「III 類 P 組　微分積分学第１演習問題–6 解答例」　井上 淳、07/July/2008

変更!!　演習期末試験　7 月 30 日、5〜6 時限、 W241

以下に述べるような解答例を作成する事の是非についての見解（参考）がある。

鈴木秀子-玄侑宗久「仏教・キリスト教　死に方・生き方」講談社 α 新書

『禅問答の場合、（弟子が師匠から）問題をいただきますね。弟子が先輩に何か質問するわけでしょう。そういうとき、先輩が「こう考えるのが正しい」とか「自分はこうやって乗り越えてきた」と教えるのは 最大の罪悪 なんです。だって、その人が 自ら考えて、答えに気づいていく道 をふさいじゃうわけですから』

『誰か困っている人がいると、すぐに解決策を与えて、「こうしたらいいよ」なんてアドバイスすると、「お陰で助かりました」と感謝してもらえる。そうすれば自分も気持ちもいいから、ついそれがいちばんいいことだと思いがちなんです。　お節介ですよね。だから、相手の疑問を徹底的に聞く、考えを徹底的に聞く、そういう聞き方のトレーニングがとても大事じゃないでしょうか』

大学での学びも程度の差こそあれ、このような状況にあり、組織的教育機関では「一対多」が「定め」[1]。だからといって安易に、「先生が学生を統制する」という考え方は好きになれないのである。しかし、赤ちゃんだったら随分と面倒を見ざるを得ない。君たちは「禅問答」に耐え得るか？耐えられないと思うから以下の解答例を作成しているのだが、お節介かもしれない！

===============

合成関数の微分が基本的なのだが、多変数になると戸惑いが見られる。「元に戻って」復習！

定理 0.1 関数 $z = f(x)$ の定義域を Dom_f とし、関数 $x = g(t)$ の値域 Ran_g は Dom_f に含まれるとする。g は t_0 で微分可能、f は $x_0 = g(t_0)$ で微分可能とするとき、合成関数 $f\circ g(t) = f(g(t))$ は $t = t_0$ で微分可能であり、t_0 における微分係数は次式で与えられる。

$$(f\circ g)'(t_0) = f'(x_0)g'(t_0)\Big|_{x_0=g(t_0)}, \quad 即ち \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

注意：ここで $f'(x_0)\big|_{x_0=g(t_0)}$ とは x_0 に $g(t_0)$ を代入するという意味である。

定理 0.2 (逆関数の連続性と微分可能性) 関数 $y = f(x)$ は ξ を含む或る区間 $[a, b]$ で狭義単調かつ連続とする。f の値域は $[f(a), f(b)]$ であり逆関数 f^{-1} は $[f(a), f(b)]$ 上の連続関数である。また、f が $x = \xi$ で微分可能で、 $f'(\xi) \neq 0$ ならば、 f の逆関数 f^{-1} は $\eta = f(\xi)$ で微分可能で

$$(f^{-1})'(\eta) = \frac{1}{f'(\xi)}\Big|_{\xi=f^{-1}(\eta)}, \quad 即ち \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

（注意）この最後の式は $f(f^{-1}(x)) = x$ なる関係式を合成関数の微分公式を用いて微分すれば従う。

$$f'(f^{-1}(x))\frac{df^{-1}(x)}{dx} = 1, \quad \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f'(y)}\Big|_{y=f^{-1}(x)}. \quad 即ち \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

注意：この $dx/dy = 1/(dy/dx)$ なる記法は誤解を招くことがある。2 変数以上の関数の偏微分がかかわるとき、この記法の真似はしてはならない！

[1]質問しにくれば「一対一」

合成関数の高階微分について：

$$f(\phi(t)) = \phi'(t)f'(\phi(t)), \quad \frac{d^2}{dt^2}f(\phi(t)) = \big(\phi'(t)f'(\phi(t))\big) = \phi''(t)f'(\phi(t)) + \phi'(t)\big[\phi'(t)f''(\phi(t))\big].$$

これが分かると多変数合成関数の偏微分もできる。

命題 0.1 *(i)* $f(x,y) \in C^1(I \times J)$, $\varphi(t), \psi(t) \in C^1(D)$ かつ $\varphi(D) \subset I$, $\psi(D) \subset J$ とする。このとき、

$$\frac{d}{dt}f(\varphi(t),\psi(t)) = f_x(\varphi(t),\psi(t))\dot{\varphi}(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\dot{\psi}(t),$$

(ii) $f(x,y) \in C^2(I \times J)$, $\varphi(t), \psi(t) \in C^2(D)$ $\varphi(D) \subset I$, $\psi(D) \subset J$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}f(\varphi(t),\psi(t)) =& [f_{xx}(\varphi(t),\psi(t))\dot{\varphi}(t) + f_{yx}(\varphi(t),\psi(t))\dot{\psi}(t)]\dot{\varphi}(t) + f_x(\varphi(t),\psi(t))\ddot{\varphi}(t) \\ &+ [f_{xy}(\varphi(t),\psi(t))\dot{\varphi}(t) + f_{yy}(\varphi(t),\psi(t))\dot{\psi}(t)]\dot{\psi}(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\ddot{\psi}(t),\end{aligned}$$

(iii) $f(x,y) \in C^2(I \times J)$, $u(t,s), v(t,s) \in C^2(D_t \times D_s)$ $u(D_t, D_s) \subset I$, $v(D_t, D_s) \subset J$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}f(u(t,s),v(t,s)) &= f_x(u(t,s),v(t,s))u_t(t,s) + f_y(u(t,s),v(t,s))v_t(t,s), \\ \frac{\partial}{\partial s}f(u(t,s),v(t,s)) &= f_x(u(t,s),v(t,s))u_s(t,s) + f_y(u(t,s),v(t,s))v_s(t,s),\end{aligned}$$

以降、変数は明示しない（但し、用いるときは注意深く*!!*)：

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(u(t,s),v(t,s)) &= [f_{xx}u_t + f_{yx}v_t]u_t + f_x u_{tt} + [f_{xy}u_t + f_{yy}v_t]v_t + f_y v_{tt}, \\ \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}f(u(t,s),v(t,s)) &= [f_{xx}u_s + f_{yx}v_s]u_t + f_x u_{st} + [f_{xy}u_s + f_{yy}v_s]v_t + f_y v_{st}, \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2}f(u(t,s),v(t,s)) &= [f_{xx}u_s + f_{yx}v_s]u_s + f_x u_{ss} + [f_{xy}v_s + f_{yy}v_s]v_s + f_y v_{ss}.\end{aligned}$$

==============================

$\boxed{\mathbf{31}}$ $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ とおく。このとき

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial x_n^2} = f''(r) + \frac{n-1}{r}f'(r)$$

を示せ。

解答例: これは $f(r)$ と $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ の合成関数の偏微分である。簡単の為に $\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \varphi(x)$ と書こう。

$$\frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}\frac{df(r)}{dr}\bigg|_{r=\varphi(x)} = \varphi_{x_1}(x)f'(r)\big|_{r=\varphi(x)} = \varphi_{x_1}(x)f_r(\varphi(x)),$$

$$\frac{\partial^2 f(\varphi(x))}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2}\frac{df(r)}{dr}\bigg|_{r=\varphi(x)} + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{df(r)}{dr}\bigg|_{r=\varphi(x)}\right] = \varphi_{x_1x_1}(x)f_r(\varphi(x)) + \varphi_{x_1}(x)\frac{\partial}{\partial x_1}f_r(\varphi(x)),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}f_r(\varphi(x)) = \varphi_{x_1}(x)f_{rr}(\varphi(x)),$$

$$\frac{\partial^2 f(\varphi(x))}{\partial x_1^2} = \varphi_{x_1x_1}(x)f_r(\varphi(x)) + (\varphi_{x_1}(x))^2 f_{rr}(\varphi(x)).$$

すると、$\varphi(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ に対し

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_1}{r}, \quad \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2} = \frac{r^2 - x_1^2}{r^3}.$$

故に、

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\varphi(x))}{\partial x_j^2} = (\sum_{j=1}^{n} \frac{r^2 - x_j^2}{r^3}) f'(r) + (\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{r^2}) f''(r). \qquad \square$$

$\boxed{\mathbf{34}}$ （教科書 p.169, 問 21）$f(x,y) = e^x \cos y$ とする。$|x|, |y|$ が小さい時

$$f(x,y) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \cdots\right) = 1 + x + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right) + \cdots$$

となるから、$f(x,y)$ の近似値として $1 + x + \frac{1}{2}(x^2 y^2)$ をとる。このとき $(|x| + |y|)^3 e^{|x|}/6$ は一つの誤差の限界である事を示せ。

注意：「一つの誤差の限界」という言葉に違和感を覚えたかもしれない。前に示した 1 変数の場合の関数の近似値及びそれの誤差の計算のところを良く検討せよ。

まず、2 変数関数の 2 次までの Taylor の公式 (<u>3 次の項を剰余項とするという意味</u>) を思い出し、それの証明方法も考えてみよう。

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(0,0) &+ \big(f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0)\big) \\ &+ \left(\frac{1}{2} f_{xx}(0,0)(x-0)^2 + f_{xy}(x-0)(y-0) + \frac{1}{2} f_{yy}(0,0)(y-0)^2\right) \\ &+ \left(\frac{1}{3!} f_{xxx}(\theta x, \theta y) x^3 + \frac{1}{2} f_{xxy}(\theta x, \theta y) x^2 y^2 + \frac{1}{2} f_{xyy}(\theta x, \theta y) x y^2 + \frac{1}{3!} f_{yyy}(\theta x, \theta y) y^3.\right. \end{aligned}$$

最後の行もこの書き方では $x - 0$ とすべきだろうが、印刷の見栄えで x とした。

これの証明には

$$g(t) = f(0 + t(x-0), 0 + t(y-0)) (= f(tx, ty)) = g(0) + g'(0)t + g''(0)\frac{t^2}{2!} + g'''(\theta t)\frac{t^3}{3!}, \quad \text{for} \quad 0 < \exists \theta < 1$$

を用いる。これが分かれば

$$g(1) - g(0) = f(x,y) - f(0,0) = g'(0)t + g''(0)\frac{t^2}{2!} + g'''(\theta t)\frac{t^3}{3!}, \quad \text{for} \quad 0 < \exists \theta < 1$$

となる。$f_{xy} = f_{yx}$, etc. に注意して

$$\begin{aligned} g'(t) &= x f_x(tx, ty) + y f_y(tx, ty), \\ g''(t) &= x(x f_{xx} + y f_{yx}) + y(x f_{xy} + y f_{yy}) = x^2 f_{xx}(tx, ty) + 2xy f_{xy}(tx, ty) + y^2 f_{yy}(tx, ty), \\ g'''(t) &= x^2(x f_{xxx} + y f_{yxx}) + 2xy(x f_{xxy} + y f_{yxy}) + y^2(x f_{xyy} + y f_{yyy}). \qquad \square \end{aligned}$$

問題の証明：$f(x,y) = e^x \cos y$ に対して

$$f(0,0) + \big(f_x(0,0)x + f_y(0,0)y\big) + \left(\frac{1}{2} f_{xx}(0,0)x^2 + f_{xy}(0,0)xy + \frac{1}{2} f_{yy}(0,0)y^2\right) = 1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

となることは明らかだろう（上の最後の項、西村君がミスプリントを指摘「修正」)。だから剰余項を計算すれば良い。

$$\begin{aligned} R_3(f) &= \left(\frac{1}{3!} f_{xxx}(\theta x, \theta y) x^3 + \frac{1}{2} f_{xxy}(\theta x, \theta y) x^2 y + \frac{1}{2} f_{xyy}(\theta x, \theta y) x y^2 + \frac{1}{3!} f_{yyy}(\theta x, \theta y) y^3\right. \\ &= \frac{x^3}{3!} e^{\theta x} \cos \theta y - \frac{x^2 y}{2} e^{\theta x} \sin \theta y - \frac{x y^2}{2} e^{\theta x} \cos \theta y + \frac{y^3}{3!} e^{\theta x} \sin \theta y. \end{aligned}$$

故に, $|\sin \theta y|, |\cos \theta y| \le 1$, $|e^{\theta x}| \le e^{|\theta x|} \le e^{|x|}$ を用いて

$$|R_3(f)| = \left| f(x,y) - (1 + x + \frac{1}{2}(x^2 - y^2)) \right| \le \frac{|x|^3 + 3|x|^2|y| + 3|x||y|^2 + |y|^3}{3!} e^{|x|}.$$

誤差の最大値が上で与えられるのだから、一つの <u>誤差の限界</u> と言われる。 $\square$