「III 類 P 組　微分積分学第１演習問題–2」　井上 淳、08/May/2008 revised.

第２回目の演習時に手渡したものを修正したものである。以下は主として 2005 年度の染川先生の演習、及び詳説演習「微分積分学」培風館等から借用した。

$\boxed{\textbf{9}}$ $b > a > 0$ とし、数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$a_0 = a, \quad b_0 = b, \quad a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$$

と定めるとき、$\ell = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ が存在することを示せ。
(ヒント：a_1, b_1, a_2, b_2 について如何なる大小関係があるか確かめ、第 n 項について推定し、それを数学的帰納法で示せ。「上に有界な単調増加列は収束する」に帰着させる！)

注意:演習時、この問題にはプリントミスがあるとしていたが、そうではなくこのまま問題として成立する。以下の問と比較しながらヒントに従って考えてみよ。

$\boxed{\textbf{9-bis}}$ $a_0 > b_0 > 0$ とする。$n \geq 1$ に対し

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

と定めるとき、数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ は同じ値に収束する事を示せ。

$\boxed{\textbf{10}}$ 次の主張を示せ。

$$(1)\ \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \alpha \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha.$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = \alpha.$$

$\boxed{\textbf{11}}$ $a_n > 0,\ b_n > 0$ とし

$$c_n = \frac{a_n}{b_n}, \quad d_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

とおく。このとき、$\{c_n\}$ が増加列ならば $\{d_n\}$ も増加列である事を示せ。

$\boxed{\textbf{12}}$ 次の式を証明せよ。

$$(1) 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}, \quad (2) \arcsin\sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \arccos x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ \pi - \arccos x & (-1 \leqq x \leqq 0) \end{cases}.$$

$\boxed{\textbf{12-bis}}$ 次の式を証明せよ。

$$(1) \arctan|x| = \frac{1}{2}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad (2) 2\arcsin\sqrt{x} + \arccos(2x-1) = \pi\ (0 \leqq x \leqq 1),$$

$\boxed{\textbf{13}}$ 次を双曲線関数という。x の定義域は実数全体とする。例えば $\sinh x$ はハイパボリック・サイン (双曲正弦) と読む。

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

これら３つの双曲線関数の値域を求め、その逆関数を対数関数を用いて表せ。

注：双曲線関数は次の性質を満たしている。

(i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$　(ii) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$　(iii) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
(iv) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$　(v) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sinh x}{x} = 1$　これらを示せ。