

9  $b > a > 0$  とし、数列  $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty$  を

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$$

と定めるとき、 $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  が存在することを示せ。

(ヒント:  $a_1, b_1, a_2, b_2$  について如何なる大小関係があるか確かめ、第  $n$  項について推定し、それを数学的帰納法で示せ。「上に有界な単調増加列は収束する」に帰着させる!)

解答例: (i)  $a_0 = a < b = b_0$  より

$$a < a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} < b_0 = b, \quad \text{これより } a_1 a_1 < a_1 b_0, \quad a_1 < b_1, \quad a < b_1 = \sqrt{a_1 b_0} < b$$

となる。推定

$$a < a_n < b, \quad a < b_n < b, \quad a_n < b_n$$

して、帰納法で証明する。実際

$$a_n < b_n \implies a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{b_n + b_n}{2} = b_n \implies a_{n+1}^2 < a_{n+1} b_n \implies a_{n+1} < b_{n+1}$$

これらにより、 $a_n, b_n$ , それぞれが  $\alpha, \beta$  に収束する事が分かる。次に

$$0 \leq \beta - \alpha \leq b_{n+1} - a_{n+1} = b_{n+1} - \frac{b_n^2}{b_n} = b_{n+1} \left( \frac{b_n - b_{n+1}}{b_n} \right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

だから、収束先は一致する。  $\square$

11  $a_n > 0, b_n > 0$  とし

$$c_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad d_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

とおく。このとき、 $\{c_n\}$  が増加列ならば  $\{d_n\}$  も増加列である事を示せ。

解答例: まず

$$\begin{aligned} & (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1})(b_1 + \cdots + b_n) - (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n + b_{n+1}) \\ &= a_{n+1}(b_1 + \cdots + b_n) - (a_1 + \cdots + a_n)b_{n+1} \\ &= (a_{n+1}b_1 - a_1b_{n+1}) + (a_{n+1}b_2 - a_2b_{n+1}) + \cdots + (a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}) \\ &= b_{n+1} \left( \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_1}{b_1} \right) b_1 + b_{n+1} \left( \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_2}{b_2} \right) b_2 + \cdots + b_{n+1} \left( \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} \right) b_n \\ &= b_{n+1} [(c_{n+1} - c_1)b_1 + (c_{n+1} - c_2)b_2 + \cdots + (c_{n+1} - c_n)b_n] \end{aligned}$$

に注意する。 $\{c_n\}$  が増加列、即ち、 $c_{n+1} - c_n \geq 0$  より

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= \frac{(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1})(b_1 + \cdots + b_n) - (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n + b_{n+1})}{(\sum_{k=1}^{n+1} b_k)(\sum_{k=1}^n b_k)} \\ &= \frac{b_{n+1} [(c_{n+1} - c_1)b_1 + (c_{n+1} - c_2)b_2 + \cdots + (c_{n+1} - c_n)b_n]}{(\sum_{k=1}^{n+1} b_k)(\sum_{k=1}^n b_k)} \geq 0. \quad \square \end{aligned}$$