

変更!! 演習期末試験 7月30日、5~6時限、W241,  
日本語試験がある留学生のみ: 7月30日、7~8時限、S511!!

合成関数の微分、Taylor 展開、変数変換は今学期の最重要事項である。是非 7月30日までに理解する努力をしておいて欲しいものである。

=====

尚、この夏休みの暇つぶしにと、私が最近何らかの印象を受けた本でも列挙しておく。お節介だが、老人の経験が役立つかもしれないと思いつつ。読書の習慣を付けておくこと、得意な英語に磨きをかけておく事等が後々の人生に色々な選択の可能性を与えるものである。自分の好きなやり方ですると良いだろう

- 高杉良「不撓不屈」官僚によるいじめ! 当該者の寛大さと官僚組織の自浄能力の無さ。
- 佐藤優「国家の罨」国家という組織と個人の対立、どこまでが「事実」なのか、「藪の中」なのか?
- 山口義行「聞かせる技術」人に伝える事の難しさ、
- 佐伯啓思「自由とは何か」自己責任とは? 政府の「メディアコントロール」に簡単に踊らされる民衆?
- ファインマン「ご冗談でしょファインマンさん」知的好奇心の発露、「何故」と思う心の大切さ
- 玄侑宗久-鈴木秀子「仏教・キリスト教 生き方・死に方」柔らかに信心する?

以下の2つはネットサーフィンで書評を見つけて読みたいと思っているもの。

- キャリー マリス (著)「マリス博士の奇想天外な人生」(ハヤカワ文庫 NF)(文庫)
- ダニエル・ゴットリーブ (著), 児玉 清 (監修)「人生という名の手紙」講談社 (2008/6/20) 1,365 円

=====

最後の演習時間に出た質問に答えておく。

**39** 関数  $f(x, y) = (x - y)e^{-(x^2 + y^2)}$  について、

- (a)  $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$  をすべて求めよ。
- (b) 極値をとる点を求め、極大・極小を判定せよ。
- (c)  $\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$  を示せ。更に、 $f(x, y)$  は  $\mathbb{R}^2$  上で最大値・最小値を持つことを示し、その値を求めよ。

まず「 $\mathbb{R}^2$ って何ですか?」という質問があった。これは線形代数で出てきたと思うのだが、

$$\mathbb{R}^n = \{x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\}$$

である。 $\mathbb{C}^n$  も同様に定義する。

この問題の(c), 『 $f(x, y)$  は  $\mathbb{R}^2$  上で最大値・最小値を持つことを示し』の意味が分からない』という質問があった。今までの講義では、「有界閉集合上の連続関数には最大値・最小値が存在する。」及び、「 $C^1$ -級

関数  $f$  に関して、 $f'(a) = 0$  なる点  $a$  は極大値・極小値を取る点の候補である」ということだった。だから、関数が定義される領域がいきなり  $\mathbb{R}^2$  となればとまどうのもっともである。

そこで 1 変数関数  $f(x) = xe^{-x^2/2}$  について考えてみよう。 $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$  だから極値をとる点は  $x = \pm 1$  であり、ここでは  $f(\pm 1) = \pm e^{-1/2}$ 。一方、

$$f(x) = \frac{x}{e^{x^2/2}}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^{x^2/2}} = 0$$

これより、例えば、関数  $f(x)$  を  $[-2, 2]$  に制限して考えれば、そこでの最大値と最小値はそれぞれ  $-e^{-1/2}$  と  $e^{-1/2}$  であり、 $(-\infty, -2]$  あるいは  $[2, \infty)$  ではそれぞれ、 $f(-2) \leq f(x) \leq 0$  及び  $0 \leq f(x) \leq f(2)$  となるのだから、 $f(x) = xe^{-x^2/2}$  の最大値と最小値はそれぞれ  $-e^{-1/2}$  と  $e^{-1/2}$  である。

注意：この例の場合、 $f(x)$  は  $(-\infty, -2]$  では単調増大、 $[2, \infty)$  では単調減少となる。しかし、一般には「単調」とは限らない。但し、 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$  とすると、任意の  $\epsilon > 0$  に対して  $R > 0$  があって、 $x$  が  $|x| > R$  を満たすならば  $|f(x)| \leq \epsilon$  となる。この  $\epsilon > 0$  が極値の候補のうちの最も大きいものより小さければ、関数の最大値は全区間  $(-\infty, \infty)$  で「極値の候補のうちの最も大きいもの」となる。

Taylor 展開を用いて極大と極小を判定する条件を学んだはずである。何故その条件が出てくるのかについては講義で説明を受けたと思われるが、もう一度「[ennsyuu5kaito](#)」を眺め直しておいて欲しい。そこで、正值行列、負値行列という言葉が出てくるので、どういう条件下で行列がそのような性質を持つのかという目でみるのが肝要である。