「III 類 P 組　微分積分学第１演習期末試験解答例」　井上 淳、07/August/2008

期末試験の配点は以下に記してある。評点は期末試験が 60 点に満たない者には「出席点 4× 出席回数＋メール等による授業感想文 5 点」を加え 60 点とし、それ以下は不合格とした。不合格者は期末試験に欠席した者（答案用紙が提出されていない）を含め 7 名であった。演習の最初に出席点の配点を多くすると述べたが、極めて出席率は良かった!

期末試験で 90 点以上の高成績をとった人々の番号を記して健闘を称える：

09760, 16109, 20737 ,13217, 02142, 03561,18746, 20826, 21412, 21850, 25410, 27188

答案用紙は返却します。本館（正面から見て）左翼３階数学事務室（数学図書室向かい）に、0-999, 1000-1999, 2000- と 3 つの袋に分けて置いてあります。自分のものだけを取り出して下さい。採点に疑義がある場合はメールで連絡してきた人とは、答案用紙持参で会う事にします。

——————— 解答例はどこまで書けば良いのか？ ———————

かなりの人から、以下と同趣旨の感想があった。

> ウェブ上で公開されている解答が省略されていたり途中で終わっていたりして問題を解くことができず、一問ごとに膨大な時間を要しました。解答がしっかりしていないとあのレベルの問題は解けません。なので簡単な問題でも自分の答えの確認をするために解答はしっかりのせるべきだと思います。

「あのレベルの問題」というが、大部分は教科書の「易しい程度とされている問題」であり、略解が載せられているものもあった[1]。そこで少し質問をしましたが、返事がありません。それを詳しくした質問が以下になりますが、誰でも意見を下さい。

> どの問題の解答が「省略されていたり途中で終わっていたりして」いたと感じたのでしょうか？また、「一問ごとに膨大な時間を要しました。」とありましたが、どの問題を何時間位考えたのでしょうか？できるだけ具体的に（この演習問題何番はこういうように考えだめだったのでこう考え直した。結局＊時間考えたのだがそれでも分からなかった[2]。友達にも聞いたり数学相談室に行っても釈然としない等）教えて下さい。

下に引用した本の中に、例えば道順を表示するとき、その箇所を詳細な写真で示すのと、デフォルメした絵で目印の建物等を書いたものと、どちらが分かり易いか、という文章があります。何でもデジタル化して詳しく書けばそれで用は足りるというのは本当かどうかも考えると良いでしょう。「生理的な脳」はどちらの方が分かり易いのか？脳を使うという事と身体を使うという事の「違い」もなかなか面白そうです。

授業中、「すぐできるように見える問題」以外は「解けないかもしれない」からか、差し当たり「面倒」と言ってしまう癖を多くの諸君が持っているように見受けられる事が気になりました。「馬には乗ってみよ、人

[1] 教科書の選定が学生諸君の現時点の理解力と合っていないおそれ！
[2] 良いアドバイスは、「それではこう考えたらどうだろうか」とし、大概しばらくすると「あっ、分かった」となるものです

には添うてみよ」[3]という言葉が昔はあったのですが、知っていますか？どんな問題でもどの程度難しいのかという感触を得られる程度にもうちょっとは考えてみませんか。どんな問題でも、少なくとも忍耐と努力で解けるのか、今までのとは違う新しい考え方が必要なのかどうか、ぐらいの見当は付けてみて、後で自分の勘が正しかったかどうかを確かめてみたらどうでしょうか？「わからないから、駄目もとでやってみよう」というのは若者の最大の利点なのです！

参考までに：私が中学生の頃の初等幾何の問題は補助線をどうしたら引けるのか分からず、１週間程度は折に触れ考える事をしていたというかすかな記憶があります。そのようなとき、「こうしたらどうだろう」の果てに「あっ、分かった」となると大いに嬉しかったものです[4]。このような経験がある人は理系、文系に限らずいますが、老人になっても初等幾何の問題を考えるのが好きという人は君の周りにもいませんか？

感想文もホームページに収録しておきました。仲間がどのような授業感想を書いているのか、確かめると面白いでしょう。

==

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$ なることを証明せよ。

注意：この問題に関する答えは演習中にも説明し、また「微分積分学第１演習問題–3 解答例」にも書かれている。

解答例 [20]：$a_n=\sqrt[n]{n!}$ とおく。(i) 対数を取って $b_n=\log a_n=\dfrac{\log 1+\log 2+\cdots+\log n}{n}$ とおく。$c_n=\log n$ とすると、$\lim_{n\to\infty}c_n=\infty$ である。ところで「収束する数列の算術平均は同じ数に収束する」ということは「有限な数に収束する時」には演習でも証明した。教科書には「無限大に収束する数列の場合にも成立する」と書かれているが、それを了解していれば、

$$\lim_{n\to\infty}\log n=\infty \quad \text{より} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\log 1+\log 2+\cdots+\log n}{n}=\infty$$

となり、これを指数の肩に乗せれば、指数関数の連続性より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$ となる。

(i-bis) 「無限大に収束する数列の算術平均は無限大に収束する」。記号で書けば

$$(**)\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\infty\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\infty.$$

ここで、$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ とは、定義より、どんなに大きな数 G をとっても、ある数 N があって、$n\geq N$ ならば $a_n\geq G$ となること、即ち

$$\forall G,\exists N\ \text{ such that if } n\geq N \text{ then } a_n\geq G.$$

これより、ある数 N があって、$n\geq N$ ならば

$$\frac{a_N+\cdots+a_n}{n}\geq\frac{n-N}{n}G$$

[3]馬のよしあしは乗ってみなければわからず、人柄のよしあしはつきあってみなければわからないことから転じたことわざ。「イケメン」というだけでその人を受け入れる風潮と関連するかもしれません。もっとも男というものは女の武器を備えた蠱惑的美女に昔から弱かったな！九牛の一毛、傾国の美女、傾城等という言葉も思い出しておこう

[4]本当に「正しく理解したのか」は問題でしょうが、このような体験を重ねていくうちに、自ずと「先ずこれで大丈夫」と「腑に落ちて」感じる事ができるようになるものです。「腑に落ちること」を実感するのに数学という学問体系は最適なのです（本当に分かったのかどうか、他人に説明可能で、それが証明なのです。平面上という「理想的な」状態ですが、ピタゴラスの定理は 2000 年以上「正しい」しこれからも「正しくあり続けるでしょう。物理ですと「天動説から地動説」まで変わりうるのです)。もっとも、全く別に「コレデヨイノダ」と思える「パパ」もいますが同じようなものかもしれません

となる。一方、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|a_1|+\cdots+|a_{N-1}|}{n}=0$ なのだから、N_1 があって $n\geq N_1\geq 4N$ ならば

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_{N-1}}{n}\right|\leq\frac{G}{8}\ \ (\text{ここは、}\leq\frac{G}{2008}\text{ としてもよい})$$

とできる。これらより $n\geq N_1$ ならば、

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq-\frac{|a_1|+\cdots+|a_{N-1}|}{n}+\frac{a_N+\cdots+a_n}{n}&\geq-\frac{|a_1|+\cdots+|a_{N-1}|}{n}+\frac{n-N}{n}G\\&\geq-\frac{G}{8}+(1-\frac{1}{4})G=\frac{5}{8}G.\end{aligned}$$

即ち、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\infty.$

(ii)[別法] $b_n>0$ のとき $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\ell\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\ell$ が $0\leq\ell\leq\infty$ で成立する事を用いても良い。この事実の証明は「微分積分学第 1 演習問題–3 解答例」を見て、必要ならば各自証明を補って考えよ。

$b_n=n!$ とおくと、$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$ なので、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$ となる。

(iii)[別法] 高校時代の積分の知識を用いる。

$$\int_1^n\log xdx<\sum_{k=1}^n\log k<\int_1^{n+1}\log xdx,\quad\int_1^n\log xdx=\int_1^n x'\log xdx=x\log x\Big]_1^n-\int_1^n dx=n\log n-n+1$$

を用いて

$$\frac{n\log n-n+1}{n}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\log k<\frac{(n+1)\log(n+1)-n}{n}.$$

$n\to\infty$ のとき第 1 項と第 3 項はともに無限大に発散するから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$ である。これも正解とした。

採点：「無限大に収束する数列の算術平均は無限大に収束する」の証明の無い者は 10 点とした。この方法とは独立に積分を用いた解答もかなり見受けられたが、筋が通っていれば勿論満点とした。積分は後学期に大学流に習うであろう。

注意：上述したように「完全な証明を書いておいて欲しい」という要望が多い。考える事をせず、何かで読んで「どこそこに書いてあったから知っている」と考えている人が多いようにも思える。この夏休みに、

橋本治『「わからない」という方法』[5]集英社新書、 税込み 735 円

を斜め読みでもしたらどうだろうか。同感のところには赤線を、その考えには違和感があるところには青線を引くという操作をしたらどちらの色が多くなるだろうか。僅か 20 年弱とはいえ、自分の考え方、生き方を見つめ直す良い機会になるかもしれない[6]。その本の最初に書かれている次の「文章」だけでも気に留めておくと良いだろう：

『二十世紀は「わかる」が当然の時代だった。自分は分からなくても、どこかに「正解」はある ー 人はそのように思っていた。既にその「正解」は どこか[7]にあるのだから、（わからないことが）[8]恥ずかしいのだと

[5]私が丁度見つけた本ではあるが

[6]こんなお節介な先生は私の 60 年余のなかにはいなかった。と書いたが思い出した。高校 2 年か 3 年の時（約半世紀前）、読書好きの物理の先生が、確か、E. カッシーラ （宮城音弥訳）「人間」岩波現代叢書は面白い、また彼はその頃発刊された「和辻哲郎全集」についても「お金があるなら買っておくと良い」と言っておられたことを。全集は両親に言って買っては貰ったものの、結局 40 年間にほんの少しだけ読み、引っ越しで売り払ってしまった

[7]本では縦書きで傍点

[8]括弧内は井上が補完した言葉

したら、その「正解」を知らないでいることが恥ずかしいのであり、「正解」が存在することを知らないでいることが恥ずかしかったのである。だから、人は競って大学へ行ったし、子供達を競わせて大学に行かせた。ビジネスの理論書を必死になって読み漁ったし、誰よりも早く「先端の理論」を知りたがった。それをすることと、現実に生きる自分達が知らないままでいる「正解」を手に入れることとは、イコールだと思っていたのである。』

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x,y) = \log\left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)$ を $(0,1)$ で Taylor 展開せよ。但し、2 次までを計算し、その剰余項 R_3 を表示すればよい。

試験中のヒント：1 変数関数 $g(t)$ の Taylor 展開を

$$g(t) = g(0) + \frac{t}{1!}g'(0) + \frac{t^2}{2!}g''(0) + R_3,\quad R_3 = \frac{t^3}{3!}g'''(\theta t)\ (0<\theta<1)$$

と書く。与えられた $f(x,y)$ に対し $g(t) = f(tx, 1+t(y-1))$ とおくと、$g(0) = f(0,1)$ かつ $g(1) = f(x,y)$ である。

解答例 [30]：$g(t) = f(tx, 1+t(y-1))$ を t に関し微分すると、

$$\begin{aligned}
g'(t) &= xf_x(tx, 1+t(y-1)) + (y-1)f_y(tx, 1+t(y-1)),\\
g''(t) &= x^2 f_{xx}(\cdots) + 2x(y-1)f_{xy}(\cdots) + (y-1)^2 f_{yy}(\cdots),\\
g'''(t) &= x^3 f_{xxx}(\cdots) + 3x^2(y-1)f_{xxy}(\cdots) + 3x(y-1)^2 f_{xyy}(\cdots) + (y-1)^3 f_{yyy}(\cdots)
\end{aligned}$$

となる。故に、$(*) = (\theta x, 1+\theta(y-1))$ とおいて

$$g'(0) = xf_x(0,1) + (y-1)f_y(0,1),\ g''(0) = x^2 f_{xx}(0,1) + 2x(y-1)f_{xy}(0,1) + (y-1)^2 f_{yy}(0,1),$$
$$g'''(\theta) = x^3 f_{xxx}(*) + 3x^2(y-1)f_{xxy}(*) + 3x(y-1)^2 f_{xyy}(*) + (y-1)^3 f_{yyy}(*),$$

であり、$r = \sqrt{x^2+y^2}$ とおくと

$$r_x = \frac{x}{r},\ \ r_y = \frac{y}{r},\ \ r_{xx} = \frac{y^2}{r^3},\ \ r_{xy} = -\frac{xy}{r^3} = r_{yx},\ \ r_{yy} = \frac{x^2}{r^3},$$
$$r_{xxx} = -\frac{3xy^2}{r^5},\ \ r_{yxx} = \frac{2x^2y - y^3}{r^5},\ \ r_{yyx} = \frac{2xy^2 - x^3}{r^5},\ \ r_{yyy} = -\frac{3x^2y}{r^5}$$

となる。これを用いて、

$$f_x = \frac{r_x}{y+r} = \frac{x}{r(y+r)},\ \ f_y = \frac{1+r_y}{y+r} = \frac{1}{r},$$
$$f_{xx} = \frac{y^3 + r(y^2-x^2)}{r^3(y+r)^2},\ \ f_{xy} = f_{yx} = -\frac{x}{r^3},\ \ f_{yy} = -\frac{y}{r^3},$$
$$f_{xxx} = \frac{2x^4 - 2y^4 + 3xy^3 - ry^2(2y+4x)}{r^5(y+r)^2},\ \ f_{xxy} = \frac{2x^2-y^2}{r^5(y+r)^2},$$
$$f_{xyy} = -\frac{3xy}{r^5},\ \ f_{yyy} = -\frac{x^2-2y^2}{r^5}$$

だから

$$f(0,1) = \log 2,\ \ f_x(0,1) = 0,\ \ f_y(0,1) = 1,\ \ f_{xx}(0,1) = 2,\ \ f_{xy}(0,1) = f_{yx}(0,1) = 0,\ \ f_{yy}(0,1) = -1$$

となる。即ち、

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + \frac{1}{3!}g'''(\theta) \\
=& f(0,1) + (xf_x(0,1) + (y-1)f_y(0,1)) + \frac{1}{2!}(x^2 f_{xx}(0,1) + 2x(y-1)f_{xy}(0,1) + (y-1)^2 f_{yy}(0,1)) \\
&+ \frac{1}{3!}(x^3 f_{xxx}(*) + 3x^2(y-1)f_{xxy}(*) + 3x(y-1)^2 f_{xyy}(*) + (y-1)^3 f_{yyy}(*)) \\
=& \log\, 2 + (y-1) + \frac{1}{2!}(2x^2 - (y-1)^2) + R_3,
\end{aligned}
$$

$$
3!R_3 = x^3 f_{xxx}(*) + 3x^2(y-1)f_{xxy}(*) + 3x(y-1)^2 f_{xyy}(*) + (y-1)^3 f_{yyy}(*),
$$

となる。$f_{xxx}(*) = f_{xxx}(\theta x, 1+\theta(y-1))$ 等についてはここでは書き上げない。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x,y) = (x-y)e^{-(x^2+y^2)}$ について、

(a) f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} をすべて求めよ。

(b) 極値をとる点を求め、極大・極小を判定せよ。

(c) $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = 0$ を示せ。更に、$f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で最大値・最小値を持つことを示し、その値を求めよ。

解答例 [30]：(a)

$$
\begin{aligned}
&f_x = (-2x(x-y)+1)e^{-(x^2+y^2)}, \quad f_y = (-2y(x-y)-1)e^{-(x^2+y^2)}, \\
&f_{yx} = 2(x-y)(1+2xy)e^{-(x^2+y^2)} = f_{xy}, \\
&f_{xx} = (-6x+2y+4x^2(x-y))e^{-(x^2+y^2)}, \\
&f_{yy} = (-2x+6y+4y^2(x-y))e^{-(x^2+y^2)}.
\end{aligned}
$$

(b) $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ となる (x,y) は、簡単な計算で $(1/2,-1/2)$ と $(-1/2,1/2)$ であることが分かる。そこでの Hessian を計算する。

$$
(Hf)(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{yx}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}
$$

だから

$$
(Hf)(1/2,-1/2) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad (Hf)(-1/2,1/2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

となる。故に、$(Hf)(1/2,-1/2)$ は負定値行列（$\because f_{xx}(1/2,-1/2) < 0, (f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy})(1/2,-1/2) = -8e^{-1/2} < 0$）、$(Hf)(-1/2,1/2)$ は正定値行列（$\because f_{xx}(-1/2,-1/2) > 0, (f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy})(-1/2,1/2) = -8e^{-1/2} < 0$）だから、$(1/2,-1/2)$ は極大点で、極大値は $f(1/2,-1/2) = e^{-1/2}$、また、$(-1/2,1/2)$ は極小点で、極小値は $f(-1/2,1/2) = -e^{-1/2}$ である。

(c) $|x-y| \le |x| + |y| \le (2(x^2+y^2))^{1/2}$ を用いて

$$
\lim_{(x,y)\to\infty} |f(x,y)| \le \lim_{r\to\infty} 2^{1/2} r e^{-r^2} = 0.
$$

これより、$\sqrt{x^2+y^2} \ge R$ ならば $|f(x,y)| \le 2^{-1}e^{-1/2}$ となるように $R > 1$ を大きくとれる。そこで $B_R = \{(x,y) \mid r^2 = x^2+y^2 \le R\}$ とすると B_R は有界閉集合で $f(x,y)$ は連続関数だから B_R 上で最大値、最小値を持つ。極大点と極小点は明らかに B_R の内部にあり、さらに B_R の境界上では $2^{1/2}Re^{-R^2} < 2^{-1}e^{-1/2}$ となる

ように R がとれるから、極大点と極小点は最大点と最小点となっている。B_R の外側では $|f(x,y)| \le 2^{-1}e^{-1/2}$ だから、結局 $f(x,y)$ の最大点は $(1/2,-1/2)$、最小点は $(-1/2,1/2)$ で、その値は既に求めたものである。

$\boxed{\mathbf{4}}$ t に関する関数 $(x(t),y(t))$ が以下の微分方程式を満たすとする。

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = (1-(x(t)^2+y(t)^2))x(t)-y(t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = (1-(x(t)^2+y(t)^2))y(t)+x(t). \end{cases}$$

これを $r(t)=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}$, $\theta(t)=\arctan\dfrac{y(t)}{x(t)}$ と変数変換し、$\dfrac{dr(t)}{dt}$ 及び $\dfrac{d\theta(t)}{dt}$ を $(r(t),\theta(t))$ を用いて表せ。

解答例 [20]：$x(t)$ 等の (t) を「間違いが起こりにくいと考えられるとき」は省略する。微分方程式の第 1 式に x を第 2 式に y を掛け、両辺をそれぞれ足し合わせる。

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = \dot{x}x+\dot{y}y = (1-(x^2+y^2))(x^2+y^2) \Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}r^2 = (1-r^2)r^2 \Longrightarrow \underline{\dot{r}=r(1-r^2)}.$$

一方

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tan\theta &= \frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{d}{dt}\frac{y}{x} = \frac{\dot{y}x-y\dot{x}}{x^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2} \end{aligned}$$

より

$$\underline{\dot{\theta}=1}$$

となる。