スーパー解析学の基礎　第10回講義内容 – 08-12.12　　井上 淳

ここ数回講義してきたスーパースムーズ関数の特徴付けと積分については（私自身の混乱による）「不完全」なところが見えてきた[1]。

その部分の目的は『Grassmann 接続を導入して定義した関数のクラス

$$\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U:\mathfrak{C})=\{u(x,\theta)=\sum_{|a|\le n}u_a(x)\theta^a \mid u_a(x) \text{ は } u_a(q)\in C^\infty(U_{\mathrm{B}}:\mathfrak{C}) \text{ の Grassmann 接続 }\}$$

は自然なもので、既存の解析の方法が適用可能である、即ち、Banach 空間での基礎解析を Fréchet-Grassmann「代数」上でできるのか』を示す事[2]であった。Grassmann 生成元を可算無限個用意したので、スーパースムーズ関数でも Fréchet 微分関数でも、奇変数の微分の一意性は保証される。Berezin 積分を含むように偶奇変数の積分を定義し「積分記号下の変数変換則」に問題が起こらないようにできるか？幾つかの試みがあるが未だにすっきりしない[3]。ここの部分は「積分記号下の変数変換則」の証明を中心に、冬休み明けに説明したい。11 月 14 日、21 日の講義については改訂版 v.2-1 をホームページにおいた。

そこで今回は時間繋ぎに、Banach-Grassmann「代数」を用いても問題が起こらない手法で、RMT へのスーパー解析の応用を述べる。

1　非可換解析学の必然性とは、そしてそのご利益は？

2　Dirac 方程式と Weyl 方程式

3　スーパー数とスーパー空間

4　スーパー空間上の線形代数

5　スーパー空間上の基礎解析

6　RMT における Efetov の方法とその後？

1950 年代中性子をウラン 238 にぶつけて散乱データを調べると、その散乱断面積が大きい中性子のエネルギーの値（resonance）が飛び飛びに表れた、そのような実験が数

[1]聴講者のお陰である

[2]$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像の全微分可能性と比して、$\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への関数の全微分可能性は、その環構造が考える関数の正則性までを規定する。Fréchet-Grassmann での環構造は関数のスーパー全微分可能性とスーパースムーズ関数の構造との同値性を導くのか？

[3]この方法ですっきりするだろうという見込み発車をしたが問題が幾分出てきたのである！

限りなくありそれから妥当な然るべき方程式を導出する試みがあった。しかしまだ数値計算もままならない時代で、人々はresonanceの位置等に統計的な意味を探す方が有効であった。そこでWignerは実験の微細構造には関係なく『(高) レゾナンスは (大きな) 行列の固有値のように振る舞う』という「驚くべき仮説」を提唱した。その仮説の導く結果の一つが以下である。その仮説自身の正当性については例えばMehtaの教科書 [8] を参照し、更に仮説「ζ 関数の実部が1/2の根は何か自己共役作用素のスペクトルである」に対応する数値実験の一致にも驚かれると良い。

6.1 Wignerの半円則について：概要

$N\times N$-エルミート行列の集合$\mathfrak{U}_N$を位相空間として$\mathbb{R}^{N^2}$と同一視し、確率測度$d\mu_N(H)$を

$$
\begin{gathered}
d\mu_N(H) = \prod_{k=1}^{N} d(\Re H_{kk}) \prod_{j<k}^{N} d(\Re H_{jk}) d(\Im H_{jk}) P_{N,J}(H), \\
P_{N,J}(H) = Z_{N,J}^{-1} \exp\Big[-\frac{N}{2J^2} \,\mathrm{tr}\; H^* H \Big]
\end{gathered}
\tag{6.1}
$$

と定める。ここで、$H=(H_{jk})$, $H^*=(H^*_{jk})=(\overline{H}_{kj})={}^t\overline{H}$ とし、$\prod_{k=1}^N d(\Re H_{kk}) \prod_{j<k}^N d(\Re H_{jk}) d(\Im H_{jk})$ は $\mathbb{R}^{N^2}$ 上の Lebesgue 測度、$Z_{N,J}^{-1}$ は規格化定数で $Z_{N,J}=2^{N/2}(J^2\pi/N)^{3N/2}$ とする。

さて、$E_\alpha=E_\alpha(H)$ $(\alpha=1,\cdots,N)$ を $H\in\mathfrak{U}_N$ の実固有値、δ をDiracのデルタ関数とし、

$$
\rho_N(\lambda) = \rho_N(\lambda; H) = N^{-1} \sum_{\alpha=1}^{N} \delta(\lambda - E_\alpha(H)) \tag{6.2}
$$

とおく。また、$\mathfrak{U}_N$ 上の関数 f に対して

$$
\big\langle f \big\rangle_N = \big\langle f(\cdot) \big\rangle_N = \int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\, f(H)
$$

とする。このとき、

定理 6.1 (Wigner's semi-circle law)

$$
\lim_{N\to\infty} \big\langle \rho_N(\lambda) \big\rangle_N = w_{sc}(\lambda) = \begin{cases} (2\pi J^2)^{-1}\sqrt{4J^2-\lambda^2} & \textit{for} \quad |\lambda| < 2J, \\ 0 & \textit{for} \quad |\lambda| > 2J. \end{cases} \tag{6.3}
$$

注意：(6.3) の極限の意味は、任意の $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})=\mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して

$$
\lim_{N\to\infty} \langle \phi, \int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\, N^{-1} \sum_{\alpha=1}^{N} \delta(\cdot - E_\alpha(H)) \rangle = \langle \phi, w_{sc} \rangle = \int_{\mathbb{R}} d\lambda\, \phi(\lambda) w_{sc}(\lambda)
$$

とする。ここで$\langle\cdot,\cdot\rangle$は$\mathcal{D}(\mathbb{R})$と$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$の双対を意味する。更に、$\int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\, N^{-1} \sum_{\alpha=1}^N \delta(\cdot - E_\alpha(H))$ の意味についても説明が必要だが、少し後に詳しく与える。

この定理の証明には方法が色々あるようだが Efetov [5] によって始められた奇変数を用いるものがこの節の対象である。それを少し分かり易く解説した、Fyodorov [7] や Brézin [1] (また, Mello [9], Zirnbauer [11]) を参考にした[4]。

新しい証明の副産物として

定理 6.2 (A refined version of Wigner's semi-circle law) *(i)* $|\lambda| < 2J$ なる各 λ に対し、$N \to \infty$ とするとき

$$\langle \rho_N(\lambda) \rangle_N = \frac{\sqrt{4J^2-\lambda^2}}{2\pi J^2} - \frac{(-1)^N J}{\pi(4J^2-\lambda^2)} \cos\left(N\left[\frac{\lambda\sqrt{4J^2-\lambda^2}}{2J^2} + 2\arcsin\left(\frac{\lambda}{2J}\right)\right]\right) N^{-1} + O(N^{-2}). \tag{6.4}$$

(ii) λ が $|\lambda| > 2J$ となるときは、定数 $C_\pm(\lambda) > 0$ と $k_\pm(\lambda) > 0$ があって

$$\left| \langle \rho_N(\lambda) \rangle_N \right| \le C_\pm(\lambda) \exp\left[-k_\pm(\lambda) N\right]. \tag{6.5}$$

但し、$\lambda \searrow 2J$ 或は $\lambda \nearrow -2J$ なるときそれぞれ $k_\pm(\lambda) \to 0$ かつ $C_\pm(\lambda) \to \infty$ となる。

定理 6.3 (The spectrum edge problem) $z \in [-1, 1]$ とする。

$$\begin{aligned} \langle \rho_N(2J - zN^{-2/3}) \rangle_N &= N^{-1/3} f(z/J) + O(N^{-2/3}) \qquad \text{as } N \to \infty, \\ \langle \rho_N(-2J + zN^{-2/3}) \rangle_N &= -N^{-1/3} f(z/J) + O(N^{-2/3}) \qquad \text{as } N \to \infty. \end{aligned} \tag{6.6}$$

ここで

$$f(w) = \frac{1}{4\pi^2 J}(\mathrm{Ai}'(w)^2 - \mathrm{Ai}''(w)\,\mathrm{Ai}(w)), \quad \mathrm{Ai}(w) = \int_{\mathbb{R}} dx\, \exp\left[-\frac{i}{3}x^3 + iwx\right].$$

(A) 前にも説明したように、キーになる表現は、補助の奇変数と偶変数を用いて

$$\langle \rho_N(\lambda) \rangle_N = \pi^{-1} \Im \int_{\mathfrak{Q}} dQ \left(\{(\lambda - i0)\mathbb{I}_2 - Q\}^{-1}\right)_{bb} \exp\left[-N\mathcal{L}(Q)\right] \tag{6.7}$$

とすることにある。ここで $\mathbb{I}_n$ は $n \times n$-単位行列とし、

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(Q) = \mathrm{str}\left[(2J^2)^{-1}Q^2 + \log\left((\lambda - i0)\mathbb{I}_2 - Q\right)\right], \\ \mathfrak{Q} = \left\{ Q = \begin{pmatrix} x_1 & \rho_1 \\ \rho_2 & ix_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}},\ \rho_1, \rho_2 \in \mathfrak{R}_{\mathrm{od}} \right\} \cong \mathfrak{R}^{2|2}, \ \ dQ = \frac{dx_1 dx_2}{2\pi} d\rho_1 d\rho_2, \\ \left(((\lambda - i0)\mathbb{I}_2 - Q)^{-1}\right)_{bb} = \frac{(\lambda - i0 - x_1)(\lambda - i0 - ix_2) + \rho_1\rho_2}{(\lambda - i0 - x_1)^2(\lambda - i0 - ix_2)}. \end{gathered} \tag{6.8}$$

表現式 (6.7) において パラメータ N は一カ所にしか現れない！この事実は、Feynman による経路積分を用いた表示、そこでもパラメータ $\hbar$ は一カ所にしか現れない、と同様に魅惑的だが、数学的正当化はまだできていない。少し正確に言うと、

[4]彼らの奇変数の構造は「簡単」であって構わない。

問題：確かに形式的論法は魅力的であるが、数学的には据わりが悪い。表現式 (6.7) で $\lambda - i\epsilon$ ($\epsilon > 0$) としたものは正しいのだが、$\epsilon = 0$ とした積分表示式を成立させるためには「新しい積分論」が必要に思われる。これらを正当化するとともに未知の事柄を発見する手段となるか？

(B) 物理学者の文献、例えば [7],[11] では表示式 (6.7) が成立するものとし、この表示式に直接「最速降下の方法 (=method of steepest descent)」を適用できるとし、更に $N \to \infty$ のときの主要項は「相関数」の臨界点であるとしている。臨界点は

$$\delta\mathcal{L}(Q)\tilde{Q} = \frac{d}{d\epsilon}\mathcal{L}(Q+\epsilon\tilde{Q})\Big|_{\epsilon=0},$$

となるから方程式

$$\delta\mathcal{L}(Q) = \mathrm{str}\,\Big(\frac{Q}{J^2} - \frac{1}{\lambda - Q}\Big) = 0$$

の解を探すとしている。鞍点の起こり得る候補として

$$Q_c = (\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4J^2})\mathbb{I}_2,$$

をとり、$\mathcal{L}(Q_c) = 0$ に注意し

$$\lim_{N\to\infty}\big\langle \rho_N(\lambda)\big\rangle_N = \pi^{-1}\Im(\lambda - Q_c)^{-1}_{bb} = w_{sc}(\lambda). \qquad \Box$$

6.2 $\lambda - i\epsilon$ ($\epsilon > 0$) の場合の式 (6.7) の導出

まず

$$\delta(q) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\Im\frac{1}{q-i\epsilon} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{q-i\epsilon} - \frac{1}{q+i\epsilon}\right] = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{q^2+\epsilon^2} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

即ち、任意の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$\pi^{-1}\Im\int_{\mathbb{R}} dq\,\frac{\phi(q)}{q-i\epsilon} = \pi^{-1}\int_{\mathbb{R}} dq\,\frac{\epsilon\phi(q)}{q^2+\epsilon^2} = \pi^{-1}\int_{\mathbb{R}} dq\,\frac{\phi(\epsilon q)}{1+q^2} \to \phi(0) = \langle\phi,\delta\rangle \quad \text{as } \epsilon \to 0$$

となることに注意する。故に、任意に固定した $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対し、

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\langle\phi(\cdot),\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N\delta(\cdot - E_\alpha(H))\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} d\lambda\,\phi(\lambda)\frac{1}{\pi N}\sum_{\alpha=1}^N\frac{\epsilon}{(\lambda - E_\alpha(H))^2+\epsilon^2} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\int_{\mathbb{R}} d\lambda\,\phi(\lambda)\frac{1}{\pi N}\sum_{\alpha=1}^N\frac{\epsilon}{(\lambda - E_\alpha(H))^2+\epsilon^2} \quad \text{by Lebesgue's dom. conv. theorem} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} d\lambda\,\phi(\lambda)\int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\frac{1}{\pi N}\sum_{\alpha=1}^N\frac{\epsilon}{(\lambda - E_\alpha(H))^2+\epsilon^2} \quad \text{by Fubini's theorem}
\end{aligned}$$

となる。

積分の順序変更に関する２番目の等式は、任意の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ をとると、任意の $\epsilon > 0$ と $H \in \mathfrak{U}_N$ に対し

$$|\int_{\mathbb{R}} d\lambda\, \phi(\lambda) \frac{1}{\pi N} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\epsilon}{(\lambda - E_\alpha(H))^2 + \epsilon^2}| \leq \max |\phi(\lambda)|.$$

となることより従う。ここで $\int_{\mathbb{R}} d\lambda\, \epsilon(\lambda^2 + \epsilon^2)^{-1} = \pi$ なることを用いている。更に、第３の等式は

$$\big|\phi(\lambda) \frac{1}{\pi N} \sum_{\alpha=1}^N \frac{\epsilon}{(\lambda - E_\alpha(H))^2 + \epsilon^2}\big| \leq \epsilon^{-1}|\phi(\lambda)|, \quad (\frac{N}{\pi N} \frac{\epsilon}{a^2 + \epsilon^2} \leq \frac{1}{\epsilon})$$

であり、この右辺は、任意に固定した $\epsilon > 0$ に対し、積測度 $d\lambda\, d\mu_N(H)$ に関し積分可能なことより従う。

上式最後のラインで、$d\lambda$ に関し積分する前に極限が取れるかどうかは以下の量を詳しく調べれば良い。

$$g(\lambda, \epsilon, N) = \int_{\mathfrak{U}_N} d\mu(H) \frac{1}{\pi N} \Im \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{\lambda - i\epsilon - E_\alpha(H)}. \tag{6.9}$$

この小節で

(i) 任意の $\epsilon > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ に対し $g(\cdot, \epsilon, N) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ となっている、

(ii) 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し、$\lim_{\epsilon \to 0} g(\cdot, \epsilon, N)$ は $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の意味で存在し、$\big\langle \rho_N(\lambda) \big\rangle_N$ と表記される、
を主張する。

さて

$$\begin{gathered}
z_j = x_j + iy_j,\ \bar{z}_j = x_j - iy_j,\ x_j,\, y_j \in \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}};\ \theta_k, \bar{\theta}_k \in \mathfrak{R}_{\mathrm{od}} = \mathfrak{C}_{\mathrm{od}}, \\
X = {}^t(z, \theta),\ z = {}^t(z_1, \cdots, z_N),\ \theta = {}^t(\theta_1, \cdots, \theta_N), \\
X^* = (z^*, \theta^*),\ z^* = (\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_N),\ \theta^* = (\bar{\theta}_1, \cdots, \bar{\theta}_N)
\end{gathered}$$

とおき、θ_k と $\bar{\theta}_k$ は別の奇変数の組とする。

以下は良く知られた公式でキーとなるものである：

補題 6.1 $\mu = \lambda - i\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ とおく。

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\, \frac{1}{\mu \mathbb{I}_N - H} &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{\mu - E_\alpha(H)} \\
&= i \int_{\mathfrak{C}^{N|2N}} \prod_{j=1}^N \frac{d\bar{z}_j\, dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^N d\bar{\theta}_k d\theta_k\, (z^* \cdot z) \exp[-iX^*(\mathbb{I}_2 \otimes (\mu \mathbb{I}_N - H))X].
\end{aligned} \tag{6.10}$$

これを示すために以下が必要である：

補題 6.2 Γ を対角行列でその成分を $(\gamma_1,\cdots,\gamma_N)$ で $\gamma_j \in \mathbb{R}$ なるものとする。$(z^*\!\cdot z) = \sum_{j=1}^N \overline{z}_j z_j = |z|^2$ とおくと

$$i\int_{\mathfrak{C}^{N|2N}} \prod_{j=1}^N \frac{d\overline{z}_j\, dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^N d\overline{\theta}_k d\theta_k\, (z^*\!\cdot z) \exp\left[-iX^*(\mathbb{I}_2 \otimes (\Gamma - i\epsilon\mathbb{I}_N))X\right] = \sum_{j=1}^N \frac{1}{\gamma_j - i\epsilon}. \tag{6.11}$$

証明：公式

$$i\int_{\mathfrak{C}^{N|0}} \prod_{j=1}^N \frac{d\overline{z}_j\, dz_j}{2\pi i}\, (z^*\!\cdot z) \exp\left[-iz^*(\Gamma - i\epsilon\mathbb{I}_N)z\right] = \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{\gamma_j - i\epsilon}\right) \prod_{j=1}^N \frac{1}{\epsilon + i\gamma_j},$$

と

$$\int_{\mathfrak{C}^{0|2N}} \prod_{k=1}^N d\overline{\theta}_k d\theta_k\, \exp\left[-i\theta^*(\Gamma - i\epsilon\mathbb{I}_N)\theta\right] = \prod_{k=1}^N (\epsilon + i\gamma_k),$$

より (6.11) はすぐに求まる。 □

補題 6.1 の証明: 任意の $N\times N$-エルミート行列 H に対し、Γ として $\lambda\mathbb{I}_N - H$ の対角化をとれば、直ちに (6.10) が求まる。 □

補題 6.3 $\mu = \lambda - i\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ とすると、

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{tr}\ \frac{1}{\mu\mathbb{I}_N - H}\right\rangle_N = i\int \prod_{j=1}^N \frac{d\overline{z}_j\, dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^N d\overline{\theta}_k d\theta_k\, (z^*\!\cdot z) \exp\left[-iX^*(\mathbb{I}_2 \otimes \mu\mathbb{I}_N)X\right] \\ \times \exp\left[-\frac{J^2}{2N}\sum_{j,k=1}^N (\overline{z}_j z_k + \overline{\theta}_j\theta_k)(\overline{z}_k z_j + \overline{\theta}_k\theta_j)\right].\end{aligned} \tag{6.12}$$

証明: 定義から

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{tr}\ \frac{1}{\mu\mathbb{I}_N - H}\rangle_N = \int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\big[i\int \prod_{j=1}^N \frac{d\overline{z}_j\, dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^N d\overline{\theta}_k d\theta_k \\ \times (z^*\!\cdot z)\exp\left[-iX^*(\mathbb{I}_2 \otimes (\mu\mathbb{I}_N - H)X\right]\big].\end{aligned} \tag{6.13}$$

ところで $X^*(\mathbb{I}_2 \otimes H)X = H_{jk}(\overline{z}_j z_k + \overline{\theta}_j\theta_k)$, だから、

$$\left\langle \exp\left[\pm i\sum_{j,k=1}^N H_{jk}(\overline{z}_j z_k + \overline{\theta}_j\theta_k)\right]\right\rangle_N = \exp\left[-\frac{J^2}{2N}\sum_{j,k=1}^N (\overline{z}_j z_k + \overline{\theta}_j\theta_k)(\overline{z}_k z_j + \overline{\theta}_k\theta_j)\right]. \tag{6.14}$$

積分の順序を変更し、(6.14) を (6.13) に代入して (6.12) を得る。 □

ここまでの計算と、式 (6.12) から Wigner 半円則を導く方法は少なくとも 2 つある:
方法 (I) では $\epsilon \to 0$ とすることは簡単で、それは簡明ではない公式を導くが計算可能である、
別の方法 (II) は美しい公式 (6.7) を形式的に導くのだが、その公式で $\epsilon \to 0$ として数学的正当化するために Hermite 多項式が出てくるまで変形していくと式 (6.7) の美しさは失われてしまう。

参考文献

[1] E. Brézin, *Grassmann variables and supersymmetry in the theory of disordered systems*, in Applications of field theory to statistical mechanics, ed. L. Garrido, Lecture Notes in Physics 216 (1985) pp 115-123.

[2] E. Brézin and V.A. Kazakov, *Exactly solvable field theories of closed strings*, Physics Letters B, 236(1990) pp 144-150.

[3] E. Brézin and A. Zee, *Universality of the correlations between eigenvalues of large random matrices*, Nucl.Phys. B402(1993) pp 613-627.

[4] P. Deift, *Four lectures on Random Matrix Theory*, Lecture Notes in Math. Springer, 1815(2003), pp. 21-52.

[5] K.B. Efetov, *Supersymmetry and theory of disordered metals*, Advances in Physics 32(1983) pp. 53-127.

[6] P.J. Forrester, *The spectrum edge of random matrix ensembles*, Nucl.Phys. B402[FS](1993) pp. 709-728.

[7] Y.V. Fyodorov, *Basic features of Efetov's supersymmetry approach*, Les Houches, Session LXI, Physique Quantique Mésoscopique (eds. E. Akkermans, G. Montambaux, J.L. Pichand and J. Zinn-Justin), 1994 Elsevier pp. 493-532.

[8] M.L. Mehta, *Random Matrices*, Academic Press, 2nd ed 1991 Boston.

[9] P.A. Mello, *Theory of Random Matrices: spectral statistics and scattering problems*, Les Houches, Session LXI, Physique Quantique Mésoscopique (eds. E. Akkermans, G. Montambaux, J.L. Pichand and J. Zinn-Justin), Elsevier 1994 pp. 435-491.

[10] C.A. Tracy and H. Widom, *Distribution functions for the largest eigenvalues and their applications*, ICM 2002, vol.I, pp.587-596.

[11] M.R. Zirnbauer, *Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory*, J.Math.Phys.37(1996) pp. 4986-5018.

[12] A. Zvonkin, *Matrix integrals and map enumeration: An accesiible Introduction*, Mathl.Comput.Modelling 26(1997), pp. 281-304.