「III 類 P 組　微分積分学第１演習問題–4 部分的解答例」　井上 淳、06/June/2008

$\boxed{\mathbf{21}}$ 教科書 p.68 の演習問題 A の **1**, **2**, **3** を出来るだけ沢山やってみよ。

● p.68, (A)-1-(1)　$\displaystyle \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \frac{1}{|1-x^2|}.$

教科書の解答では $\dfrac{x}{x^2-1}$ となっている。以下の推論とどちらが正しいか、各自比較し判断せよ。

$$\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \log|1+x| - \log|1-x|$$

と変形し、$-1<x<1$ ならば絶対値を外して計算して良いから

$$\frac{d}{dx}\log|1+x| - \frac{d}{dx}\log|1-x| = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}.$$

同様に計算して

$$x>1 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\log|1+x| - \frac{d}{dx}\log|1-x| = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x^2-1},$$
$$x<-1 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\log|1+x| - \frac{d}{dx}\log|1-x| = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{x^2-1}.\qquad \square$$

● p.68, (A)-1-(9)　$\displaystyle \frac{d}{dx}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b\cos x)}.$

$y=\arctan\phi(x)$, $\phi(x)=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}$ を微分する。

$$\tan y = \phi(x)\quad より\quad \phi'(x) = \frac{dy}{dx}\frac{d\tan y}{dy} = \frac{y'}{\cos^2 y} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\frac{1}{2\cos^2 x/2}$$

となるから、この ϕ と ϕ' の表示を $y' = \dfrac{\phi'}{1+\phi^2}$ に代入して整理すれば

$$y' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2(a+b\cos x)}.\qquad \square$$

$\boxed{\mathbf{23}}$ (1) $y=\sin(a\arcsin\ x)$　(a は定数)　は

$$(1-x^2)y'' - xy' + a^2y = 0 \qquad (-1<x<1)$$

を満たす事を示せ.

(2) $y^{(n)}(0)$　$(n=1,2,\dots)$　を求めよ.

(1) は省略。(2) は (1) に Leibnitz の公式を用いればよい。

$$\frac{d^n}{dx^n}((1-x^2)y''-xy'+a^2y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}((1-x^2)^{(k)}y^{(n+2-k)} - x^{(k)}y^{(n+1-k)} + a^2y^{(n)}$$
$$= (1-x^2)y^{(n+2)} - (2nx+1)y^{(n+1)} - (n^2-a^2)y^{(n)} = 0$$

故に

$$y^{(n+2)}(0) = y^{(n+1)}(0) + (n^2-a^2)y^{(n)}(0)\quad (n\geq 1).$$

$y(0), y'(0), y''(0) = -a^2y(0)$ を用いて、もう少し計算を続けてみよ。

$\boxed{\mathbf{25}}$ 教科書 p.69 の演習問題 A の **5**, **6**, **7** を出来るだけ沢山やってみよ。

$$\bullet \quad \text{p.69, (A)-5-(2)} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{3}.$$

実際、

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad f(x) = \sin^2 x - x^2, \;\; g(x) = x^2\sin^2 x,$$

と変形し $f(0) = g(0) = 0$ だからと l'Hospital の法則で計算しようと思うと厄介である。そこで、$x = 0$ で Taylor 展開し Landau の記号を用いる。

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5), \quad \sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5),$$

より

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+o(x^5)}{x^4+o(x^5)} = -\frac{1}{3}. \qquad \square$$

$$\bullet \quad \text{p.69, (A)-5-(9)} \qquad \lim_{x\to\infty}\left\{x - x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right\} = 1.$$

$y = 1/x$ とし $\log(1+y)$ を $y = 0$ で Taylor 展開し Landau の記号を用いればよい。 $\square$

$$\bullet \quad \text{p.69, (A)-5-(10)} \qquad \lim_{x\to\infty}\log x\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0.$$

$x = e^y$ と変換し、$\log(1+e^{-y}) = e^{-y} + \frac{e^{-2y}}{2} + o(e^{-3y})$ を用いて

$$\log e^y\cdot\log(1+e^{-y}) = y(e^{-y} + \frac{e^{-2y}}{2} + o(e^{-3y})) \to 0 \quad (y\to\infty). \qquad \square$$

============ 付録：不連続点 ============

● 記号論理学の記法を用いて、「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$」の内容を

$$(*) \qquad (\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\neg(n > N) \vee (|a_n - \alpha| < \epsilon)),$$

とし、最後の $\neg(n > N) \vee (|a_n - \alpha| < \epsilon)$ は $(n > N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon)$ と書き換えもした。これより、$(*)$ を記号論理学の操作で否定すると、

$$(\exists\epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})((n > N) \wedge (|a_n - \alpha| \geq \epsilon)),$$

となり、これが『数列 $\{a_n\}$ は α には収束しない』を表していることになる。

● $f(x)$ が $x = x_0$ で連続とは

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)(\neg(|x - x_0| \leq \delta) \vee (|f(x) - f(x_0)| < \epsilon)).(i.e.(|x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon)).$$

$f(x)$ は $x = x_0$ で連続でないとは

$$(\exists\epsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x)((|x - x_0| \leq \delta) \wedge |f(x) - f(x_0)| > \epsilon).$$

問題 $\boxed{\mathbf{17}}$、$[\cdot]$ を Gauss 記号とし $f(x) = [x^2]$ について述べよう。

この関数は $x_0 = \sqrt{1}$ で連続でない。実際、

$$f(x) = [x^2] = \begin{cases} \cdots & \cdots, \\ -1 & -1 \le x < 0, \\ 0 & 0 \le x < 1, \\ 1 & 1 \le x < \sqrt{2}, \\ 2 & \sqrt{2} \le x < \sqrt{3}, \\ \cdots & \cdots \end{cases}$$

となるのだから、$0 < \delta < 1/5$ とするならば $x = 1 + \delta < \sqrt{2}$ より $[(1+\delta)^2] = 1$ で $|f(1+\delta) - f(\sqrt{2})| = 1$。即ち、$\epsilon = 1/2$ とし $0 < \forall\delta < 1/5$ とするならば

$$x_0 = 1.1 \ \text{とすると} \ |x - 1| < \delta \ \text{なるが} \ |f(x_0) - f(1)| \ge 1/2.$$

同じ議論で $x_n = \sqrt{n}$ で不連続である。右極限（連続)、左極限（連続）の概念を用いれば

$$\lim_{x \to \sqrt{n} - 0} f(x) = n - 1, \quad \lim_{x \to \sqrt{n} + 0} f(x) = f(\sqrt{n}) = n.$$

============ 付録：Landau の記号 ============

◎ 数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$、$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ を満たすとする。

● もし、$\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$ ならば、$a_n = o(b_n)$ と記し、 $\{a_n\}$ は $\{b_n\}$ より高位の無限小であるという。これは $n \to \infty$ のとき、数列 $\{a_n\}$ が数列 $\{b_n\}$ より速く 0 に収束するということである。

● ある正数 K が存在して、すべての n に対して $|a_n/b_n| \le K$ が成立するとき、 $a_n = O(b_n)$ と記し、a_n は b_n で押さえられるという。これは $n \to \infty$ のとき、数列 $\{a_n\}$ の 0 への収束の速さが $\{b_n\}$ より速いか、または同程度であることを示す記号である[1]。

◎ $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0, \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ とする。

(i) $\lim_{x\to x_0, x\ne x_0}(f(x)/g(x)) = 0$ ならば、$f(x) = o(g(x))\ (x \to x_0)$、$x_0$ において $f \ll g$ と記し、x_0 において $f(x)$ は $g(x)$ より高位の無限小である[2]という。これは $x \to x_0$ のとき、関数 $f(x)$ が 関数 $g(x)$ より速く 0 に収束するということである。

(ii) また、ある正数 K が存在して、x_0 の近くのすべての x に対して $|f(x)/g(x)| \le K$ が成立するとき、$f(x) = O(g(x))\ (x \to x_0)$、$x_0$ において $f \preccurlyeq g,$ と記し、x_0 において $f(x)$ は $g(x)$ で押さえられるという。これは $x \to x_0$ のとき、数列 $f(x)$ の 0 への収束の速さが $g(x)$ より速いか、または同程度であることを示す記号である。

例１：$a > b$ のとき $x^a = o(x^b)\ (x \to 0)$.

[1] この記号は、数列以外にも用いられる

[2] 或いは「x_0 において $f(x)$ は $g(x)$ に較べて無視できる」

例２：$f=o(1)\ (x\to a) \Longleftrightarrow f(x)\to 0\ (x\to a)$.
$f=O(1)\,(x\to a) \Longleftrightarrow f(x)$ は「a の近く」で有界.

例３：$\sin x = O(1)\ (x\to\infty),\ \ \sin x = O(x)\ (x\to 0)$.

例４：任意の $a>b>0$ に対し $x\to+\infty$ のとき

$$\log\,\log\,x \ll \log\,x \ll x^b \ll x^a \ll e^x \ll e^{e^x}.$$

注意：Landau の記号 $o(h)$, $O(h)$ は関数の具体的な形が必要でなく、その無限小或いは無限大の位数のみが知りたいときに便利。しかし、取扱いには注意が必要。例えば、$o(h)+o(h)=o(h)$ から $o(h)$ を引いて $o(h)=0$ とはできない！

注意：上の例２は奇妙ではないか？確か、２つの関数が共に 0 か $\pm\infty$ に行くときの速度を比較しているのに 1 は 0 でも $\pm\infty$ でもないぞ！

答え：『$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ とする』という仮定をはずしても、２つの連続関数[3]の比の絶対値のある点の近くでの挙動を、「0 に行くか、∞ に行くか、有界であるか」と区別できる。即ち、$g(x)$ が x_0 の近くで 0 でないと仮定して

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \begin{cases} =0 \\ =\infty \\ \le M \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f=o(g) \\ g=o(f) \\ f=O(g) \end{cases}$$

と記すのである。

[3] その「ある点」では定義されていなくとも構わない