

1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$ なることを証明せよ。

2 関数 $f(x, y) = \log \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right)$ を $(0, 1)$ で Taylor 展開せよ。但し、2 次までを計算し、その剰余項 R_3 を表示すればよい。

3 関数 $f(x, y) = (x - y)e^{-(x^2 + y^2)}$ について、

(a) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ をすべて求めよ。

(b) 極値をとる点を求め、極大・極小を判定せよ。

(c) $\lim_{x^2 + y^2 \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$ を示せ。更に、 $f(x, y)$ は \mathbb{R}^2 上で最大値・最小値を持つことを示し、その値を求めよ。

4 t に関する関数 $(x(t), y(t))$ が以下の微分方程式を満たすとする。

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = (1 - (x(t)^2 + y(t)^2))x(t) - y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = (1 - (x(t)^2 + y(t)^2))y(t) + x(t). \end{cases}$$

これを $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$, $\theta(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}$ と変数変換し、 $\frac{dr(t)}{dt}$ 及び $\frac{d\theta(t)}{dt}$ を $(r(t), \theta(t))$ を用いて表せ。