スーパー解析学の基礎　第9回講義内容 – 08-12.05　井上 淳

1　非可換解析学の必然性とは、そしてそのご利益は？

2　Dirac 方程式と Weyl 方程式

3　スーパー数とスーパー空間

4　スーパー空間上の線形代数

5　スーパー空間上の基礎解析

5.1　スーパー空間上の関数の微分

5.2　スーパー空間上の関数の積分

5.2.1　偶変数での積分[1]

Rogers 等に従い、与えられた偶スーパー領域 $U_{ev} \subset \mathfrak{R}^{m|0}$ 上のスーパースムーズ関数 $u(x)$ の積分を、複素数体上の正則関数の積分を真似て行う。

定義 5.1 偶スーパー領域 $U_{ev} \subset \mathfrak{R}^{1|0}$ 上のスーパースムーズ関数 $u(x)$ をとる。$\lambda = \lambda_{\mathrm{B}} + \lambda_{\mathrm{S}}$, $\mu = \mu_{\mathrm{B}} + \mu_{\mathrm{S}} \in U_{ev}$ とし、$c : [\lambda_{\mathrm{B}}, \mu_{\mathrm{B}}] \to U_{ev}$ を区分的に C^1 な連続曲線で $c(\lambda_{\mathrm{B}}) = \lambda$, $c(\mu_{\mathrm{B}}) = \mu$ なるものとする。このとき、

$$\int_c dx\, u(x) = \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt\, u(c(t))\dot{c}(t) \in \mathfrak{C} \tag{5.1}$$

と定義し、これを曲線 c に沿う u の積分という。

Grassmann 接続した関数の積分について以下が基本的である。

命題 5.1 $u(t) \in C^\infty([\lambda_{\mathrm{B}}, \mu_{\mathrm{B}}] : \mathfrak{C})$ とし $\tilde{u}(x)$ をそれの *Grassmann* 接続とする。$u(t)$ の原始関数 $U(t) \in C^\infty([\lambda_{\mathrm{B}}, \mu_{\mathrm{B}}] : \mathfrak{C})$ があって、$[\lambda_{\mathrm{B}}, \mu_{\mathrm{B}}]$ 上で $U'(t) = u(t)$ とする。そのとき、任

[1] 前回の講義では不備があったので、少し注意する

意の連続で区分的な C^1-曲線 $c:[\lambda_{\mathrm{B}},\mu_{\mathrm{B}}] \to U_{ev} \subset \mathfrak{R}^{1|0}$ で $c(\lambda_{\mathrm{B}})=\lambda,\ c(\mu_{\mathrm{B}})=\mu$ なるものに対し、

$$\int_c dx\,\tilde{u}(x) = \tilde{U}(\lambda) - \tilde{U}(\mu).$$

注意：ここでは $u,\,U$ とその Grassmann 接続 $\tilde{u},\,\tilde{U}$ を区別する記号を用いる。

証明：定義より、

$$\begin{aligned}
\int_c dx\,\tilde{u}(x) &= \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt\,u(c(t))\dot{c}(t) = \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt\left(\sum_{\ell\ge 0}\frac{1}{\ell!}u^{(\ell)}(c_{\mathrm{B}}(t))c_{\mathrm{S}}(t)^{\ell}\right)(\dot{c}_{\mathrm{B}}(t)+\dot{c}_{\mathrm{S}}(t)) \\
&= \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt\,u(c_{\mathrm{B}}(t))\dot{c}_{\mathrm{B}}(t) + \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt\sum_{k\ge 1}\frac{1}{k!}u^{(k)}(c_{\mathrm{B}}(t))\dot{c}_{\mathrm{B}}(t)c_{\mathrm{S}}(t)^{k} \\
&\qquad\qquad + \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt\sum_{\ell\ge 0}\frac{1}{\ell!}u^{(\ell)}(c_{\mathrm{B}}(t))c_{\mathrm{S}}(t)^{\ell}\dot{c}_{\mathrm{S}}(t) \\
&= U(\mu_{\mathrm{B}}) - U(\lambda_{\mathrm{B}}) + \sum_{\ell\ge 0}\frac{1}{(\ell+1)!}\left\{U^{(\ell+1)}(\mu_{\mathrm{B}})(\mu_{\mathrm{S}})^{\ell+1} - U^{(\ell+1)}(\lambda_{\mathrm{B}})(\lambda_{\mathrm{S}})^{\ell+1}\right\} \\
&= \tilde{U}(\mu) - \tilde{U}(\lambda).
\end{aligned}$$

ここで 2 行から 3 行へのところで、被積分関数は $t \in [\lambda_{\mathrm{B}},\mu_{\mathrm{B}}] \subset \mathbb{R}$ から $\mathfrak{C}$ への関数なので部分積分できて

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt\sum_{k\ge 1}\frac{1}{k!}u^{(k)}(c_{\mathrm{B}}(t))\dot{c}_{\mathrm{B}}(t)c_{\mathrm{S}}(t)^{k} &= \sum_{k\ge 1}\frac{1}{k!}u^{(k-1)}(c_{\mathrm{B}}(t))c_{\mathrm{S}}(t)^{k}\Big|_{t=\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} \\
&\qquad - \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt\sum_{k\ge 1}\frac{1}{k!}u^{(k-1)}(c_{\mathrm{B}}(t))\frac{d}{dt}c_{\mathrm{S}}(t)^{k}
\end{aligned}$$

なることを用いた。　　□

系 5.1 $u(x)$ を偶スーパー領域 $U_{ev} \subset \mathfrak{R}^{1|0}$ から へのスーパースムーズ関数とする。c_1, c_2 を $[\lambda_{\mathrm{B}},\mu_{\mathrm{B}}] \to U_{ev}$ の連続で区分的 C^1-曲線とし、$\lambda = c_1(\lambda_{\mathrm{B}}) = c_2(\lambda_{\mathrm{B}})$ かつ $\mu = c_1(\mu_{\mathrm{B}}) = c_2(\mu_{\mathrm{B}})$ なるものとする。もし c_1 が c_2 にホモトピック（連続変形可能）とすると

$$\int_{c_1} dx\,u(x) = \int_{c_2} dx\,u(x) \tag{5.2}$$

となる。故に、もし $[\lambda_{\mathrm{B}},\mu_{\mathrm{B}}] \subset \pi_{\mathrm{B}}(U_{ev})$ ならば

$$\int_{\lambda}^{\mu} dx\,u(x) = \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt\,u(t). \tag{5.3}$$

上式 (5.3) より、次のように定義する。

定義 5.2 *(1)* I_{ev} を $\mathfrak{R}^{m|0}$ 内の偶スーパー領域で $\pi_{\mathrm{B}}(I_{ev}) = \prod_{j=1}^{m}(a_j, b_j) \subset \mathbb{R}^m$ なるものとする。ここで $-\infty < a_j < b_j < \infty$ とし、このような I_{ev} を偶スーパー立方体という。$u \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(I_{ev} : \mathfrak{C})$ に対し

$$\int_{I_{ev}} dx\, u(x) = \int_{a_1}^{b_1} dq_1 \cdots \int_{a_m}^{b_m} dq_m\, u(q_1, \cdots, q_m) = \int_{\pi_{\mathrm{B}}(I_{ev})} dx_{\mathrm{B}}\, u(x_{\mathrm{B}}). \tag{5.4}$$

(2) $U_{\mathrm{ev}} \subset \mathfrak{R}^{m|0}$ を $\pi_{\mathrm{B}}(U_{\mathrm{ev}})$ が面積確定なる任意の偶スーパー領域とする。このとき、に対して $u \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U_{\mathrm{ev}} : \mathfrak{C})$

$$\int_{U_{\mathrm{ev}}} dx\, u(x) = \int_{\pi_{\mathrm{B}}(U_{\mathrm{ev}})} dx_{\mathrm{B}}\, u(x_{\mathrm{B}}) \tag{5.5}$$

とおく。

注意 5.1 *(1)* 公式 (5.5) は多重 *Riemann* 積分の定義と同様に求められる。
(2) 何故 *Riemannian* を用いると良いのかは前に引用した *Rogers* に説明されている。ここでの説明は彼女の議論を偶スーパー領域の場合に限って幾分簡単化して与えている。

5.2.2 奇変数での積分

$v = v(\theta)$ を奇変数 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathfrak{R}_{\mathrm{od}}^n$ に関する多項式で

$$v(\theta_1, \cdots, \theta_n) = \sum_{|b| \le n} v_b \theta^b \quad \text{但し、各 } b \text{ で } v_b\theta^b \in \mathfrak{C} \text{ は斉次とする}$$

なるものとし、それらの集まりを $P_n(\mathfrak{C})$ と記し、

$$\int d\theta\, v(\theta) = \partial_{\theta_n} \cdots \partial_{\theta_1} v(\theta)\big|_{\theta=0}$$

と定める。これを Berezin integral として表徴的に以下のように書く。

$$\int d\theta_n \cdots d\theta_1\, \theta_1 \cdots \theta_n = 1, \quad \int d\theta_n \cdots d\theta_1\, 1 = 0.$$

命題 5.2 v, $w \in P_n(\mathfrak{C})$ に対し以下が成立する：

(1) ($\mathfrak{C}$-linearity) 任意の斉次 λ, $\mu \in \mathfrak{C}$ な元に対し

$$\int d\theta (\lambda v + \mu w)(\theta) = (-1)^{np(\lambda)} \lambda \int d\theta\, v(\theta) + (-1)^{np(\mu)} \mu \int d\theta\, w(\theta).$$

(2) (Translational invariance) 任意の $\rho \in$ に対し

$$\int d\theta\, v(\theta + \rho) = \int d\theta\, v(\theta).$$

(3) (Integration by parts) 斉次な元 $v \in P_n(\mathfrak{C})$ に対し

$$\int d\theta\, v(\theta)\partial_{\theta_s} w(\theta) = -(-1)^{p(v)} \int d\theta\, (\partial_{\theta_s} v(\theta)) w(\theta).$$

(4) (Linear change of variables) $A = (A_{jk})$ を $A_{jk} \in \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}}$ なる成分を持つ可逆な行列とする。

$$\int d\theta\, v(\theta) = (\det A)^{-1} \int d\omega\, v(A \cdot \omega).$$

(5) (Iteration of integrals)

$$\int d\theta\, v(\theta) = \int_{\mathfrak{R}^{0|n-k}} d\theta_n \cdots d\theta_{k+1} \left(\int_{\mathfrak{R}^{0|k}} d\theta_k \cdots d\theta_1\, v(\theta_1, \cdots, \theta_k, \theta_{k+1}, \cdots, \theta_n) \right).$$

(6) (Odd change of variables) $\theta = \theta(\omega)$ を $\theta(0) = 0$ なる奇変数空間での変数変換とし、$\det \left.\dfrac{\partial \theta(\omega)}{\partial \omega}\right|_{\omega=0} \neq 0$ とする。このとき、$v \in P_n(\mathfrak{C})$ に対し

$$\int d\theta\, v(\theta) = \int d\omega\, v(\theta(\omega)) \det{}^{-1} \frac{\partial \theta(\omega)}{\partial \omega}.$$

(7) $v \in P_n(\mathfrak{C})$ と $\omega \in$ に対し

$$\int d\theta\, (\theta_1 - \omega_1) \cdots (\theta_n - \omega_n) v(\theta) = v(\omega).$$

事の始めに「測度」を明示的には必要としない「積分論」については

E. Hewitt and K. Stromberg;Reak and Abstract Analysis, Springer& Kinokuniya, 1969,

を参考にすると良い。ここでは、「正値性」と「被積分関数の定義される空間のコンパクト性」が考える「積分」の「可算加法的な拡張」のキーになっている。

問：奇変数が可算無限個の関数に対する「積分」は定義できるか？

5.2.3 偶奇変数での積分

一般のスーパースムーズ関数 $u(x, \theta) = \sum_{|a| \le n} u_a(x)\theta^a$ に対し、その積分を

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{R}^{m|n}} dx d\theta\, u(x, \theta) &= \int_{\mathfrak{R}^{m|0}} dx \left\{ \int d\theta\, u(x, \theta) \right\} = \int_{\mathfrak{R}^{m|0}} dx\, u_{\bar{1}}(x) \\ &= \int d\theta \left\{ \int_{\mathfrak{R}^{m|0}} dx \sum_{|a| \le n} u_a(x) \right\} \theta^a = \int d\theta \left\{ \int_{\mathfrak{R}^{m|0}} dx\, u(x, \theta) \right\} = \int_{\mathfrak{R}^{m|n}} d\theta dx\, u(x, \theta)\end{aligned}$$

と定義する。ここでは簡単のために、各 a に対し $u_a(\cdot)$ を可積分だとしておく。

注意：後に明らかになるが、この積分の定義だと積分記号下での変数変換に対して具合が悪い事が起こる。ここはかなり面倒で、Berezin 積分を壊さないように「積分」を定義しないと不味いので、後で説明し直す予定である。「積分記号下での変数変換」の種類を制限すれば間違いではないのだが、それでは実用上不便なのである。

5.2.4 スーパー空間上の超対称性

$x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m\subset\mathfrak{R}^{m|0}$ と $(\theta_1,\theta_2)\in\mathfrak{C}_{\mathrm{od}}^2$ とする。$\varepsilon\in\mathfrak{C}_{\mathrm{od}}$, $\gamma>0$ とし $\lambda,\mu\in\mathbb{R}^m\subset\mathfrak{R}^{m|0}$ をとり、変換

$$\begin{cases} x\longrightarrow y=x+2\mu\varepsilon\theta_1+2\lambda\varepsilon\theta_2,\ \text{i.e. } y_j=x_j+2\mu\varepsilon\theta_1+2\lambda_j\varepsilon\theta_2 \\ \theta_1\longrightarrow\omega_1=\theta_1+\gamma\lambda\cdot x\varepsilon,\ \lambda\cdot x=\sum_{j=1}^m\lambda_jx_j \\ \theta_2\longrightarrow\omega_2=\theta_2-\gamma\mu\cdot x\varepsilon \end{cases}$$

を $\tau(\lambda,\mu)$ とする。Grassmann 接続の定義から任意の $f\in C^\infty(\mathbb{R}^m:\mathbb{C})$ に対して

$$f(x+2\mu\varepsilon\theta_1+2\lambda\omega\theta_2)=f(x)+2\mu_j\cdot\nabla f\varepsilon\theta_1+2\lambda\cdot\nabla f\varepsilon\theta_2,\ \mu\cdot\nabla=\sum_{j=1}^m\mu_j\frac{\partial}{\partial x_j}$$

となる。だから（$a=(a_1,a_2)\in\{0,1\}^2$ に対して $\bar{0}=(0,0),\bar{1}=(1,0),\bar{2}=(0,1),\bar{3}=(1,1)$ とおいて)、

$$u(y,\omega)=\sum_{|a|\le 2}u_a(y)\omega^a=u_{\bar{0}}(y)+u_{\bar{1}}(y)\omega_1+u_{\bar{2}}(y)\omega_2+u_{\bar{3}}(y)\omega_1\omega_2,$$

に対し、

$$(\theta_1+\gamma\lambda\cdot x\varepsilon)(\theta_2-\gamma\mu\cdot x\varepsilon)=\theta_1\theta_2+\gamma\lambda\cdot x\varepsilon\theta_2-\theta_1\gamma\mu\cdot x\varepsilon$$

を注意し、少し計算して

$$\begin{aligned}(\tau^*(\lambda,\mu)u)(x,\theta)&=u(\tau(\lambda,\mu)(x,\theta))\\ &=u(x,\theta)+[(\gamma\lambda\cdot x\,u_{\bar{1}}-\gamma\mu\cdot x\,u_{\bar{2}}(x))\\ &\qquad+(-2\nabla u_{\bar{0}}(x)\cdot\mu+\gamma\mu\cdot xu_{\bar{3}}(x))\theta_1+(-2\nabla u_{\bar{0}}(x)\cdot\lambda+\gamma\lambda\cdot xu_{\bar{3}}(x))\theta_2\\ &\qquad+2(\nabla u_{\bar{1}}(x)\cdot\lambda-\nabla u_{\bar{2}}(x)\cdot\mu)\theta_2\theta_1]\varepsilon\end{aligned}\tag{5.6}$$

を得る。

定義 5.3 $u\in\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(\mathfrak{R}^{m|2}:\mathfrak{C})$ が超対称的 *(=supersymmetric)* とは、任意の $\lambda,\mu\in\mathbb{R}^m\subset\mathfrak{R}^{m|0}$ に対して

$$(\tau^*(\lambda,\mu)u)(x,\theta)=u(x,\theta)(=(\tau^*(0,0)u)(x,\theta))$$

となることである。

命題 5.3 (Proposition 4.1 of KLP[2]) $u \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(\mathfrak{R}^{m|2}:\mathfrak{C})$ に対して以下の条件は同値である：

(i) $u \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(\mathfrak{R}^{m|2}:\mathfrak{C})$ は超対称関数である。

(ii) $u_{\bar{1}}(x) = u_{\bar{2}}(x) = 0$ であり、更に

$$\frac{2}{\gamma}\nabla u_{\bar{0}}(x) = xu_{\bar{3}}(x),\ i.e.\ \frac{2}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x_j}u_{\bar{0}}(x) = x_j u_{\bar{3}}(x). \tag{5.7}$$

(iii) $\phi(\cdot):[0,\infty)\to\mathbb{C}$ があって

$$u(x,\theta) = \phi(x^2 - \frac{4}{\gamma}\theta_1\theta_2) = \phi(x^2) - \frac{4}{\gamma}\phi'(x^2)\theta_1\theta_2.$$

証明：$[(i) \Longrightarrow (ii)]$ 超対称ならば (5.6) の右辺の ε の係数は、任意の $\lambda,\mu\in\mathbb{R}^m$ に対して 0 でなければならない。これより (5.7) は従う。

$[(ii) \Longrightarrow (iii)]$ (5.7) を $\mathbb{R}^m$ に制限して考えれば、$u_{\bar{0}}(q)$ が $|q|^2 = q\cdot q$ のみの関数であることが分かる。即ち、$\phi(\cdot):[0,\infty)\to\mathbb{C}$ があって $u_{\bar{0}}(q) = \phi(|q|^2)$ である。Grassmann 接続した関数の微分は微分したものの Grassmann 接続となっているから (iii) が従う。

$[(iii) \Longrightarrow (i)]$ これは明らかであろう。 □

命題 5.4 $u \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(\mathfrak{R}^{m|2}:\mathfrak{C})$ を各 $u_a(\cdot)$ が可積分なるものとする。このとき $\tau = \tau(\lambda,\mu)$ に対し

$$\int_{\mathfrak{R}^{m|2}} dxd\theta_1d\theta_2\,(\tau^* u)(x,\theta_1,\theta_2) = \int_{\mathfrak{R}^{m|2}} dxd\theta_1d\theta_2\,u(x,\theta_1,\theta_2).$$

証明：奇変数に関する積分から

$$\int_{\mathfrak{R}^{m|2}} dxd\theta_1d\theta_2\,u(x,\theta_1,\theta_2) = -\int_{\mathfrak{R}^{m|0}} dx\,u_{\bar{3}}(x),$$

$$\int_{\mathfrak{R}^{m|2}} dxd\theta_1d\theta_2\,(\tau^* u)(x,\theta_1,\theta_2) = -\int_{\mathfrak{R}^{m|0}} dx\,u_{\bar{3}}(x) - 2\int_{\mathfrak{R}^{m|0}} dx\,(\nabla u_{\bar{1}}(x)\cdot\lambda - \nabla u_{\bar{2}}(x)\cdot\mu)\varepsilon$$

一方、可積分性より

$$\int_{\mathfrak{R}^{m|0}} dx\,\nabla u_{\bar{j}}(x) = 0, \quad \bar{j} = \bar{1},\bar{2}$$

となるので、結論が得られる。 □

補題 5.1 $u \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(\mathfrak{R}^{2|2}:\mathfrak{C})$ を可積分な超対称関数とする。このとき

$$\int_{\mathfrak{R}^{2|2}} dxd\theta_1d\theta_2\,u(x,\theta_1,\theta_2) = \frac{4\pi}{\gamma}u_{\bar{0}}(0).$$

証明：前の命題から $u(x,\theta_1,\theta_2) = \phi(x^2 + \frac{4}{\gamma}\bar{\theta}\theta)$ となる $\phi(\cdot):[0,\infty)\to\mathbb{C}$ があり、特に $u_{\bar{0}}(x) = \phi(x^2)$ となる。これが可積分だから $\lim_{t\to\infty}\phi(t) = 0$ であり、

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{R}^{2|2}} dxd\theta_1d\theta_2\,u(x,\theta_1,\theta_2) &= -\frac{4}{\gamma}\int_{\mathfrak{R}^{2|0}} dx\,\phi'(x^2)\\ &= -\frac{8}{\gamma}\int_0^\infty rdr\,\phi'(r^2) = -\frac{4}{\gamma}\int_0^\infty ds\,\phi'(s) = \frac{4}{\gamma}\phi(0) = \frac{4}{\gamma}u_{\bar{0}}(0).\end{aligned}$$ □

[2]A.Klein, L.J. Landau and J.P. Perez, *Supersymmetry and the Parisi-Sourlas dimensional reduction: a rigorous proof*, commun.math.phys.94, 1984, pp.459-482

5.2.5 積分記号下での変数変換則

定理 5.1 写像

$$Y=(y,\omega)\to X=(x,\theta),\quad x=x(y,\omega),\quad \theta=\theta(y,\omega)$$

を $\mathfrak{R}_Y^{m|n}$ から $\mathfrak{R}_X^{m|n}$ へのスーパー微分同型とし、

$$M=\begin{pmatrix}A & C\\ D & B\end{pmatrix},\quad \begin{cases}A=\dfrac{\partial x}{\partial y},\quad C=\dfrac{\partial x}{\partial\omega},\\ D=\dfrac{\partial\theta}{\partial y},\quad B=\dfrac{\partial\theta}{\partial\omega}\end{cases}$$

とする。各 a で $f_a(x)$ がコンパクト台を持つような任意の関数 f, $f(x,\theta)=\sum_{|a|\le n}f_a(x)\theta^a\in\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(\mathfrak{R}_X^{m|n}:\mathfrak{C})$ に対し、次の変数変換則が成立する：

$$\int_{\mathfrak{R}_X^{m|n}}dxd\theta\,f(x,\theta)=\int_{\mathfrak{R}_Y^{m|n}}dyd\omega\,f(x(y,\omega),\theta(y,\omega))(\mathrm{sdet}\,M)(y,\omega).$$

この証明は次回に与えることとし、まずは「Berezin 積分の曖昧さ」について考察する。以下で、上の定理で条件「コンパクト台」を課した理由を探ることになる。

例 1 [Berezin 積分に表れる曖昧さ]. $U=\pi_{\mathrm{B}}^{-1}(U_{\mathrm{B}})\times\mathfrak{R}_{\mathrm{od}}^2\subset\mathfrak{R}^{1|2}$ を $U_{\mathrm{B}}=(0,1)$ なるものとすると、

$$\int_U D(x,\theta)(x+\theta_1\theta_2)=\int_0^1 dx\int d\theta_1d\theta_2(x+\theta_1\theta_2)=1,\quad D(x,\theta)=dx\,d\theta$$

変数変換

$$y=x+\theta_1\theta_2,\ \omega_k=\theta_k:U\to U$$

の Berezinian（スーパー行列式）は

$$\mathrm{sdet}\,(\frac{\partial(x,\theta)}{\partial(y,\omega)})=1\quad\text{where}\quad \frac{\partial(x,\theta)}{\partial(y,\omega)}=\begin{pmatrix}1 & -\omega_2 & \omega_1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

となるので、

$$\int_U D(y,\omega)y=\int_0^1 dy\,\frac{\partial^2}{\partial\omega_2\partial\omega_1}y\Big|_{\omega_1=\omega_2=0}=0.$$

これは困った！この変数変換は許されないものなのか？

例 2 [前に引用した超行列法で出てくるとした Q-積分に関する曖昧さ].

$$\mathcal{Q}=\left\{Q=\begin{pmatrix}x_1 & \theta_1\\ \theta_2 & ix_2\end{pmatrix}\ \Big|\ x_1,x_2\in\mathfrak{R}_{\mathrm{ev}},\ \theta_1,\theta_2\in\mathfrak{R}_{\mathrm{od}}\right\}\cong\mathfrak{R}^{2|2}$$

とし「体積要素」を $dQ=\frac{dx_1dx_2}{2\pi}d\theta_1d\theta_2$ とする。このとき、

$$\int_{\mathfrak{Q}}dQ\,e^{-\mathrm{str}\,Q^2}=\int_{\mathfrak{R}^{2|2}}\frac{dx_1dx_2}{2\pi}d\theta_1d\theta_2\,e^{-(x_1^2+x_2^2+2\theta_1\theta_2)}=1.\tag{5.8}$$

超行列 Q を変数変換

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2},\ y_2 = x_2 - \dfrac{i\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2}, \\ \omega_1 = \dfrac{\theta_1}{x_1 - ix_2},\ \omega_2 = -\dfrac{\theta_2}{x_1 - ix_2}, \end{cases} \tag{5.9}$$

或は

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \omega_1\omega_2(y_1 - iy_2),\ x_2 = y_2 - i\omega_1\omega_2(y_1 - iy_2), \\ \theta_1 = \omega_1(y_1 - iy_2),\ \theta_2 = -\omega_2(y_1 - iy_2), \end{cases} \tag{5.10}$$

を用いて対角化する。すると

$$GQG^{-1} = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & iy_2 \end{pmatrix}, \quad GQ^2G^{-1} = \begin{pmatrix} y_1^2 & 0 \\ 0 & -y_2^2 \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

ここで

$$G = \begin{pmatrix} 1 + 2^{-1}\omega_1\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_2 & 1 - 2^{-1}\omega_1\omega_2 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + 2^{-1}\omega_1\omega_2 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & 1 - 2^{-1}\omega_1\omega_2 \end{pmatrix}.$$

明らかに

$$x_1 - ix_2 = y_1 - iy_2, \quad \text{かつ} \quad \mathrm{str}\ Q^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\theta_1\theta_2 = y_1^2 + y_2^2.$$

また Berezinian は

$$dQ = \frac{dx_1dx_2}{2\pi}d\theta_1d\theta_2 = -\frac{dy_1dy_2}{2\pi}d\omega_1d\omega_2\,(y_1 - iy_2)^{-2}.$$

となるから、

$$-\int \frac{dy_1dy_2}{2\pi}d\omega_1d\omega_2\,(y_1 - iy_2)^{-2}e^{-(y_1^2+y_2^2)} = 0$$

という困った事態が起こる。

この曖昧さを解消するための 2 つの方法を次回に述べることとする。

============ 付録：Riemann 積分記号下での変数変換 ============

定理 5.2 D_1、D_2 をユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の開集合とする。$h : D_1 \to D_2$ を D_1 から D_2 への $1-1$ かつ上への写像で、h および h^{-1} は 1 階連続微分可能とし、

$$J_h(x) = \det\left(\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial(h_1, \cdots, h_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_m)}$$

とする。$f(y)$ が D_2 上で積分可能となる必要十分条件は $f(h(x))|J_h(x)|$ が D_1 上積分可能なることである。更に

$$\iint_{D_2} f(y)dy = \iint_{D_1} f(h(x))|J_h(x)|dx$$

となる。

証明　（以下の証明は J.T. Schwartz[3]による）：
まず、$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m$ に対し以下 $\mathbb{R}^m$ 上の変換 δ_λ, τ, ρ_{ij} を定める：

$$\begin{gathered}\delta_\lambda x=\delta_\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_m)=(\lambda x_1,x_2,\cdots,x_m),\quad \lambda\in\mathbb{R},\\ \tau x=\tau(x_1,x_2,\cdots,x_m)=(x_1+x_2,x_2,\cdots,x_m),\\ \rho_{ij}x=\rho_{ij}(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_m)=(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_m).\end{gathered}$$

それぞれについて、$f(x)\in C_0(\mathbb{R}^m)$、$g(x)\in C_0(\mathbb{R})$ とするとき、以下の積分公式が成立する。

$$|\det(\delta_\lambda)|\iint_{\mathbb{R}^m}f(\delta_\lambda x)dx=\iint_{\mathbb{R}^m}f(x)dx, \tag{5.12}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^m}f(\tau x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_m, \tag{5.13}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^m}f(\rho_{ij}x)dx=\iint_{\mathbb{R}^m}f(x)dx. \tag{5.14}$$

（証）(5.12): Fubini の定理を用い逐次積分に書き換え、１変数積分の

$$|\lambda|\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)dy$$

を用い、最後に再度 Fubini の定理を用いれば

$$\begin{aligned}|\det(t_\lambda)|\iint_{\mathbb{R}^m}f(\delta_\lambda x)dx&=|\lambda|\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda x_1,x_2,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_m\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_m\\&=\iint_{\mathbb{R}^m}f(x)dx.\end{aligned}$$

(5.13): Fubini の定理を用い逐次積分に書き換え、１変数積分の任意の z に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(y+z)dy=\int_{-\infty}^{\infty}g(y)dy$$

となることを用い、最後に再度 Fubini の定理を用いれば

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^m}f(\tau x)dx&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1+x_2,x_2,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_m\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_m.\end{aligned}$$

[3]J.T. Schwartz: *The formula for change in variables in a multiple integral*, Amer.Math.Monthly, 61(1954), pp. 81-85.

(5.14): Fubini の定理より、多重積分は（積分順序をどうとったにしろ）逐次積分と等しいから、

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^m} f(\rho_{ij}x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_i\cdots dx_j\cdots dx_m \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_m)dx_1\cdots dx_j\cdots dx_i\cdots dx_m \\ &= \iint_{\mathbb{R}^m} f(x)dx. \qquad \text{(4), (5), (6) を用いた。} \qquad \square\end{aligned}$$

さて、$x \in \mathbb{R}^m$ に対してノルムを $|x| = \max_{1\le j\le m}|x_j|$ とし、線形写像 $A = (a_{jk}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ に対し、そのノルムを $|A| = \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ と定義する。すると、$|Ax| \le |A||x|$ となる。また、

$$j_{ik}(x) = \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_k}, \quad J(x) = J_h(x) = (j_{ik}(x))$$

とおく。

S をユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の集合でその体積を $\mu(S)$ と書くことにする。$C = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x-p| \le s\}$ を中心 p、一辺 $2s$ の立方体とする。このとき $\mu(C) = (2s)^n$ である。平均値の定理から

$$h_i(x) - h_i(p) = \sum_{k=1}^m j_{ik}(p+\theta_i(x)(x-p))(x_k-p_k), \quad \theta_i(x) \in [0,1]$$

と書けるので、

$$|h(x) - h(p)| \le s\max_{y\in C}|j(y)|;$$

となる。即ち、$h(C)$ は

$$|z - h(p)| \le s\max_{y\in C}|j(y)|$$

なる立方体に含まれ、

$$\mu(h(C)) \le \{\max_{y\in C}|j(y)|\}^m\mu(C)$$

となる。この式を、A を正則な線形写像とし、任意の閉集合 S に対し適用し

$$\mu(A^{-1}(S)) = |\det(A^{-1})|\mu(S)$$

が導かれる。実際、この式は h を線形写像、関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A^{-1}(S)), \\ 0 & (x \notin A^{-1}(S)) \end{cases}$$

に対し定理を適用すればよいし、それはすでに示した。

これを $S = h(C)$ に適用する。C は閉集合で有界であり h は連続だから $h(C)$ は閉である。故に任意の正則な線形写像 A に対し

$$|\det(A^{-1})|\mu(h(C)) \le \{\max_{y\in C}|A^{-1}j(y)|\}^m\mu(C)$$

となるから、

$$|\mu(h(C)) \leq |\det(A)|\{\max_{y\in C}|A^{-1}j(y)|\}^m\mu(C) \tag{5.15}$$

が求まる。さて、立方体

$$C = \sum_{k=1}^{M} C_k, \quad C_j \cap C_k = \emptyset\ (j \neq k)$$

と有限個に分解し、C_k の中心を x_k とし、それらの辺の最大値を δ とする。

$$\mu(h(C)) \leq \sum_{k=1}^{M}|\mu(h(C_k)) \leq \sum_{k=1}^{M}|\det(j(x_k))|\{\max_{y\in C_k}|j^{-1}(x_k)j(y)|\}^m\mu(C_k) \tag{5.16}$$

一方、$j(x)$ は行列値の連続関数だから、$z \to y$ のとき

$$j^{-1}(z)j(y) \to \mathbb{I}_m$$

となる。故に $\lim_{\delta\to 0}\eta(\delta) = 0$ となる $\eta(\delta)$ があって、

$$\{\max_{y\in C_k}|j^{-1}(x_k)j(y)|\}^m \leq 1 + \eta(\delta)$$

となる。これより、δ が十分小さいとき

$$\mu(h(C)) \leq [1+\eta(\delta)]\sum_{k=1}^{M}|\det(j(x_k))|\mu(C_k)$$

が分かる。さて $\delta \to 0$ とすると、積分の定義から

$$\mu(h(C)) \leq \iint_C |J_h(x)|dx$$

となる。再度、積分の定義に戻って考えると、ただちに

$$\iint_{D_2} f(x)dx \leq \iint_{D_1} f(h(x))|J_h(x)|dx \tag{5.17}$$

となる。(5.17) を写像 h^{-1} に対して適用して

$$\iint_{D_2} f(x)dx \leq \iint_{D_1} f(h(x))|J_h(x)|dx \leq \iint_{D_2} f(h^{-1}(h(x)))|J_h(h^{-1}(x))J_{h^{-1}}(x)|dx$$

となる。$J_h(h^{-1}(x))J_{h^{-1}}(x) = 1$ となることに注意すれば、$f(x) \in C_0(\mathbb{R}^m)$ に対し、望みの公式が得られたことになる。　□

============ Riemann 積分記号下での変数変換終 ============

５名の諸君が聴講してくれている。