

14 次の極限值を求めよ。

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right), \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!},$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!}, \quad (iv) \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

15 次の極限值を求めよ。

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}), \quad (ii) \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{x - \pi/4},$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}, \quad (iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+ax)}{x}.$$

16 (i) $0 < |x-4| < \delta$ ならば必ず $|\sqrt{x}-2| < 0.01$ となるような δ を一つ定めよ。

(ii) $\epsilon > 0$ とするとき、 $0 < |x-4| < \delta$ ならば必ず $|\sqrt{x}-2| < \epsilon$ となるような δ を (ϵ に応じて) 一つ定めよ。

17 次の関数について連続ではない点の集合を求め、その点が連続点でない事を $\epsilon - \delta$ 論法で説明せよ。

$$(1) [x^2], \quad (2) [\sin x], \quad (3) x - [x].$$

注: $[x]$ は Gauss ガウス記号である。関数のグラフを書いて説明して欲しい。

18 次の n 次導関数を求めよ。

$$(1) \log(a^2 - x^2) \quad (a > 0, |x| < a), \quad (2) x^2 \sin x, \quad (3) \cos x \cos 2x.$$

19 $f(x) = \arctan x$ に対し $f^{(n)}(0)$ を求めよ。

20 ルジャンドル多項式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ とおく。次を示せ。

$$(x^2 - 1)P_n''(x) + 2xP_n'(x) - n(n+1)P_n(x) = 0$$