スーパー解析学の基礎　第14回講義予定 – 09-01-30　　井上 淳

1 非可換解析学の必然性とは、そしてそのご利益は？

2 Dirac 方程式と Weyl 方程式

3 スーパー数とスーパー空間

4 スーパー空間上の線形代数

5 スーパー空間上の基礎解析

6 RMT における Efetov の方法とその後？

7 Weyl 方程式の基本解の構成

7.1 Schrödinger 方程式との相違点と解決法

7.2 Outline of our procedure (1)–(6)

7.3 Hamilton-Jacobi 方程式の新しい解法

8 SUSYQM とその応用

8.1 SUSYQM とは何か

8.1.1 Atiyah-Singer の指数定理とは何か？

物理学者 Witten の論文 [11] に始まり、数学者 Getzler は [7] の「序文」で以下のように「宣言した」。

Atiyah-Singer の指数定理とは多様体上の熱方程式に関する Weyl の定理のスーパー版である！

幾分雑に述べるが、後に具体的例で計算するので気にしないで欲しい。

(M,g) を d-次元コンパクト Riemann 多様体とする。Riemann 計量 $g = g_{jk}(q)dq^j dq^k$ に対応する Laplacian Δ_g を「考え」、対応する熱方程式の基本解を

$$e^{t\Delta_g}\underline{v}(q) = v(t,q) = \int_M d_g q'\, K(t,q,q')\underline{v}(q')$$

とする。即ち、v は以下の初期値問題の解を与える。

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,q)=\frac{1}{2}\Delta_g v(t,q),\quad \lim_{t\to 0}v(t,q)=\underline{v}(q).$$

このとき、Weyl の定理とは

$$\mathrm{tr}\ e^{t\Delta_g/2}=\int_M d_gq\,K(t,q,q)\to Ct^{-d/2}\int_M d_gq\,1\quad (t\to 0)$$

である。さて、この (M,g) をスーパー拡張する。$\tilde{M}$ は M に対応するスーパー多様体、$\tilde{g}$ をその多様体の上のスーパー Riemann 計量で g のスーパー拡張とする。このとき $\Delta_{\tilde{g}}$ は (M,g) 上の微分形式全体に働くフォーム Laplacian dd^*+d^*d に対応し、それの Witten 指数が Atiyah-Singer の指数を与え、Witten 指数は $e^{t\Delta_{\tilde{g}}}$ を計算することによって求まる。ここで d は外微分、d^* は計量 d_gq を用いた d の共役作用素、$\Delta_g=d^*d$ であるが、それを $\sum_{j,k=1}^d g_{jk}(q)p_jp_k\in C^\infty(T^*M:\mathbb{R})$ から導くのが「量子化」である。

注意：ところで (M,g) での Lagrangian $(1/2)g_{jk}(q)\dot{q}^j\dot{q}^k$ を経路積分的に量子化するとどうなるのか？実は、熱型では $(1/2)\Delta_g$ から $R/12$ だけずれる（R はスカラー曲率）ことが示せる！

8.1.2　SUSYQM とは何か

「何を計算するのか」を明らかにするために、まず H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsh and B. Simon[3] に従って SUSYQM(=supersymmetric Quantum Mechanics) の定義を与えよう。

定義 8.1 (上記 p.120) $\mathfrak{H}$ を *Hilbert* 空間とし、その上の自己共役作用素 $\mathbb{H}$、$\mathbb{Q}$ と有界な自己共役作用素 $\mathbb{P}$ を与える。これらが以下の関係式を満たすとき、$(\mathbb{H},\mathbb{P},\mathbb{Q})$ はスーパー対称性を持つ、或は *susyQM(=supersymmetric Quantum Mechanics)* を定めるという。

$$\mathbb{H}=\mathbb{Q}^2\geq 0,\quad \mathbb{P}^2=I,\quad [\mathbb{Q},\mathbb{P}]_+=\mathbb{Q}\mathbb{P}+\mathbb{P}\mathbb{Q}=0.$$

上の定義のもとで

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_{\mathrm{b}}\oplus\mathfrak{H}_{\mathrm{f}}\quad ここで\quad \mathfrak{H}_{\mathrm{f}}=\{u\in\mathfrak{H}\,|\,\mathbb{P}u=-u\},\quad \mathfrak{H}_{\mathrm{b}}=\{u\in\mathfrak{H}\,|\,\mathbb{P}u=u\}.$$

と分解する。この分解を用いて、要素 $u=u_{\mathrm{b}}+u_{\mathrm{f}}\in\mathfrak{H}$ をベクトル $\begin{pmatrix}u_{\mathrm{b}}\\ u_{\mathrm{f}}\end{pmatrix}$ と同一視すると、

$$\mathbb{P}=\begin{pmatrix}I_{\mathrm{b}} & 0\\ 0 & -I_{\mathrm{f}}\end{pmatrix}=\text{(or simply denoted by)}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

と表現される。ところで、$\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ は反交換関係を満たし、$\mathbb{Q}$ は自己共役だから $\mathbb{Q}$ は必ず以下のような表示をもつ：

$$\mathbb{Q}=\begin{pmatrix}0 & A^*\\ A & 0\end{pmatrix}\quad かつ\quad \mathbb{H}=\begin{pmatrix}A^*A & 0\\ 0 & AA^*\end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

ここで、A は消滅作用素（annihilation operator）と呼ばれる $\mathfrak{H}_{\mathrm{b}}$ から $\mathfrak{H}_{\mathrm{f}}$ の中への写像、A^* は生成作用素（creation operator）と呼ばれる $\mathfrak{H}_{\mathrm{f}}$ から $\mathfrak{H}_{\mathrm{b}}$ の中への写像である。故に、$\mathbb{P}$ は $\mathbb{H}$ と可換で、空間 $\mathfrak{H}_{\mathrm{b}}$ と $\mathfrak{H}_{\mathrm{f}}$ は $\mathbb{H}$ に関し不変、即ち、$\mathbb{H}\mathfrak{H}_{\mathrm{b}}\subset\mathfrak{H}_{\mathrm{b}}$ また、$\mathbb{H}\mathfrak{H}_{\mathrm{f}}\subset\mathfrak{H}_{\mathrm{f}}$ となる。稠密な定義域をもつ閉作用素 A と自己共役作用素 $\mathbb{Q}$ (supercharges) との間には１対１の対応がある。

$$\mathbb{Q}=\begin{pmatrix}0 & A^*\\ A & 0\end{pmatrix}\quad \text{on } D(\mathbb{Q})=D(A)\oplus D(A^*).$$

定義 8.2 上記の設定下で、以下が存在するときそれを H のスーパー対称指数 *(supersymmetric index)* と呼ぶ：

$$\mathrm{ind}_s(\mathbb{H}) \equiv \dim(\ker(\mathbb{H}\big|\mathfrak{H}_{\mathrm{b}})) - \dim(\ker(\mathbb{H}\big|\mathfrak{H}_{\mathrm{f}})) \in \bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}.$$

定義 8.3 $(\mathbb{H}, \mathbb{P}, \mathbb{Q})$ を *susyQM* で式 (8.1) で表示されるものを考える。
(I) 任意の $t > 0$ に対して

$$\Delta_t(\mathbb{H}) = \mathrm{tr}\,(e^{-tA^*A} - e^{-tAA^*}) = \mathrm{tr}\,(\mathbb{P}e^{-t\mathbb{H}}) \equiv \mathrm{str}\ e^{-t\mathbb{H}},$$

とし、以下の極限が存在するときそれを $(\mathbb{H}, \mathbb{P}, \mathbb{Q})$ の *(*熱正則化*) Witten* 指数 $\mathcal{W}_H$ と呼ぶ。

$$\mathcal{W}_H = \lim_{t\to\infty} \Delta_t(\mathbb{H}).$$

また $(\mathbb{H}, \mathbb{P}, \mathbb{Q})$ の *(*熱核正則化*) axial anomaly* $\mathcal{A}_H$ とは

$$\mathcal{A}_H = \lim_{t\to 0} \Delta_t(\mathbb{H}).$$

(II) 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ に対して

$$\Delta_z(\mathbb{H}) = -z\,\mathrm{tr}\,[(A^*A - z)^{-1} - (AA^* - z)^{-1}] = -z\,\mathrm{str}\,(\mathbb{H} - z)^{-1}$$

とし、以下の極限が存在するときそれを $(\mathbb{H}, \mathbb{P}, \mathbb{Q})$ の *(resolvent regulated) Witten* 指数 $\mathcal{W}_R$ と呼ぶ。

$$\mathcal{W}_R = \lim_{\substack{z\to 0,\\ |\Re z| \le C_0|\Im z|}} \Delta_z(\mathbb{H}) \quad \textit{for some } C_0 > 0.$$

同様に、$(\mathbb{H}, \mathbb{P}, \mathbb{Q})$ の *(resolvent regulated) axial anomaly* $\mathcal{A}_R$ は（もし存在すれば）

$$\mathcal{A}_R = -\lim_{\substack{z\to \infty,\\ |\Re z| \le C_1|\Im z|}} \Delta_z(\mathbb{H}) \quad \textit{for some } C_1 > 0.$$

このとき、典型的な定理として以下を挙げておく：

定理 8.1 $\mathbb{Q}$ を $\mathfrak{H}$ 上の *supercharge* とする。
(1) もし或る $t > 0$ に対して $\exp(-t\mathbb{Q}^2)$ がトレースクラスならば、$\mathbb{Q}$ は *Fredholm* で

$$\mathrm{ind}_t(\mathbb{Q})(\textit{independent of } t) = \mathrm{ind}_F(\mathbb{Q}) = \mathrm{ind}_s(\mathbb{H}).$$

(2) もし或る $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ に対して $(\mathbb{Q}^2 - z)^{-1}$ がトレースクラスならば、$\mathbb{Q}$ は *Fredholm* で

$$\mathrm{ind}_z(\mathbb{Q})(\textit{independent of } z) = \mathrm{ind}_F(\mathbb{Q}) = \mathrm{ind}_s(\mathbb{H}).$$

上の定理で出て来た概念の定義について：

定義 8.4 X, Y を 2 つの *Banach* 空間とし、$\mathcal{C}(X, Y)$ で稠密に定義された X から Y への閉作用素全体とする。$T \in \mathcal{C}(X, Y)$ は、T の値域 $R(T)$ が Y で閉で、$\ker T$ と $Y/R(T)$ が有限次元であるとき *Fredholm* という。$T \in \mathcal{C}(X, Y)$ が *semi-Fredholm* とは $R(T)$ が Y で閉で、少なくとも *kerT* か $Y/R(T)$ のどちらか一方は有限次元となることをいう。もし作用素が *semi-Fredholm* ならば *Fredholm* 指数 $\mathrm{ind}_F(T) = \dim(\ker T) - \dim(Y/R(T))$ は $\bar{\mathbb{Z}}$ に存在する。

系 8.1 もし作用素 A が *semi-Fredholm* ならば

$$\mathrm{ind}_s(\mathbb{H}) = \mathrm{ind}_F(A) \equiv \dim(\ker A) - \dim(\ker A^*).$$

8.1.3 SUSYQM の例

例 1. (M,g) を $g=\sum_{i,j=1}^d g_{ij}(q)dq^i dq^j$ をメトリックとする滑らかな d-次元 Riemannian 多様体とする。微分形式の空間を $\Lambda(M)=\cup_{k=0}^d \Lambda^k(M)$ と $\Lambda_0(M)=\cup_{k=0}^d \Lambda_0^k(M)$ を以下のように定める：

$$\Lambda^k(M)=\{\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le m}\omega_{i_1\cdots i_k}(q)dq^{i_1}\wedge\cdots\wedge dq^{i_k}\,|\,\omega_{i_1\cdots i_k}(q)\in C^\infty(M:\mathbb{C})\},$$

$$\Lambda_0^k(M)=\{\omega\in\Lambda^k(M)\,|\,\omega_{i_1\cdots i_k}(q)\in C_0^\infty(M:\mathbb{C})\},\quad \tilde{\Lambda}^k(M)=\{\omega\in\Lambda^k(M)\,|\,\|\omega\|<\infty\}.$$

外微分 d は微分形式 $\omega_{i_1\cdots i_k}(q)dq^{i_1}\wedge\cdots\wedge dq^{i_k}$ に

$$d\omega=\sum_{j=1}^d\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}(q)}{\partial q^j}dq^j\wedge dq^{i_1}\wedge\cdots\wedge dq^{i_k}$$

と作用し、$\mathbb{P}$ を $\omega\in\Lambda^k(M)$ に対し $\mathbb{P}\omega=(-1)^k\omega$ と定める。

$\overline{\Lambda^k(M)}$ を $\tilde{\Lambda}^k(M)$ の L^2 ノルム $\|\cdot\|$ での閉包とし $\overline{\Lambda(M)}=\cup_{k=0}^d\overline{\Lambda^k(M)}$ と定め $\mathfrak{H}=\overline{\Lambda(M)}=L^2(M)$ とおく。

d の $\overline{\Lambda(M)}$ での共役を d^* とし

$$\mathbb{H}=\mathbb{Q}^2=dd^*+d^*d\quad ここで\quad \mathbb{Q}=Q_1\text{ or }Q_2,\ Q_1=d+d^*,\quad Q_2=i(d-d^*),$$

とすると、三つ組み $(\mathbb{H},\mathbb{Q},\mathbb{P})$ は $\mathfrak{H}$ 上の超対称性を与える。

例 1′ (Witten's deformed Laplacian [11]). M 上の任意の実数値関数 ϕ 及び実数 λ に対し

$$d_\lambda=e^{-\lambda\phi}de^{\lambda\phi},\quad d_\lambda^*=e^{\lambda\phi}d^*e^{-\lambda\phi}$$

とおくと、$d_\lambda^2=0={d_\lambda^*}^2$ となることは明らか。ここで

$$\mathbb{H}_\lambda=d_\lambda d_\lambda^*+d_\lambda^*d_\lambda=\mathbb{Q}_\lambda^2\quad ここで\quad \mathbb{Q}_\lambda=Q_{1\lambda}\text{ or }Q_{2\lambda}$$

とし

$$Q_{1\lambda}=d_\lambda+d_\lambda^*,\quad Q_{2\lambda}=i(d_\lambda-d_\lambda^*)$$

とおく。前の例と同様に $\mathbb{P}$ を定めると、$(\mathbb{H}_\lambda,\mathbb{Q},\mathbb{P})$ は $\mathfrak{H}$ 上の超対称性を与える。

こういう概念を入れても、それで何かが整理されるとか新しい事実が示されないと寂しい限りである。Witten は以下の主張をした。この例の中では座標の表示を q_j の代わりに q^j を用いる等、微分幾何的記法を用いる。

H_λ をもう少し詳しく計算する：

$$H_\lambda=dd^*+d^*d+\lambda^2(d\phi)^2+\sum_{i,j=1}^d\lambda\frac{D^2\phi}{Dq^iDq^j}[a^{i*},a^j]_-$$

ここで、a^j・a^{j*} はそれぞれ生成・消滅作用素である。即ち、任意の $0\le\ell\le d$ 及び $q\in M$ に対し

$$\begin{cases} a_q^{i*}dq^{j_1}\wedge\cdots\wedge dq^{j_\ell}=dq^i\wedge dq^{j_1}\wedge\cdots\wedge dq^{j_\ell},\\ a_q^i dq^{j_1}\wedge\cdots\wedge dq^{j_\ell}=\sum_{k=1}^\ell(-1)^kg^{ij_k}(q)dq^{j_1}\wedge\cdots\wedge dq^{j_{k-1}}\wedge dq^{j_{k+1}}\wedge\cdots\wedge dq^{j_\ell}.\end{cases}$$

するとこれらは $\Lambda(T^*M)\to\Lambda(T^*M)$ への写像で

$$[a_q^i,a_q^j]_+=0,\quad [a_q^i,a_q^{j*}]_+=g^{ij}(q),\quad [a_q^{i*},a_q^{j*}]_+=0$$

を満たす。

[記法]: 微分形式 $\omega=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le d}\omega_{i_1\cdots i_k}(q)dq^{i_1}\wedge\cdots\wedge dq^{i_k}$ に対し

$$(\nabla_j\omega)_{i_1\cdots i_k}=\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial q^j}-\sum_{r,l}\Gamma^l_{ji_r}\omega_{i_1\cdots i_{r-1}li_{r+1}\cdots i_k}$$

とおく。すると

$$\nabla_j=\partial_{q^j}-\sum_{k,l,m}\Gamma^k_{jl}g_{km}a^{l*}a^m,\quad d=\sum_{l=1}^d a^{l*}\nabla_l=-\sum_{l=1}^d\nabla_l^*a^{l*},\quad d^*=-\sum_{l=1}^d a^l\nabla_l,$$

$$d^*\omega=\sum_{j,r}(-1)^{r-1}g^{ji_r}[\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}(q)}{\partial q^j}-\sum_{l,s}\Gamma^l_{j\,i_s}\omega_{i_1\cdots i_{s-1}\,l\,i_{s+1}\cdots i_k}(q)]$$
$$\times\, dq^{i_1}\wedge\cdots\wedge dq^{i_{r-1}}\wedge dq^{i_{r+1}}\wedge\cdots\wedge dq^{i_k}.$$

$$(d\phi)^2=g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial q^i}\frac{\partial\phi}{\partial q^j},\quad \frac{D^2\phi}{Dq^iDq^j}=\nabla_i\nabla_j\phi,\quad \frac{D\psi^i}{Dt}=\frac{d\psi^i}{dt}-\Gamma^i_{jk}\dot q^j\psi^k.$$

数学者達に取ってもっとも新しく大胆な考え方は、パラメタ付き作用素 H_λ を Lagrangian の量子化されたもの

$$\mathcal{L}_\lambda=\frac12\int dt\left[g_{ij}(\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}+i\bar\psi^i\frac{D\psi^j}{Dt})+\frac14R_{ijkl}\bar\psi^i\psi^k\bar\psi^j\psi^l-\lambda^2g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial q^i}\frac{\partial\phi}{\partial q^j}-\lambda\frac{D^2\phi}{Dq^iDq^j}\bar\psi^i\psi^j\right]$$

と考えることにある。ここで和は Eienstein の規約を用い、ψ^i と $\bar\psi^i$ は M に接する非可換な場で、量子化すると生成・消滅作用素となるものである。$\lambda\to\infty$ のときの、$\lambda^{-1}\dot u(t)=\lambda^{-2}H_\lambda u(t)$ の解 $u(t)$ の主要項は、$\mathcal{L}_\lambda$ に対応するトンネル軌道（インスタントン）に支配される。このトンネル軌道は以下の Lagrangian$\bar{\mathcal{L}}_\lambda$ に対応するものとなっている。$\lambda^{-1}\sim\hbar$ なる「対応原理」!

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}}_\lambda&=\frac12\int dt\left(g_{ij}\frac{dq^i}{dt}\frac{dq^j}{dt}+\lambda^2g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial q^i}\frac{\partial\phi}{\partial q^j}\right)\\&=\frac12\int dt\left|\frac{dq^i}{dt}\pm\lambda g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial q^j}\right|^2\mp\lambda\int dt\,\frac{d\phi}{dt}.\end{aligned}$$

これを用いて、SUSYQM という構造から導かれる「指数」の値を「古典軌道」を用いて計算する！

例 2 (Deift [4] in p.123 Cycon et al [3]). $\mathfrak{H}=L^2(\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}^2=L^2(\mathbb{R}:\mathbb{C}^2)=L^2(\mathbb{R})^2$, とし ϕ を q の多項式とする。作用素 $A=d/dq+\phi(q)$ と $A^*=-d/dq+\phi(q)$ を、その定義域を $D(A)=D(A^*)=\{u\in H^1(\mathbb{R})\,|\,\phi u\in L^2(\mathbb{R})\}$ となるように定め、

$$\mathbb{Q}=\begin{pmatrix}0&-\frac{d}{dq}+\phi\\\frac{d}{dq}+\phi&0\end{pmatrix},\quad \mathbb{P}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

とおく。すると $D(AA^*)=D(A^*A)=\{u\in L^2(\mathbb{R})\,|\,u'',\ \phi^2u,\ \phi'u\in L^2(\mathbb{R})\}$ に対し

$$A^*A=-\frac{d^2}{dq^2}+\phi^2(q)-\phi'(q),\quad AA^*=-\frac{d^2}{dq^2}+\phi^2(q)+\phi'(q),$$

と定められ

$$\mathbb{H}=\mathbb{Q}^2=\begin{pmatrix}-\frac{d^2}{dq^2}+\phi^2(q)-\phi'(q)&0\\0&-\frac{d^2}{dq^2}+\phi^2(q)+\phi'(q)\end{pmatrix}=(\frac{d^2}{dq^2}+\phi^2(q))\mathbb{I}_2-\phi'(q)\mathbb{P}$$

となる。この三つ組み $(\mathbb{H}, \mathbb{Q}, \mathbb{P})$ は $\mathfrak{H}$ 上の susyQM を成す。

(i) 特に $\phi(q) = q$ ならば

$$\dim(A) = 1, \quad \dim(A^*) = 0, \quad \mathrm{ind}_F(A) = 1 = \mathrm{ind}_s(H).$$

(ii) (Bollé et al. [2]). 実数値関数 $\phi, \phi' \in L^\infty(\mathbb{R})$ は

$$\lim_{q\to\pm\infty} \phi(q) = \phi_\pm \in \mathbb{R}, \quad \phi_-^2 \le \phi_+^2,$$
$$\int_{\mathbb{R}} dq\,(1+|q|^2)|\phi'(q)| < \infty \quad \text{かつ} \quad \int_{\mathbb{R}} dq\,(1+|q|^2)|\phi(q)-\phi_\pm| < \infty$$

を満たすとする。このとき、$z \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ に対し

$$\Delta_z(H) = \frac{1}{2}[\phi_+(\phi_+^2 - z)^{-1/2} - \phi_-(\phi_-^2 - z)^{-1/2}], \quad W_R = \frac{1}{2}[\mathrm{sign}(\phi_+) - \mathrm{sign}(\phi_-)] \quad \text{かつ} \quad \mathcal{A}_R = 0.$$

注意：物理学者は上の結果を経路積分で表示される量

$$\Delta_t(H) = \int dq d\psi d\bar{\psi} \Big[\int_{\{t-periodic\}} [dq][d\psi][d\bar{\psi}] e^{-\int_0^t ds \mathcal{L}(q(s),\dot{q}(s),\psi(s),\bar{\psi}(s))} \Big]$$

を直接計算することによって得る。

8.2 熱型調和振動子のスーパー拡張

8.2.1 熱型調和振動子の L-formulation

初期値問題の基本解を構成する事を考える。

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Hv \quad \text{但し} \quad H = H(q, \partial_q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial q} + aq\right)^2 - \frac{\omega^2}{2} q^2, \tag{8.2}$$

この表象は $H(q,p)$ を ∂_q のところに p を代入して得られたものとする。

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(p+aq)^2 - \frac{\omega^2}{2}q^2. \tag{8.3}$$

$H(q,p)$ に対応する Hamilton 流は

$$\begin{cases} \dot{q} = H_p(q,p) = p + aq, \\ \dot{p} = -H_q(q,p) = \omega^2 q - a(p+aq) \end{cases} \quad \text{但し} \quad \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{q} \\ \underline{p} \end{pmatrix}.$$

ところで

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ \omega^2 - a^2 & -a \end{pmatrix}, \quad \mathbb{X}^2 = \omega^2\,\mathbb{I}_2, \quad e^{t\mathbb{X}} = \cosh\omega t\,\mathbb{I}_2 + \frac{\sinh\omega t}{\omega}\mathbb{X},$$

だから

$$\begin{cases} q(s) = \cosh\omega s\,\underline{q} + \dfrac{\sinh\omega s}{\omega}(a\underline{q} + \underline{p}), \\ p(s) = \cosh\omega s\,\underline{p} + \dfrac{\sinh\omega s}{\omega}((\omega^2 - a^2)\underline{q} - a\underline{p}). \end{cases}$$

簡単のために

$$\cosh\omega s = \mathcal{C}_s, \qquad \sinh\omega s = \mathcal{S}_s, \qquad b = \omega^2 - a^2,$$

とおき

$$
\begin{cases}
q(s) = \not{C}_s\, \underline{q} + \dfrac{\not{S}_s}{\omega}(a\, \underline{q} + \underline{p}) = \dfrac{\omega\, \not{C}_s + a \not{S}_s}{\omega} \underline{q} + \dfrac{\not{S}_s}{\omega} \underline{p}, \\
p(s) = \not{C}_s\, \underline{p} + \dfrac{\not{S}_s}{\omega}(b\, \underline{q} - a \underline{p}) = \dfrac{b \not{S}_s}{\omega} \underline{q} + \dfrac{\omega\, \not{C}_s - a \not{S}_s}{\omega} \underline{p}.
\end{cases}
\tag{8.4}
$$

と表示する。すると

$$
\begin{aligned}
\dot{q}(s)p(s) &= \left(\frac{b\not{S}_s}{\omega} \underline{q} + \frac{\omega\, \not{C}_s - a\not{S}_s}{\omega} \underline{p} \right) \left(\frac{b\not{S}_s}{\omega} \underline{q} + \frac{\omega\, \not{C}_s - a\not{S}_s}{\omega} \underline{p} + a \frac{\omega \not{C}_s + a \not{S}_s}{\omega} \underline{q} + a \frac{\not{S}_s}{\omega} \underline{p} \right) \\
&= \left(\frac{b\not{S}_s}{\omega} \underline{q} + \frac{\omega\, \not{C}_s - a\not{S}_s}{\omega} \underline{p} \right) \big((\omega \not{S}_s + a\, \not{C}_s) \underline{q} + \not{C}_s \underline{p} \big).
\end{aligned}
$$

特に

$$
\not{S} = \sinh \omega t = \not{S}_t, \quad \not{C} = \cosh \omega t = \not{C}_t,
$$

とおき

$$
\int_0^t \not{S}_s^2 ds = \frac{\not{C}\not{S}}{2\,\omega} - \frac{t}{2}, \quad \int_0^t \not{C}_s^2 ds = \frac{\not{C}\not{S}}{2\,\omega} + \frac{t}{2}, \quad \int_0^t \not{S}_s \not{C}_s ds = \frac{\not{S}^2}{2\,\omega}.
$$

なることより

$$
\begin{aligned}
S_0(t, \underline{q}, \underline{p}) &= \int_0^t ds [\dot{q}(s)p(s) - H(q(s), p(s))] \\
&= \left(\frac{\not{S}\not{C}}{2\,\omega} - \frac{a\not{S}^2}{2\,\omega^2} \right) \underline{p}^2 + \frac{b\not{S}^2}{\omega^2} \underline{qp} + b \left(\frac{\not{S}\not{C}}{2\,\omega} + \frac{a\not{S}^2}{2\,\omega^2} \right) \underline{q}^2.
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

（最も簡単な陰関数定理を用いて）得た

$$
\underline{p} = p(t, \bar{q}, \underline{q}) = \frac{\omega}{\not{S}} \big(\bar{q} - \frac{\omega\, \not{C} + a\not{S}}{\omega} \underline{q} \big)
$$

を上式に代入し

$$
S(t, \bar{q}, \underline{q}) = \frac{\omega\, \not{C} - a\not{S}}{2\not{S}} \bar{q}^2 - \frac{\omega}{\not{S}} \bar{q}\underline{q} + \frac{\omega\, \not{C} + a\not{S}}{2\not{S}} \underline{q}^2 \quad \text{かつ} \quad D(t, \bar{q}, \underline{q}) = - \frac{\partial^2 S(t, \bar{q}, \underline{q})}{\partial \bar{q}\, \partial \underline{q}} = \frac{\omega}{\not{S}}.
\tag{8.6}
$$

そこで

$$
\begin{gathered}
v(t, \bar{q}) = V_t^L \underline{v}(\bar{q}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} d\underline{q}\, D^{1/2}(t, \bar{q}, \underline{q})\, e^{-S(t, \bar{q}, \underline{q})} \underline{v}(\underline{q}) = \int_{\mathbb{R}} d\underline{q}\, V^L(t, \bar{q}, \underline{q}) \underline{v}(\underline{q}) \\
\text{ここで} \quad V^L(t, \bar{q}, \underline{q}) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi \sinh \omega t}}\, e^{-S(t, \bar{q}, \underline{q})}.
\end{gathered}
\tag{8.7}
$$

とおくと、$v(0, q) = \underline{v}(q)$ として (8.2) を満たす事が分かる。即ち、Hamiltonian 関数 (8.3) から経路積分的な方法で量子化されたもの (8.2) が V_t^L. の生成作用素として求まった事になる。

重要な注意　(1) 作用関数のトレース $S(t, \underline{q}, \underline{q}) = \dfrac{\omega}{\not{S}}(\not{C} - 1)\underline{q}^2$ は a の値に無関係であり任意の $t > 0$ に対して正だから、Weyl 型評価を持つ：

$$
\mathrm{tr}\ e^{tH(q, \partial_q)} = \int_{\mathbb{R}} d\underline{q}\, V^L(t, \bar{q}, \underline{q}) \big|_{\bar{q} = \underline{q}} = \sqrt{\frac{1}{2(\not{C} - 1)}} \sim \frac{1}{\omega t} \quad t \to 0.
$$

この評価の t に関する次数は以下のコンパクトな場合と比較すると面白い。
(2) (M^d, g) を d-次元コンパクト Riemannian 多様体とする。その上の熱方程式 $\dfrac{\partial}{\partial t} - \dfrac{1}{2}\Delta_g$ の基本解を $E(t, q, q')$ とすると、Weyl の定理は（少し雑に言って）

$$
\mathrm{tr}\ \exp \left[\frac{t}{2} \Delta_g \right] = \int_M d_g q\, E(t, q, q) \sim (2\pi t)^{-d/2} \mathrm{vol}_g M \quad \text{for} \quad t \to 0.
$$

ここで基本解は (M^d, g), に対する適当な仮定のもと

$$E(t,\bar{q},\underline{q}) \sim D(t,\bar{q},\underline{q})e^{-S(t,\bar{q},\underline{q})},$$

と表示され、$S(t,\bar{q},\underline{q})$ は Hamilton-Jacobi 方程式の解、$D(t,\bar{q},\underline{q})$ は連続の方程式の解である。更に $(0,\underline{q})$ から $(t,\bar{q})$ への古典軌道 $\gamma_c(\tau)$ に対し以下が示される。

$$S(t,\bar{q},\underline{q}) = \int_0^t L(\gamma_c(\tau),\dot{\gamma}_c(\tau))d\tau.$$

(3) ところで上の例とコンパクト多様体での $t=0$ の近くでの t の次数の不一致について $d=1$ のときは以下のように説明できる：$V(q) \geq 0$ とし $H(q,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q)$ とする。$\mathbb{R}^*$ で余接空間 $T^*\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ のファイバーを表すものとすると、$t \to 0$ のとき、

$$\begin{aligned}(e^{-tH(*,\partial_*)}u)(q) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}^*} e^{iqp}e^{-tH(q,p)}\hat{u}(p)dp &= \frac{1}{2\pi}\iint_{T^*\mathbb{R}} dp\,dq'\,e^{iqp}e^{-tH(q,p)}e^{-iq'p}u(q')\\ &= \int_{\mathbb{R}} dq' K(t,q,q')u(q')\end{aligned}$$

かつ

$$K(t,q,q') = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^*} dp\,e^{i(q-q')p}e^{-tH(q,p)}.$$

故に

$$\mathrm{tr}\;e^{-tH(*,\partial_*)} = \int_{\mathbb{R}} dq'\,K(t,q',q') = \frac{1}{2\pi}\iint_{T^*\mathbb{R}} dp\,dq'\,e^{-tH(q',p)} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^*} dp\,e^{-t\frac{1}{2}|p|^2}\cdot\int_{\mathbb{R}} dq'\,e^{-tV(q')}.$$

特に $V(q) = \frac{\omega^2}{2}|q|^2$ のときは

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^*} dp\,e^{-t\frac{1}{2}|p|^2}\cdot\int_{\mathbb{R}} dq'\,e^{-t\frac{\omega^2}{2}|q'|^2} = \frac{1}{\omega t}.$$

8.2.2 熱型調和振動子の H-formulation

$X = \omega\cancel{C} + a\cancel{S}$, $b = \omega^2 - a^2$ とし

$$\underline{q} = q(t,\bar{q},\underline{p}) = \frac{\omega}{X}(\bar{q} - \frac{\cancel{S}}{\omega}),$$

と定め

$$S(t,\bar{q},\underline{p}) = [\underline{q}\,\underline{p} + S_0(t,\underline{q},\underline{p})]_{\underline{q}=q(t,\bar{q},\underline{p})} = \frac{b\cancel{S}}{2X}\bar{q}^2 + \frac{\omega}{X}\bar{q}\underline{p} - \frac{\cancel{S}}{2X}\underline{p}^2 \tag{8.8}$$

とする。更に

$$D(t,\bar{q},\underline{p}) = \frac{\partial^2 S}{\partial\bar{q}\,\partial\underline{p}} = \frac{\omega}{X}.$$

ここで

$$\begin{aligned}V_t^H v(\bar{q}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int d\underline{p}\,D^{1/2}(t,\bar{q},\underline{p})\,e^{-S(t,\bar{q},\underline{p})}\hat{\underline{v}}(\underline{p}) = \int d\underline{p}\,V^H(t,\bar{q},\underline{p})\hat{\underline{v}}(\underline{p})\\ &= \frac{1}{2\pi\hbar}\iint d\underline{p}\,d\underline{q}\,D^{1/2}(t,\bar{q},\underline{p})e^{-S(t,\bar{q},\underline{p})-i\hbar^{-1}\underline{q}\underline{p}}\underline{v}(\underline{q})\end{aligned} \tag{8.9}$$

と定義する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega}{X}\bar{q}\underline{p} - \frac{\$}{2X}\underline{p}^2 + i\hbar^{-1}\underline{q}\underline{p} &= -\frac{\$}{2X}\left(\underline{p}^2 - \frac{2(\omega\bar{q} + i\hbar^{-1}\underline{q}X)}{\$}\underline{p}\right) \\
&= -\frac{\$}{2X}\left(\underline{p} - \frac{\omega\bar{q} + i\hbar^{-1}\underline{q}X}{\$}\right)^2 - \left(\frac{\omega\bar{q} + i\hbar^{-1}\underline{q}X}{\$}\right)^2,
\end{aligned}
$$

かつ

$$
\frac{b\$}{2X}\bar{q}^2 + \frac{\$}{2X}\left(\frac{\omega\bar{q} + i\hbar^{-1}\underline{q}X}{\$}\right)^2 = -\frac{\omega^2[\$^2+1] - a^2\$^2}{2\$X}\bar{q}^2 - \frac{\hbar^{-2}X}{2\$}\underline{q}^2 + \frac{i\hbar^{-1}\omega}{\$}\underline{q}\bar{q},
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
S(t,\bar{q},\underline{p}) + i\hbar^{-1}\underline{q}\underline{p} &= \frac{b\$}{2X}\bar{q}^2 + \frac{\omega}{X}\bar{q}\underline{p} - \frac{\$}{2X}\underline{p}^2 + i\hbar^{-1}\underline{q}\underline{p} \\
&= -\frac{\$}{2X}\left(\underline{p} - \frac{\omega\bar{q} + i\hbar^{-1}\underline{q}X}{\$}\right)^2 + \frac{b\$}{2X}\bar{q}^2 + \frac{\$}{2X}\left(\frac{\omega\bar{q} + i\hbar^{-1}\underline{q}X}{\$}\right)^2 \\
&= -\frac{\$}{2X}\left(\underline{p} - \frac{\omega\bar{q} + i\hbar^{-1}\underline{q}X}{\$}\right)^2 + \frac{\omega^2[\$^2+1] - a^2\$^2}{2\$X}\bar{q}^2 - \frac{\hbar^{-2}X}{2\$}\underline{q}^2 + \frac{i\hbar^{-1}\omega}{\$}\underline{q}\bar{q}.
\end{aligned}
$$

故に

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}} d\underline{p}\, D^{1/2}(t,\bar{q},\underline{p})e^{-S(t,\bar{q},\underline{p}) - i\hbar^{-1}\underline{q}\underline{p}} \\
&\quad = \sqrt{\frac{-\omega}{2\pi\$\hbar^2}}\exp\left(\frac{\omega^2[\$^2+1] + a^2\$^2}{2\$X}\bar{q}^2 - \frac{\hbar^{-2}X}{2\$}\underline{q}^2 + \frac{i\hbar^{-1}\omega}{\$}\underline{q}\bar{q}\right) \\
&\quad = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sinh\omega t}}\exp\left(\frac{\omega\not{C} - a\$}{2\$}\bar{q}^2 + \frac{\omega}{\$}\bar{q}\underline{q} - \frac{\omega\not{C} + a\$}{2\$}\underline{q}^2\right), \quad \text{if } \hbar = -i.
\end{aligned}
$$

8.2.3 スピン添加

$L^2(\mathbb{R})$ での微分作用素 (8.2) に対し

$$
\mathbb{Q}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\partial_q + aq - \omega q\big)\mathbf{b}, \quad \mathbb{Q}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\partial_q + aq + \omega q\big)\mathbf{b}^*,
$$

とおき

$$
\mathbb{H} = \mathbb{H}(q,\partial_q) = H(q,\partial_q)\mathbb{I} + \frac{1}{2}\omega[\mathbf{b},\mathbf{b}^*],
$$

と定義すると、$(\mathbb{H},\mathbb{Q},\mathbb{P})$ は、$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ と見なして、$\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ での susyQM を与える。

$\mathbb{H}(q,\partial_q)$ に対応する古典力学: $\lambdabar \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を用意し、$\mathfrak{R}^{0|1}$ での奇変数に関する Fourier 変換を

$$
\begin{cases}
\int_{\mathfrak{R}^{0|1}} d\theta\, e^{-\lambdabar^{-1}\theta\pi}(u_0 + u_1\theta) = u_1 - \lambdabar^{-1}u_0\pi, \\
\int_{\mathfrak{R}^{0|1}} d\pi\, e^{\lambdabar^{-1}\theta\pi}(u_1 - \lambdabar^{-1}u_0\pi) = -\lambdabar^{-1}(u_0 + u_1\theta), \\
-\lambdabar \iint_{\mathfrak{R}^{0|2}} d\pi\, d\theta'\, e^{\lambdabar^{-1}(\theta-\theta')\pi}(u_0 + u_1\theta') = u_0 + u_1\theta
\end{cases}
$$

とすると Weyl 表象は

$$
\mathcal{H}(x,\xi,\theta,\pi) = \frac{1}{2}(\xi + ax)^2 - \frac{\omega^2}{2}x^2 - \lambdabar^{-1}\omega\theta\pi \tag{8.10}
$$

と得られる。実際

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}(x,\partial_x,\theta,\partial_\theta)u(x,\theta) &= \frac{-\lambdabar}{2\pi\hbar}\iint d\xi dx' d\pi d\theta' e^{i\hbar^{-1}(x-x')\xi+\lambdabar^{-1}(\theta-\theta')\pi} \\
&\qquad\qquad \times \mathcal{H}(\frac{x+x'}{2},\xi,\frac{\theta+\theta'}{2},\pi)(u_0(x')+u_1(x')\theta') \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar}\iint_{\mathfrak{R}^{2|0}} e^{i\hbar^{-1}(x-x')\xi} H(\frac{x+x'}{2},\xi)(u_0(x')+u_1(x')\theta)+\omega(u_0(x)-u_1(x)\theta) \\
&\qquad\qquad \sim \Big(H(q,\partial_q)\mathbb{I}+\frac{\omega}{2}[\mathbf{b},\mathbf{b}^*]\Big)u.
\end{aligned}
$$

スピン添加熱型調和振動子の LH-formulation ：この場合

$$
\dot{\theta} = -\lambdabar^{-1}\omega\theta, \quad \dot{\pi} = \lambdabar^{-1}\omega\pi,
$$

なので

$$
\theta(s) = e^{-\lambdabar^{-1}\omega s}\underline{\theta}, \quad \pi(s) = e^{\lambdabar^{-1}\omega s}\underline{\pi}
$$

となる。偶変数に関しての Fourier 変換を使わないようにすると

$$
\mathcal{S}(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{x},\underline{\pi}) = [\underline{\theta}\,\underline{\pi}+S_0(t,\underline{x},\underline{\xi})]\Big|_{\underline{\xi}=\xi(t,\bar{x},\underline{x}),\underline{\theta}=\theta(t,\bar{\theta},\underline{\pi})} = e^{\lambdabar^{-1}\omega t}\bar{\theta}\underline{\pi}+S(t,\bar{x},\underline{x}) \tag{8.11}
$$

とし

$$
S(t,\bar{x},\underline{x}) = \frac{\omega \not{C} - a\$}{2\$}\bar{x}^2 - \frac{\omega}{\$}\bar{x}\underline{x} + \frac{\omega\not{C}+a\$}{2\$}\underline{x}^2 \tag{8.12}
$$

とおけばよい。また、

$$
\mathcal{D}(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{x},\underline{\pi}) = \operatorname{sdet}\begin{pmatrix} -\frac{\partial^2\mathcal{S}}{\partial\bar{x}\partial\underline{x}} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2\mathcal{S}}{\partial\bar{\theta}\partial\underline{\pi}} \end{pmatrix} = \frac{\omega}{\sinh\omega t}e^{-\lambdabar^{-1}\omega t} \tag{8.13}
$$

であり

$$
\mathcal{D}^{1/2}(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{x},\underline{\pi})\,e^{-\mathcal{S}(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{x},\underline{\pi})} = e^{\lambdabar\omega t/2}\sqrt{\frac{\omega}{\sinh\omega t}}e^{-e^{\lambdabar^{-1}\omega t}\bar{\theta}\underline{\pi}-S(t,\bar{x},\underline{x})} \tag{8.14}
$$

とおく。$e^{-e^{-\lambdabar^{-1}\omega t}\bar{\theta}\underline{\pi}} = 1-e^{-\lambdabar^{-1}\omega t}\bar{\theta}\underline{\pi}$ に注意し

$$
-\lambdabar\int d\underline{\pi}\,e^{-e^{-\lambdabar^{-1}\omega t}\bar{\theta}\underline{\pi}}(\underline{v}_1(\underline{x})-\lambdabar^{-1}\underline{v}_0(\underline{x})\underline{\pi}) = \underline{v}_0(\underline{x})-\lambdabar\,e^{-\lambdabar^{-1}\omega t}\underline{v}_1(\underline{x})\bar{\theta}, \tag{8.15}
$$

となるから、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_t^{LH}\underline{v}(\bar{x},\bar{\theta}) = v(t,\bar{x},\bar{\theta}) &= -\lambdabar\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\int d\underline{x}\,d\underline{\pi}\,\mathcal{D}^{1/2}(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{x},\underline{\pi})e^{-\mathcal{S}(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{x},\underline{\pi})}(\underline{v}_1(\underline{x})-\lambdabar^{-1}\underline{v}_0(\underline{x})\underline{\pi}) \\
&= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sinh\omega t}}\int d\underline{x}\,e^{-S(t,\bar{x},\underline{x})}(e^{\omega t/2}\underline{v}_0(\underline{x})-\lambdabar e^{-\omega t/2}\underline{v}_1(\underline{x})\bar{\theta})
\end{aligned}
$$

とおく。一方、

$$
\int d\underline{\theta}\,(e^{\omega t/2}\underline{\theta}+\lambdabar e^{-\omega t/2}\bar{\theta})(\underline{v}_0(\underline{x})+\underline{v}_1(\underline{x})\underline{\theta}) = e^{\omega t/2}\underline{v}_0(\underline{x})-\lambdabar e^{-\omega t/2}\underline{v}_1(\underline{x})\bar{\theta},
$$

だから

$$
(\mathcal{V}_t^L\underline{v})(\bar{x},\bar{\theta}) = \int_{\mathfrak{R}^{1|1}} d\underline{x}\,d\underline{\theta}\,\mathcal{V}^L(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{x},\underline{\theta})(\underline{v}_0(\underline{x})+\underline{v}_q(\underline{x})\underline{\theta}) \tag{8.16}
$$

であり

$$
\mathcal{V}^L(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{x},\underline{\theta}) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\$}}(e^{\omega t/2}\underline{\theta}+\lambdabar e^{-\omega t/2}\bar{\theta})e^{-S(t,\bar{x},\underline{x})}. \tag{8.17}
$$

ここで

$$[\ker(Pe^{-t\hat{\mathcal{H}}})](\bar{x},\underline{x},\bar{\theta},\underline{\theta}) = (1-2\bar{\theta}\partial_{\bar{\theta}})(e^{\omega t/2}\underline{\theta}+\lambda\!\!\!^{-} e^{-\omega t/2}\bar{\theta})\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sinh\omega t}}e^{-\mathcal{S}(t,\bar{x},\underline{x})},$$

だから、

$$\begin{aligned}\mathrm{str}\ e^{-t\mathbb{H}} &= \int d\underline{x}\, d\underline{\theta}\, [\ker(Pe^{-t\hat{\mathcal{H}}})](\underline{x},\underline{x},\underline{\theta},\underline{\theta}) \\ &= (e^{\omega t/2}-\lambda\!\!\!^{-} e^{-\omega t/2})\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sinh\omega t}}\sqrt{\frac{\pi\sinh\omega t}{\omega(\cosh\omega t-1)}} = \frac{e^{\omega t/2}-\lambda\!\!\!^{-} e^{-\omega t/2}}{\sqrt{2(\cosh\omega t-1)}} = 1,\ \text{for } \forall t>0 \text{ if } \lambda\!\!\!^{-}=1.\end{aligned}$$

即ち、

$$\mathcal{W}_H = 1 = \mathcal{A}_H \quad \text{for} \quad (\mathbb{H},\mathbb{P},\mathbb{Q}).$$

スピン添加熱型調和振動子の HH-formulation :

$$\mathcal{S}(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{\xi},\underline{\pi}) = [\underline{x}\underline{\xi}+\underline{\theta}\,\underline{\pi}+S_0(t,\underline{x},\underline{\xi})]\Big|_{\underline{x}=x(t,\underline{x},\underline{\xi}),\underline{\theta}=\theta(t,\bar{\theta},\underline{\pi})} = e^{\lambda\!\!\!^{-\,-1}\omega t}\bar{\theta}\underline{\pi}+S(t,\bar{x},\underline{\xi}). \tag{8.18}$$

とし

$$\mathcal{D}(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{\xi},\underline{\pi}) = \mathrm{sdet}\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\mathcal{S}}{\partial\bar{x}\partial\underline{\xi}} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2\mathcal{S}}{\partial\bar{\theta}\partial\underline{\pi}}\end{pmatrix} = \frac{\omega}{\omega\cosh\omega t - a\sinh\omega t}e^{-\lambda\!\!\!^{-\,-1}\omega t},$$

とするとき

$$\mathcal{D}^{1/2}(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{\xi},\underline{\pi})\,e^{-\mathcal{S}(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{\xi},\underline{\pi})} = e^{-\lambda\!\!\!^{-\,-1}\omega t/2}\sqrt{\frac{\omega}{\omega\cosh\omega t-a\sinh\omega t}}e^{-e^{\lambda\!\!\!^{-\,-1}\omega t}\bar{\theta}\underline{\pi}-S(t,\bar{x},\underline{\xi})} \tag{8.19}$$

式 (8.15) を用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_t^{HH}\underline{v}(\bar{x},\bar{\theta}) = v(t,\bar{x},\bar{\theta}) &= -\lambda\!\!\!^{-}\sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}}\int d\underline{\xi}\, d\underline{\pi}\,\mathcal{D}^{1/2}(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{\xi},\underline{\pi})e^{-\mathcal{S}(t,\bar{x},\bar{\theta},\underline{\xi},\underline{\pi})}(\underline{\hat{v}}_1(\underline{\xi})-\lambda\!\!\!^{-\,-1}\underline{\hat{v}}_0(\underline{\xi})\underline{\pi}) \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sinh\omega t}}\int d\underline{x}\, e^{-\mathcal{S}(t,\bar{x},\underline{x})}(e^{\omega t/2}\underline{v}_0(\underline{x})-\lambda\!\!\!^{-} e^{-\omega t/2}\underline{v}_1(\underline{x})\bar{\theta}).\end{aligned} \tag{8.20}$$

参考文献

[1] L. Alvarez-Gaumè, *Supersymmetry and the Atiyah–Singer index theorem*, Commun. Math. Phys.90(1983), pp. 161-173.

[2] D. Bollé, F. Gesztesy, H. Grosse, W. Schweiger and B. Simon, *Witten index, axial anomaly, and Krein's spectral shift function in supersymmetric quantum mechanics*, J.Math.Phys.28(1987), pp. 1512-1525.

[3] H.L. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsh and B. Simon, Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry, New York, Springer-Verlag, GMT, 1987.

[4] P.A. Deift, *Applications of a commutation formula*, Duke Math.J.45(1978), pp. 267-310.

[5] D. Friedan and P. Windey, *Supersymmetric derivation of the Atiyah-Singer index and the chiral anomaly*, Nuclear Phys.B(FS 11)253(1984), pp. 395-416.

[6] F. Gesztesy, *Scattering theory for one-dimensional systems with non-trivial spatial asymptotics in Schrödinger operators*, Springer LNM, ed. E. Balslev 1218(1986), pp. 93-123.

[7] E. Getzler, *Pseudo-differential operators on supermanifolds and the Atiyah-Singer index theorem*, Commun. Math. Phys. 92(1983), pp. 163-178.

[8] ——–, *A short proof of the local Atiyah-Singer index theorem*, Topology 25(1986), pp. 111-117.

[9] J. Mañes and B. Zumino, *WKB method, susy quantum mechanics and the index theorem*, Nuclear Phys. B270(FS16)(1986), pp. 651-686.

[10] S. Rempel and T. Schmitt, *Pseudo-differential operators and the index theorem on supermanifolds*, Math.Nachr. 111 (1983), pp. 153-175.

[11] E. Witten, *Supersymmetry and Morse theory*, J.Diff.Geom.17(1982), pp. 661-692.