \in \mathcal{R}_{HK}(I, \lambda)$ であり、更に

$$\int_a^b F' d\lambda = F(b) - F(a).$$

証明 : $C = \{c_k\}_{k=1}^\infty$ 以外で F は微分可能とする。 $f(c_k) = 0$ と仮定して一般性を失わない¹⁷。 $\epsilon > 0$, $\xi \in [a, b] \setminus C$ に対して $\delta_\epsilon(\xi) > 0$ を補題 2.1 のように定める。 $\xi \in C$ のとき $\xi = c_k$ なる整数 $k \in \mathbb{N}$ がある。 F の c_k における連続性から $\delta_\epsilon(c_k) > 0$ があって $z \in [a, b]$ かつ $|z - c_k| \leq \delta_\epsilon(c_k)$ なるとき、 $|F(z) - F(c_k)| \leq \epsilon 2^{-k-2}$ となる。これで $[a, b]$ 上の正関数 $\delta_\epsilon(\xi)$ が定まる。 $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i)\}_{i=1}^n$ を δ_ϵ -細 P 仕切りとする。もし (i) $\{\xi_i\} \cap C \neq \emptyset$ ならば、そのまま上の定理 2.1 の証明¹⁸ を用いれば良い。(ii) 整数 $k \in \mathbb{N}$ があって $\xi_i = c_k$ となっているときは

$$\begin{aligned} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_k)(x_i - x_{i-1})| &\leq |F(x_i) - F(c_k)| + |F(c_k) - F(x_{i-1})| + |f(c_k)(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq \epsilon 2^{-k-2} + \epsilon 2^{-k-2} + 0 = \epsilon 2^{-k-1}. \end{aligned}$$

¹⁴almost everywhere

¹⁵countably many exceptions, or nearly everywhere

¹⁶finitely many exceptions

¹⁷零集合での値は積分の値に影響しないことは、この記事の都合上後述

¹⁸例えば、Thm.4.7, p.60 of Bartle [1] を見よ

C の点は \dot{P} の高々 2 つの部分区間の目印となるので、 $\xi_i \in C$ なるものの和は

$$\sum_{\xi_i \in C} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_k)(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon 2^{-k} = \epsilon$$

となる。 $\xi_i \notin C$ のときは、補題 2.1 より

$$\sum_{\xi_i \notin C} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \epsilon \sum_{\xi_i \notin C} (x_i - x_{i-1}) \leq \epsilon(b-a).$$

\dot{P} を δ_ϵ -細 P 仕切りとすると

$$|F(b) - F(a) - \sigma(f, \dot{P})| \leq \epsilon(1+b-a). \quad \square$$

定理 2.3 (Fundamental Theorem II) $f \in \mathcal{R}_{HK}(I)$ ($I = [a, b]$) とすると、 f の任意の不定積分 F は I 上連続であり、殆ど到る所で微分可能で f の $a.e.$ -原始関数となっている。即ち、零集合 $Z \subset I$ があって、任意の $x \in I \setminus Z$ に対して

$$F'(x) = f(x).$$

もう少し詳しく考察するために、以下の概念を準備する：

定義 2.9 $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ とする。

(i) F が集合 $E \subset [a, b]$ 上で 絶対連続 AC (=absolutely continuous) とは、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって、すべての互いに疎¹⁹ な有限個の開区間 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ ($x_i, y_i \in E$) に対して $\sum_{i=1}^N (y_i - x_i) < \delta$ なる限り、 $\sum_{i=1}^N |F(x_i) - F(x_j)| < \epsilon$ となることをいう。

(ii) F が集合 $E \subset [a, b]$ 上で 狭義絶対連続 AC_* (=absolutely continuous in the restricted sense) とは、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって、すべての互いに疎な有限個の開区間 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ ($x_i, y_i \in E$) に対して $\sum_{i=1}^N (y_i - x_i) < \delta$ なる限り、 $\sum_{i=1}^N \sup_{x, y \in [x_i, y_i]} |F(x) - F(y)| < \epsilon$ となることをいう。

(iii) F が集合 $E \subset [a, b]$ 上で 狭義一般絶対連続 ACG_* (=generalised absolutely continuous in the restricted sense) とは、 F が連続で、 E が可算個の集合の合併で、その各集合上で F が AC_* なることである。

(iv) 関数 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ が $E \subset \mathbb{R}$ 上で 零変動 (negligible variation) である ($f \in NV_I(E)$ と記す) とは、任意の $\epsilon > 0$ に対し E 上のゲージ δ_ϵ があって、 $\dot{P}_0 = \{[a_j, b_j], \xi_j\}_{j=1}^s$ が I の任意の (δ_ϵ, E) -細仕切りならば

$$\sum_{j=1}^s |f(b_j) - f(a_j)| \leq \epsilon$$

を満たすことをいう。ここで (δ_ϵ, E) -細仕切りとは δ_ϵ -細仕切りであって全ての目印点が $\xi_j \in E$ を満たすことをいう。

主張 2.2 『 f が L -積分可能である』 \iff 『不定積分 $F(x) = \int_a^x f$ は絶対連続である。特に、 F が絶対連続ならば L -積分可能な関数 f があって $F' = f$ (a.e.) である』

主張 2.3 『 f が HK -積分可能である』 \iff 『 ACG_* な関数 F があって $F' = f$ (a.e.) となる。このとき更に、 $F(x) - F(a) = \int_a^x f$ となる』

主張 2.4 ACG_* ならば、ほとんど至る所微分可能 [*differentiable almost everywhere*] である。

¹⁹ $i \neq j$ ならば $(x_i, y_i) \cap (x_j, y_j) = \emptyset$

主張 2.5 (i) $f \in NV_I(E)$ ならば f は E の各点で連続である。逆に、 I の可算集合 C で $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が C の各点で連続ならば、 $f \in NV_I(C)$ である。

(ii) しかし、零集合 $Z \subset I$ に対し、 I 上の全ての連続関数が $NV_I(Z)$ とは限らない。例えば、Cantor-Lebesgue の特異関数は $[0, 1]$ 上で単調増加で連続だが $NV_I(\Gamma)$ ではない。ここで Γ は Cantor 集合。

定理 2.4 (Fundamental Theorem of Calculus) (I) $f, F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ とする。

『 $f \in \mathcal{R}_{HK}([a, b])$ で、任意の $x \in [a, b]$ に対して $F(x) = \int_a^x f$ となる』

\iff 『関数 F が $[a, b]$ 上 ACG_* 、 $F(a) = 0$ かつ、 (a, b) 上ほとんど至る所 $F' = f$ となる。

更に、 $\int_a^b f$ が存在し、 $x \in (a, b)$ で f が連続ならば $\frac{d}{dx} \int_a^x f = f(x)$ となる』

(II) $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ とする。

『 F が $[a, b]$ 上 ACG_* である』

\iff 『 (a, b) 上ほとんど至る所 F' が存在し、 F' は $[a, b]$ 上 HK -積分可能で、

任意の $x \in (a, b)$ に対して $\int_a^x F' = F(x) - F(a)$ となる』

系 2.1 $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ を $[a, b]$ 上連続で (a, b) 上 cme 微分可能とする。すると、 F' は $[a, b]$ 上 HK -積分可能で、任意の $x \in (a, b)$ に対して $\int_a^x F' = F(x) - F(a)$ となる。

主張 2.6 $f \sim g$ とは $f = g$ (a.e) なるものとする。ベクトル空間を

$$A = \{f \mid [a, b] \subset [-\infty, \infty] \text{ 上 } HK\text{-積分可能な関数}\} / \sim,$$

$$B = \{f \mid ACG_* \text{ かつ } f(a) = 0\}$$

と定めるとき、積分と微分は逆演算である。実際、演算 \int を任意の $f \in A$ に対して $\int[f](x) = \int_a^x f$ 、演算 D を任意の $f \in B$ に対して $D[f](x) = f'(x)$ と定めると、微分積分の基本定理は

$$D \circ \int = I_A, \quad \int \circ D = I_B.$$

主張 2.7 $f \in \mathcal{R}_{HK}(I)$ であり $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ は I 上で $g(x) = f(x)$ a.e. なるものとする。このとき、 $g \in \mathcal{R}_{HK}(I)$ であり $\int_I f = \int_I g$ となる。

定理 2.5 (Characterization Theorem) $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ が関数 $f \in \mathcal{R}_{HK}(I)$ の不定積分である必要十分条件は零集合 $Z \subset I$ があって、任意の $x \in I \setminus Z$ で $F'(x) = f(x)$ であり、かつ $F \in NV_I(Z)$ なることである。更に、このとき任意の $x \in I$ に対して

$$\int_a^x f = F(x) - F(a). \quad (2)$$

証明： \implies) $f \in \mathcal{R}_{HK}(I)$ とし $G(x) = \int_a^x f$ とおく。このとき定理 2.3 により零集合 $Z \subset I$ があって、各点 $x \in I \setminus Z$ で $G'(x) = f(x)$ となる。そこで

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I \setminus Z, \\ 0 & x \in Z \end{cases}$$

と定義すると、主張 2.7 より $f_1 \in \mathcal{R}_{HK}(I)$ であり、 G は f_1 の a を基点とする不定積分である。故に、任意の $\epsilon > 0$ に対しゲージ η_ϵ があって $\dot{P} \ll \eta_\epsilon$ ならば

$$\left| \int_a^b f_1 - \sigma(f_1; \dot{P}) \right| \leq \frac{1}{2}\epsilon.$$

さて、 $\dot{\mathcal{P}}_0 = \{([a_j, b_j], \xi_j)\}_{j=1}^s$ を I の任意の (η_ϵ, Z) -細仕切りとする。 $\dot{\mathcal{P}}_0$ は I のある η_ϵ -細仕切り $\dot{\mathcal{P}}$ の部分集合となるから、Henstock の補題 2.1 より

$$\sum_{j=1}^s \left| f_1(\xi_j)(b_j - a_j) - \int_{a_j}^{b_j} f_1 \right| \leq \epsilon$$

となる。このとき、 $f_1(\xi_j) = 0$ かつ $\int_{a_j}^{b_j} f_1 = G(b_j) - G(a_j)$ ($j = 1, \dots, s$) だから、 $\sum_{j=1}^s |G(b_j) - G(a_j)| \leq \epsilon$ となる。 $\dot{\mathcal{P}}_0$ は任意の (η_ϵ, Z) -細仕切りだったから、 G は Z 上で零変動をもつ。 f の任意の不定積分 F をとると、 $F = G + F(a)$ だから任意の $x \in I \setminus Z$ に対して $F'(x) = G'(x) = f(x)$ であり、更に $F(a_j) - F(b_j) = G(a_j) - G(b_j)$ より $F \in Nb_i(Z)$ となる。また $G(x) = F(x) - F(a)$ だから (2) が成り立つ。

\Leftarrow Z を零集合、 $F \in Nb_i(Z)$ が $I \setminus Z$ 上で微分可能とする。

$$f(x) = \begin{cases} F'(x) & x \in I \setminus Z, \\ 0 & x \in Z \end{cases}$$

と定めたとき、 $f \in \mathcal{R}_{HK}(I)$ であり F は f の不定積分であることを示す。

任意の $\epsilon > 0$ に対してゲージ δ_ϵ を次のようにつくる： $x \in I \setminus Z$ に対して Straddle の補題 2.1 より、 δ_ϵ があって $x \in [u, v] \subset [x - \delta_\epsilon(x), x + \delta_\epsilon(x)]$ のとき

$$|F(v) - F(u) - f(x)(v - u)| \leq \epsilon(v - u).$$

また $F \in Nb_i(Z)$ だから、 $x \in Z$ に対しては $\delta_\epsilon(x)$ を、任意の (δ_ϵ, Z) -細仕切りに対して

$$\sum_{j=1}^s |F(b_j) - F(a_j)| \leq \epsilon$$

となるようにとれる。

$\dot{\mathcal{P}} = \{([a_j, b_j], \xi_j)\}_{j=1}^n$ を I の δ_ϵ -細仕切りとし、 $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(b_i) - F(a_i))$ に注意すると

$$|F(b) - F(a) - \sigma(f; \dot{\mathcal{P}})| = \left| \sum_{i=1}^n [F(b_i) - F(a_i) - f(\xi_i)(b_i - a_i)] \right|$$

となる。 $\xi_i \in Z$ では $f(\xi_i) = 0$ となるから、上の等式の足し算を分割して

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\xi_i \in Z} |F(b_i) - F(a_i)| + \sum_{\xi_i \in I \setminus Z} |F(b_i) - F(a_i) - f(\xi_i)(b_i - a_i)| \\ &\leq \epsilon + \sum_{\xi_i \in I \setminus Z} \epsilon(b_i - a_i) \leq \epsilon(1 + b - a). \end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意だったから、 $f \in \mathcal{R}_{HK}(I)$ かつ $F(b) - F(a) = \int_a^b f$ となる。任意の $[a, x] \subset I$ に対しても同様に議論できる。 \square

3 既知の収束定理について

3.1 Riemann 積分での収束定理

定理 3.1 (項別積分定理) Ω を \mathbb{R}^m 内の有界な面積確定集合とする。 Ω 上の Riemann 可積分関数族 $\{f_t\}_{t \in T}$ が $t \rightarrow b$ のとき Ω 上の Riemann 可積分関数 f に Ω 上一様収束すれば

$$\lim_{t \rightarrow b} \int_{\Omega} f_t(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx$$

が成立する。

定理 3.2 (項別微分定理) $I = [a, b]$ 上の関数族 $\{f_t\}_{t \in T}$ が以下を満たすとする :

- (a) 各点 $x \in I$ で $\lim_{t \rightarrow \gamma} f_t(x) = f(x)$ ($\gamma \in \bar{T}$)、
- (b) 各 $t \in T$ に対し $f_t \in C^1(I)$ 、
- (c) I 上のある関数 g があって、 $\lim_{t \rightarrow \gamma} f'_t = g$ と一様収束する。

このとき、 $f \in C^1(I)$ であり、任意の $x \in I$ で $f'(x) = g(x)$ である。

注意 : 「積分可能関数の各点収束での極限関数は積分可能とは限らない」、「極限操作と積分操作の可換性の保証には一様収束という強い条件が一般には必要である」また、「一様収束していても非有界区間上では可積分とは限らない」等が知られている。

3.2 Lebesgue 積分での収束定理

定理 3.3 (The monotone convergence theorem, the Beppo-Levi theorem, 単調収束定理) I 上で $\{f_n\}$ が Lebesgue 積分可能、 $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ ならば

$$\int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx.$$

定理 3.4 (The Fatou lemma, Fatou の補題) I 上で $f_n \geq 0$ が Lebesgue 積分可能ならば

$$\int_I \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx.$$

注意 : Brezis-Lieb [2] はこの補題のある種の精密化とその応用を与えた。

定理 3.5 (The dominated convergence theorem, 優収束定理)

$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ a.e.x, かつ $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$, $\exists \varphi(x) \in L^1(\Omega)$ ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

注意 : これらにより、Lebesgue 積分は、被積分関数が正である限り、極限操作と積分操作の可換性の条件を Riemann 積分のそれより大幅に緩和した。この事実が「関数解析的方法による微分方程式の解の研究」にどれ程役立ったか ! 典型例がエネルギー法による偏微分方程式の解の存在、一意性、正則性に対する寄与である。

4 HK 積分での収束定理について

定理 4.1 (The monotone convergence theorem) 以下を仮定する :

- (i) 関数 $f_n(x) \in \mathcal{R}_{\text{HK}}(I, \lambda)$ は $[a, b]$ 上殆ど到る所で $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$ であり $f(x)$ に収束し、
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = A$ とする。

このとき、 $f \in \mathcal{R}_{\text{HK}}(I, \lambda)$ であり、かつ $\int_a^b f = A$ となる。

定理 4.2 (The dominated convergence theorem) 以下を仮定する :

(i) 関数 $f_n(x) \in \mathcal{R}_{\text{HK}}(I, \lambda)$ は $[a, b]$ 上殆ど到る所で $f(x)$ に収束し、

(ii) 関数 $g, h \in \mathcal{R}_{\text{HK}}(I, \lambda)$ で $[a, b]$ 上殆ど到る所で $g(x) \leq f_n(x) \leq h(x)$ である。

このとき、 $f \in \mathcal{R}_{\text{HK}}(I, \lambda)$ であり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

系 4.1 (Fatou's lemma) 関数列 $\{f_n\}$ が $[a, b]$ 上 HK-積分可能で $[a, b]$ 上殆ど到る所で $f(x)$ に収束し、 $\sup_n \int_a^b f_n < \infty$ とする。このとき、 $f \in \mathcal{R}_{\text{HK}}(I, \lambda)$ であり

$$\int_a^b f \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

系 4.2 (The mean convergence theorem) 以下を仮定する：

(i) 関数 $f_n(x) \in \mathcal{R}_{\text{HK}}(I, \lambda)$ は $[a, b]$ 上殆ど到る所で $f(x)$ に収束し、

(ii) $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_a^b |f_n - f_m| = 0$ とする。

このとき、 $f \in \mathcal{R}_{\text{HK}}(I, \lambda)$ であり、かつ

$$\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n.$$

ポイント：被積分関数の正值性を仮定していない！

定理 4.3 (積分記号下でのパラメタに関する微分、積分) $f, f_1 : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ とし、殆ど至る所の $y \in (a, b)$ に対して $f(\cdot, y)$ が $ACG_*([\alpha, \beta])$ とする。 $F(x) = \int_a^b f(x, y)dy$ が $ACG_*([\alpha, \beta])$ であり、殆ど至る所の $x \in (\alpha, \beta)$ で $F'(x) = \int_a^b f_1(x, y)dy$ となるための必要十分条件は任意の $[s, t] \subset [\alpha, \beta]$ に対して

$$\int_{x=s}^t \int_{y=a}^b f_1(x, y)dydx = \int_{y=a}^b \int_{x=s}^t f_1(x, y)dx dy$$

となることである。

系 4.3 $g : [\alpha, \beta] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ とし、殆ど至る所の $y \in (a, b)$ に対して $g(\cdot, y) \in ACG_*([\alpha, \beta])$ とする。 $G(x) = \int_a^b \int_{\alpha}^x g(x', y)dx' dy$ と定義する。 $G \in ACG_*([\alpha, \beta])$ であり、殆ど至る所の $x \in (\alpha, \beta)$ で $G'(x) = \int_a^b g(x, y)dy$ となるための必要十分条件は任意の $[s, t] \subset [\alpha, \beta]$ に対して

$$\int_{x=s}^t \int_{y=a}^b g(x, y)dydx = \int_{y=a}^b \int_{x=s}^t g(x, y)dx dy$$

となることである。

系 4.4 (項別積分) $g : [\alpha, \beta] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ とし、 $(x, n) \in [\alpha, \beta] \times \mathbb{N}$ に対して $g_n(x) = g(x, n)$ とおく。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $g_n \in \mathcal{R}_{\text{HK}}([\alpha, \beta])$ であり、 $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^x g_n(x')dx'$ とする。このとき、 $G \in ACG_*([\alpha, \beta])$ であり、殆ど至る所の $x \in (\alpha, \beta)$ で $G'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ となるための必要十分条件は任意の $[s, t] \subset [\alpha, \beta]$ に対して

$$\int_{x=s}^t \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x=s}^t g_n(x)dx$$

となることである。

問：積分表示を用いて関数の性質を調べるとき、上に述べた積分論の差違による違いがあるのか？例えば、特殊関数では？私は井上 - 野村 [3] の中で述べた物理学者の計算を正当化することに HK 積分が使えないものか、と考えているのだが？

参考文献

- [1] R.G. Bartle: A Modern Theory of Integration, Graduate Studies in Mathematics, vol.32, Amer.Math.Soc. Providence,2001.
- [2] H. Brezis and E.H. Lieb: *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc.Amer.Math.Soc. 88(1983), pp. 486-490.
- [3] A. Inoue and Y. Nomura, *Some refinements of Wigner's semi-circle law for Gaussian random matrices using superanalysis*, Asymptotic Analysis 23(2000), pp. 329-375.
- [4] E.H. Lieb and M. Loss: Analysis, Graduate Studies in Mathematics, vol.14, Amer.Math.Soc. Providence, 2001.
- [5] P-Y. Lee: Lanzhou Lectures on Henstock Integration, Series in Real Analysis, vol.2, World Scientific, Singapore etc, 1989.
- [6] R.M. McLeod: The Generalized Riemann Integral, The Carus Math.Monographs 20(1980), MAA.
- [7] E.J. McShane: *A Riemann-type integral that includes Lebesgue-Stieltjes, Bochner and stochastic integrals*, Mem.Amer.Math.Soc. 88(1969), pp. 1-53.
- [8] W. K. Pfeffer: *The divergence theorem*, Trans.Amer.Math.Soc.295(1986), pp. 665-685.
- [9] _____: *The multidimensional fundamental theorem of calculus*, J.Austral.Math.Soc. 43(1987), pp. 143-170.
- [10] _____: *A Riemann type integration and the fundamental theorem of calculus*, Rendiconti delCircolo Matemetico di Palermo 36(1987), pp. 482-506.
- [11] _____: *The Gauss-Green theorem*, Adv.Math.87(1991), pp.93-147.
- [12] _____: The Riemann Approach to Integration, Cambridge University Press, New York, 1993.
- [13] _____: *The Stokes theorem for the generalized Riemann integral*, Real Analysis Exchange, 26(2000/2001), pp.621-636.
- [14] _____: Derivation and Integration, Cambridge University Press, New York, 2001.
- [15] T.D. Pauw and W. K. Pfeffer: *The Gauss-Green theorem and removable sets for PDEs in divergence form*, Adv.Math.183(2004), pp. 155-183.
- [16] E. Talvila: *Limits and Henstock integrals of products*, Real Analysis Exchange, 25(1999/2000), pp. 907-918.
- [17] _____: *Necessary and sufficient conditions for differentiating under the integral sign*, Amer.Math.Monthly 108(2001), pp.541-548,