「III 類 P 組　微分積分学第１演習問題–3 解答例」　井上 淳、25/May/2008

$\boxed{\mathbf{14}}$ 次の極限値を求めよ。

$$(i)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right),\quad (ii)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!},$$
$$(iii)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!},\quad (iv)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

解答例：(i), (ii) には

$$(*)\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

を用いる。(i) $a_n=1/n$ とすれば $a_n\to 0$ より (*) を用いて $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=0$ となる。

(ii) $\log\sqrt[n]{n!}=\dfrac{\log n!}{n}=\dfrac{\log 1+\log 2+\cdots+\log n}{n}$ であり、$a_n=\log n$ とおくとき $a_n\to\infty$ なることより (*) が $\alpha=\infty$ でも成立している事が分かれば、$\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{n!}=\infty$ であり e の肩に乗せれば $\sqrt[n]{n!}=e^{\log\sqrt[n]{n!}}\to\infty$、即ち、$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$ が従う。

演習中に証明したのは $-\infty<\alpha<\infty$ の場合であった。ここで

$$(**)\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\infty\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\infty$$

を示そう。

そもそも、 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ とは、定義より、どんなに大きな数 G をとっても、ある数 N があって、$n\geq N$ ならば $a_n\geq G$ となること、即ち

$$\forall G,\exists N\ \text{ such that if } n\geq N \text{ then } a_n\geq G.$$

故に

$$\frac{a_N+\cdots+a_n}{n}\geq\frac{n-N}{n}G$$

となる。一方、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{|a_1|+\cdots+|a_{N-1}|}{n}=0$ なのだから、N_1 があって $n\geq N_1\geq 4N$ ならば

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_{N-1}}{n}\right|\leq\frac{G}{8}\ \ (\text{ここは、}\leq\frac{G}{2008}\text{ としてもよい})$$

とできる。これらより $n\geq N_1$ ならば、

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}&\geq-\frac{|a_1|+\cdots+|a_{N-1}|}{n}+\frac{a_N+\cdots+a_n}{n}\geq-\frac{|a_1|+\cdots+|a_{N-1}|}{n}+\frac{n-N}{n}G\\&\geq-\frac{G}{8}+(1-\frac{1}{4})G=\frac{5}{8}G.\end{aligned}$$

即ち、$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\infty$.

(iii) まず

$$n<n!=1\cdot 2\cdots n<n^n\Longrightarrow\sqrt[n^2]{n}<\sqrt[n^2]{n!}<\sqrt[n^2]{n^n}=n^{1/n}$$

なることを注意する。また、

$$\log\sqrt[n^2]{n}=\frac{\log n}{n^2}\to 0,\quad \log\sqrt[n^2]{n^n}=\frac{\log n}{n}\to 0\quad\text{より}\quad\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n^2]{n!}=0,\quad i.e.\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=1.$$

(iv) これを示す為には、以下の事柄を用いる（証明は後で）。

$a_n>0$ とする。このとき
$$(\text{ア})\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\ell\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\ell,$$
$$(\text{イ})\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\ell.$$

$b_n = \left(\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^n$ とおくと

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \quad (n\to\infty).$$

(イ) を認めれば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$

まず (ア) を示す。$\ell \geq 0$ より $\log\, 0 = -\infty$ と規約して $\log\, a_n \to \log\, \ell$ となる。上に述べた (**) は極限が $-\infty$ に対しても成立するから、$\log\, \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \dfrac{\log\, a_1 + \cdots + \log\, a_n}{n} \to \ell$ となる。

次に、(イ) を示す。$c_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ とおくと

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = c_{n-1} c_{n-2} \cdots c_1 \cdot a_1$$

となる。仮定より $c_n \to \ell$ であり、(ア) を用いて

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{c_{n-1} c_{n-2} \cdots c_1} \sqrt[n]{a_1} \to \ell. \qquad \Box$$

16 (i) $0 < |x-4| < \delta$ なら必ず $|\sqrt{x}-2| < 0.01$ となるような δ を一つ定めよ。
(ii) $\epsilon > 0$ とするとき、$0 < |x-4| < \delta$ なら必ず $|\sqrt{x}-2| < \epsilon$ となるような δ を (ϵ に応じて) 一つ定めよ。

これは是非やって欲しい。(i) の答えのみ与える。$|\sqrt{x}-2| < 0.01$ となるのだから

$$-0.01 < \sqrt{x} - 2 < 0.01 \Longrightarrow 1.99 < \sqrt{x} < 2.01 \Longrightarrow 3.9601 < x < 4.0401$$

となる。即ち

$$-0.0399 < x - 4 < 0.0401 \text{ だから、} \delta = 0.0399 \text{ ととれば必ず } |\sqrt{x}-2| < 0.01 \text{ となる,}$$

勿論 $\delta = 0.039$ ととってもよいが、$\delta = 0.04$ とすると

$$1.98997 < \sqrt{x} < 2.00998 \text{ だから、} |\sqrt{x}-2| < 0.01 \text{ とはならない。}$$

17 次の関数について連続ではない点の集合を求め、その点が連続点でない事を $\epsilon - \delta$ 論法で説明せよ。

$$(1)\ [x^2], \quad (2)\ [\sin\, x], \quad (3)\ x - [x].$$

問題：「連続点でない事」をどう示すか。

19 $f(x) = \arctan\, x$ に対し $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

教科書 P.43 の例 7 では $f(x) = \arcsin\, x$ について計算してある。これを真似してやれば良い。

20 ルジャンドル多項式 $P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ とおく。次を示せ。

$$(x^2-1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$$

これは教科書 P.43 の例 8 に解答が説明してある。答案用紙にこの解答を理解しながら写せば、正解になる。昔はコピー機がなかったので数少ない出版物を写して勉強したのだが、紙と鉛筆で勉強するのは思いのほか有用である！

============ 否定命題の作り方 (1)： 集合演算と命題論理 ============

集合演算

以下、A, B, C で集合 X の部分からなる集合を表す。そのとき、差集合、和集合、共通部分集合、補集合なる概念を決める。

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}, \quad A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ か、或いは } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}, \quad A^c = X - A = \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \notin A\} = \{x \mid \text{（或いは単に）} x \notin A\},$$

すると、以下のような演算が成立する。

$$X^c = \emptyset = A \cap A^c, \quad A \cup A^c = X, \quad (A^c)^c = A, \quad A - B = A \cap B^c$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C), \quad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C),$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \quad \text{(de Morgan's law)}.$$

これらの性質は、２つの集合 A、B を大きな丸で描きその位置関係を確かめ、$A \cup B$、$A \cap B$ がどの部分を表すか少し考えると分かる。

命題論理について

『数列 $\{a_n\}$ が α に収束する』の否定命題『数列 $\{a_n\}$ は α に収束しない』とはどういうことか考えてみよう。

$$\text{数列 } \{a_n\} \text{ は } \alpha \text{ に収束しない。} \Longleftrightarrow (\exists \epsilon)(\forall N)\neg(\forall n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| \leq \epsilon).$$

ところで、$(\forall n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon)$ の否定が $(\forall n > N$ かつ $|a_n - \alpha| \geq \epsilon)$ となることは、以下の記号論理学の記述[1]を見ると推定できるであろう：まず、$(\neg A) \vee B$ を $A \Rightarrow B$ と記述することにする。

$$(\neg A) \vee B \equiv (A \Rightarrow B), \quad \neg(A \Rightarrow B) \equiv \neg((\neg A) \vee B) \equiv A \wedge (\neg B),$$
$$\neg(\neg(A \Rightarrow B)) \equiv \neg(A \wedge (\neg B)) \equiv (\neg A) \vee B \equiv (A \Rightarrow B).$$

上に述べた集合の演算と記号論理での演算を比較しておこう。

$$\neg A \longleftrightarrow A^c, \quad A \vee B \longleftrightarrow A \cup B, \quad A \wedge B \longleftrightarrow A \cap B.$$

演習問題 0.1 そして、『数列 $\{a_n\}$ は収束しない』をどう表現したらよいか考えてよう。証明は与えていないが、『数列が収束する』と『数列が *Cauchy* 列をなす』とは同等であったことを思い出すと良い。

============ 否定命題の作り方 (2) 具体例 ============

『この数列は収束しない』をどう示すのか？ – 一体何を問題にしているのか？

数学的思考の一つの特徴として、背理法なるものがあることを強調し、これは「計算機にはできないぞよ」と誇らしげに言ってきた。しかし、背理法を駆使するためには、「ある命題を否定する」とは何か をはっきり認識する必要がある。この立場で、『この数列は収束しない』をどう示すのか？に一つの解答を与えよう。

[1] 以下の命題は集合論との比較で納得し易いだろう。集合論の方はこれは図視化できる、ベン図とかいうのでは？

重要な注意 ：『すべての星は赤い』と主張している人には、『少なくとも一つは赤くない星がある』、ほらあそこに見える星は赤くないだろう、と見せれば、その主張を否定できたことになろう。とはいえ、「君は何故あれを星というのかね。私の辞書では赤くないものは星とは言わない。星といわれるものの必要条件は色が赤いということなのだよ」と言われると延々と議論が続きそうである。『すべての星は赤い』と主張している人が生き残れば、それが正しいことになるのが、世の中である。

数学界では『すべての星は赤い』という主張の否定は『少なくとも一つは赤くない星がある』である、と理解されている。それ故に、主張する人の生存、非生存や悪人、善人等の属性には影響されずに、主張する内容が正しいと判定されると何千年も正しいこととして通用してきている。

> もっとも、どのみち正しいと判定するのは人間なのだから、間違わないためにはどうしたらよいかと色々の工夫をしてある。最大の工夫は「証明」であり、それの根幹は正しい仮定から、適切な推論のもと、正しい結論を導くことにある[2]。但し、この書き方だとトートロジー[3]だと言われかねないのだが。

これからは、証明というものがあって、その推論を了解すれば、その証明付き命題の内容を生理的に嫌だとしても認めるという立場の人しかいないという世界に住んでいるとして、論理なるものを考えていく。

素朴な問題 ：『数列 $\{a_n\}$ は α に収束する』という命題の否定をどう示したら良いか？更に、数列が与えられたとき、『この数列は収束しない』をどう表現したらよいのか？

さて『数列 $\{a_n\}$ は α に収束する』という事柄は、

「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$」とか「$a_n \to \alpha\ (n\to\infty)$」とか「$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$」

等と表記されるが、これはどういう内容の事柄か？我々はこれを

> 任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある自然数 N があって、「$n > N$ を満たすすべての自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \epsilon$ となる」ことをいう、

と書いて、これが定義だと宣言し、これで上の表現形態「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$」を用いればこの内容として万国共通に伝わるとした。

記号論理学の記法を用いて、「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$」の内容を

$$(*) \qquad (\forall\epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(\neg(n > N) \vee (|a_n - \alpha| < \epsilon)),$$

とし、最後の $\neg(n > N) \vee (|a_n - \alpha| < \epsilon)$ は $(n > N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon)$ と書き換えもした。これより、$(*)$ を記号論理学の操作で否定すると、

$$(\exists\epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N})((n > N) \wedge (|a_n - \alpha| \geq \epsilon)),$$

となり、これが『数列 $\{a_n\}$ は α には収束しない』を表していることになる。

=======================================

「ある関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で連続である」の定義は「どんなに小さな数 $\epsilon > 0$ に対してもある数 $\delta > 0$ があって、もし x が $|x - x_0| \leq \delta$ を満たすならば、$|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$ となる」であった。

$$(a) \quad (\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)((|x - x_0| \leq \delta) \Longrightarrow (|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon))$$

[2]仮定から適切な推論で結論を導くだけで、論理学的には正しい作業をしていることになる。ところで、「太陽が西から上がれば、臍で茶を沸かしてやる」という命題は論理学的には間違っていない、ことには注意

[3]tautology：同義語反復

この (a) の否定はどうなるか？或は、関数 $f(x)$ は $x = x_0$ で連続でないは (a) の記述のような形態ではどうなるべきか？

これについては、次回に説明するが、「ある数列がある数には収束しない」との類似で考えておいて欲しい。

他の問題は各自解けるはずである。

==

序でに「警句」: 上に「日本数学界はいざ知らず世界規模では、主張する人の生存、非生存や悪人、善人等の属性には影響されずに、主張する数学的内容が正しいと判定されると何千年も正しいこととして通用してきている。」と書いた (Teichmuller は熱烈なナチ信奉者だったが、その数学は認められユダヤ系の数学者によって進化させられている)。何故か？翻って日本ではどうか？

人間の能力が発揮されるには「天の時・地の利・人の和」の三条件の充足が必要。日本ではこの「人の和」が特に重んじられる。結果として、「何をやっているのか」という内容よりも、「誰がやっているか」という “ひと”を重く見る悪癖がある。『童門冬二「改革者に学ぶ人生論」（講談社文庫）p.87 からの抜粋。』