スーパー解析学の基礎　第8回講義予定 – 08-11.28　井上 淳

1　非可換解析学の必然性とは、そしてそのご利益は？

2　Dirac 方程式と Weyl 方程式

3　スーパー数とスーパー空間

4　スーパー空間上の線形代数

5　スーパー空間上の基礎解析

5.1　スーパー空間上の関数の微分

5.1.1　Grassmann 接続の導入

5.1.2　スーパースムーズ関数の導入と偏微分

5.1.3　スーパースムーズ関数の特徴付

Bosonic case　：前回の講義で述べた。

Fermionic case　：$\mathfrak{R}^{0|n} = \mathfrak{C}_{\mathrm{od}}^{n}$ 上のスーパー Fréchet 微分可能関数が スーパー解析的になることを示す。

定義 5.1 ((1.1.10) of deWitt, p.2691 of 松本-嘉数) 関数 f が θ で $\mathfrak{C}_{\mathrm{od}}$ から $\mathfrak{C}$ へスーパー解析的であるための必要十分条件は元 $\alpha(\theta),\ \beta(\theta) \in \mathfrak{C}$ と関数 $\epsilon(\theta,\omega),\ \rho(\theta,\omega)$ があって

$$\begin{aligned}
&f(\theta+\omega) - f(\theta) = \alpha(\theta)\,\omega + \epsilon(\theta,\omega)\,\omega = \omega\,\beta(\theta) + \omega\,\rho(\theta,\omega),\\
&\epsilon(\theta,\omega) \to 0 \quad \text{かつ} \quad \rho(\theta,\omega) \to 0 \quad when \quad (\omega \to 0).
\end{aligned} \tag{5.1}$$

ここで、右と左微分は

$$\alpha(\theta) = f(\theta)\frac{\overleftarrow{d}}{d\theta}, \quad \beta(\theta) = \frac{\overrightarrow{d}}{d\theta}f(\theta).$$

注意：ここでは特別に断らない限り、$\dfrac{\overrightarrow{d}}{d\theta}f(\theta)$ を単に $\dfrac{d}{d\theta}f(\theta)$ と記す。

補題 5.1 ((1.1.11) of deWitt, Theorem 4 of 松本-嘉数) 連結開集合 $U \subset \mathfrak{C}_{\mathrm{od}}$ から $\mathfrak{C}$ へのスーパー解析関数 f は次のものに限る*:*

$$f(\theta) = a + \theta\,b \quad with \quad a,\, b \in \mathfrak{C}.$$

証明：f を

$$f = f_{\rm ev} + f_{\rm od} \quad \text{with} \quad f_{\rm ev} = f_{0,\rm ev} + f_{S,\rm ev},$$
$$\text{where} \quad f_{\rm ev}(\theta) = \sum_{|I|={\rm ev}} f_I(\theta)\sigma^I = f_{\tilde{0}}(\theta) + f_{S,\rm ev}(\theta),\ f_{S,\rm ev}(\theta) = \sum_{|I|={\rm ev}\geq 2} f_I(\theta)\sigma^I,$$
$$\text{かつ} \quad f_{\rm od}(\theta) = \sum_{|I|={\rm od}} f_I(\theta)\sigma^I$$

と分解する。更に、定義式 5.1 より $\beta(\theta) = \beta_{\rm ev}(\theta) + \beta_{\rm od}(\theta)$, $\rho(\theta,\omega) = \rho_{\rm ev}(\theta,\omega) + \rho_{\rm od}(\theta,\omega)$ と分解すると

$$\begin{aligned}
&f_{\tilde{0}}(\theta+\omega) - f_{\tilde{0}}(\theta) = 0,\\
&f_{S,\rm ev}(\theta+\omega) - f_{S,\rm ev}(\theta) = \omega\,\beta_{\rm od}(\theta) + \omega\,\rho_{\rm od}(\theta,\omega),\\
&f_{\rm od}(\theta+\omega) - f_{\rm od}(\theta) = \omega\,\beta_{\rm ev}(\theta) + \omega\,\rho_{\rm ev}(\theta,\omega),\\
&f_S(\theta+\omega) - f_S(\theta) = \omega\,\beta(\theta) + \omega\,\rho(\theta,\omega).
\end{aligned}$$

上の最後の式で $\theta = 0$、$\omega = \lambda\eta$ とおき、　$\rho(0,\lambda\eta) = o(1)(\mathbb{R} \ni \lambda \to 0)$ を用いて[1]以下の第 2 式が求まる。

$$f_{\tilde{0}}(\eta) = f_{\tilde{0}}(0), \quad f_S(\eta) - f_S(0) = \eta\,\beta(0).$$

故に、$f(\theta) = a + \theta\, b$、ここで $a = f_{\tilde{0}}(0) + f_S(0)$, $b = \beta(0) \in \mathfrak{C}$.　　$\square$

系 5.1 f を $\mathfrak{C}^{0|n}$ から $\mathfrak{C}$ へスーパー *Fréchet* 微分可能関数とすると

$$f(\theta) = \sum_{|a|\leq n} f_a\theta^a, \quad f_a \in \mathfrak{C},\ a = (a_1,\cdots,a_n) \in \{0,1\}^n.$$

証明：$n = 1$ の場合は既に示した。主張は $k \geq 1$ とし $\mathfrak{C}^{0|k}$ では正しいとし、$f(\theta_1,\cdots,\theta_{k+1})$ が $\mathfrak{C}^{0|k+1}$ から $\mathfrak{C}$ へスーパー Fréchet 微分可能とする。$\theta' = (\theta_2,\cdots,\theta_{k+1})$ とし $g(\theta_1;\theta') = f(\theta_1,\theta')$ とおく。固定された θ' をパラメータとして $g(\theta_1;\theta')$ は $\mathfrak{C}_{\rm od} \ni \theta_1 \to \mathfrak{C}$ でスーパー Fréchet 微分可能だから、

$$g(\theta_1;\theta') = a_1 + \theta_1 b_1 \quad \text{with} \quad a_1 = a_1(\theta'),\ b_1 = b_1(\theta').$$

ここで $a_1(\theta')$ と $b_1(\theta')$ は $\mathfrak{C}^{0|k}$ から $\mathfrak{C}$ へスーパー Fréchet 微分可能関数だから、帰納法の仮定より結果が従う。　$\square$

Bosonic+Fermionic case　：スーパースムーズ関数とその偏微分の定義は前回既に述べた。思い出しておくと

定義 5.2 スーパー領域 $U \subset \mathfrak{R}^{m|n}$ から $\mathfrak{C}$ への関数 f がスーパースムーズとは次の構造を持つことである：

$$f(x,\theta) = \sum_{|a|\leq n} f_a(x)\theta^a \quad a = (a_1,\cdots a_n) \in \{0,1\}^n,\ \theta^a = \theta_1^{a_1}\cdots\theta_n^{a_n},\ f_a(x) \in \mathcal{C}_{\rm SS}(U_{\rm ev}:\mathfrak{C}). \tag{5.2}$$

以下では、断らない限り、 $f_a(x)$ が各 a に対して斉次のものを扱い、それを $\mathcal{C}_{\rm SS}(U:\mathfrak{C})$. と書く。また

$$\not{\mathcal{C}}_{\rm SS} = \{f(x,\theta) \in \mathcal{C}_{\rm SS}(U:\mathfrak{C}) \,|\, f_a(x) \in \mathbb{C}\}$$

とおく。

[1]式 $f_S(0+\lambda\eta) - f_S(0) = \lambda\eta\,\beta(0) + \lambda\eta\,\rho(0,\lambda\eta)$ において両辺を λ で割りその後 $\lambda = 1$ とおく

$f \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U:\mathfrak{C})$ とし、$X=(x,\theta), Y=(y,\omega) \in \mathfrak{R}^{m|n}$ が $X+tY \in U$（$t \in [0,1]$）を満たすとき、前回述べた命題の系を繰り返して

$$\frac{d}{dt}f(X+tY)\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{m} y_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(X) + \sum_{s=1}^{n} \omega_s \frac{\partial}{\partial \theta_s} f(X) \tag{5.3}$$

定義 5.3 スーパー領域 $U \subset \mathfrak{R}^{m|n}$ から $\mathfrak{C}$ への関数 f は以下を満たすとき $X=(x,\theta)$ でスーパー *Fréchet* 微分可能と言われる：

$$f(X+Y)-f(X) = \sum (y_i F_i(X) + \omega_s F_s(X)) + \sum (y_i R_i(X,Y) + \omega_s R_s(X,Y)) \quad \textit{for} \quad Y=(y,\omega),$$
$$\textit{where} \quad d(R_i(X,Y),0) \to 0, \quad d(R_s(X,Y),0) \to 0 \quad \textit{when} \quad d_{m|n}(Y,0) \to 0.$$

定理 5.1 f をスーパー領域 $U \subset \mathfrak{R}^{m|n}$ から $\mathfrak{C}$ への関数とする。このとき、

$$f \text{ がスーパースムーズ} \iff f \text{ がスーパー } \textit{Fréchet} \text{ 微分可能}$$

注意 5.1 この講義録の付録に、生成元の数と奇変数の数が一致する場合には、例えば *Vladimirov-Volvich* 等に述べられていた *Cauchy-Riemann* 方程式が満たされる。生成元が可算無限個の場合に対する成分 $X_{\kappa,I}$ に関する *Cauchy-Riemann* 方程式を述べておくが、この条件をチェックするのは不可能のように思える。

5.1.4 スーパースムーズ関数の合成

定義 5.4 $U \subset \mathfrak{R}^{m|n}$ と $U' \subset \mathfrak{R}^{m'|n'}$ をスーパー領域とし、φ を U から U' への連続写像で $\varphi(X) = (\varphi_1(X),\cdots,\varphi_{m'}(X),\varphi_{m'+1}(X),\cdots,\varphi_{m'+n'}(X)) \in \mathfrak{R}^{m'|n'}$ と表示されているものとする。このとき、φ が U から U' へのスーパースムーズ写像であるとは、各 $\kappa=1,\cdots,m'+n'$ に対し $\varphi_\kappa(X) \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U:\mathfrak{C})$ であり、かつ $\varphi(U) \subset U'$ なることである。

命題 5.1 (スーパースムーズ写像の合成) スーパー領域 $U \subset \mathfrak{R}^{m|n}$ と $U' \subset \mathfrak{R}^{m'|n'}$ をとし、$\Phi: U \to U'$ と $\Phi': U' \to \mathfrak{R}^{m''|n''}$ がスーパースムーズ写像とする。これらの写像の合成 $\Psi = \Phi' \circ \Phi : U \to \mathfrak{R}^{m''|n''}$ もスーパースムーズ写像で以下を満たす：

$$d_X \Psi(X) = [d_Y \Phi'(Y)]\big|_{Y=\Phi(X)} [d_X \Phi(X)]. \tag{5.4}$$

証明：(1) まず m と m' は任意で、$n=n'=0$ かつ $m''=n''=1$ なるときを考える。$U_{ev} \subset \mathfrak{R}^{m|0}$ と $U'_{ev} \subset \mathfrak{R}^{m'|0}$ を偶スーパー領域とし、$\varphi: U_{ev} \to U'_{ev}$ を $\varphi(x) = (\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{m'}(x))$ と表示されるスーパースムーズ写像とする（但し、$\varphi_j(x) \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U_{ev}:\mathfrak{C})$）。任意の f$\in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U'_{ev}:\mathfrak{C})$ に対し、$(\varphi^* f)(x) = (f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x))$ が well-defined で $\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U_{ev}:\mathfrak{C})$ となることを主張する。

$$y = \varphi(x_{\mathrm{B}}) = \varphi_{\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}}) + \varphi_{\mathrm{S}}(x_{\mathrm{B}}) = y_{\mathrm{B}} + y_{\mathrm{S}} \quad \text{with} \quad \varphi_{\mathrm{S}}(x_{\mathrm{B}}) = \sum_{|J|\ge 1} \varphi_J(x_{\mathrm{B}}) \sigma^J,$$

とおき、f と φ のスーパースムーズ性より、

$$f(\varphi(x_{\mathrm{B}}))^{[k]} = \sum_{\substack{|\alpha| \le k, \\ k_0+k_1+\cdots+k_m=k}} \frac{1}{\alpha!} (\partial_y^\alpha f)^{[k_0]}(y_{\mathrm{B}}) (y_{1,\mathrm{S}}^{\alpha_1})^{[k_1]} \cdots (y_{m,\mathrm{S}}^{\alpha_m})^{[k_m]} \Big|_{y=\varphi(x_{\mathrm{B}})} \tag{5.5}$$

と定義する。命題[2] の証明をたどると $f(\varphi(x_\mathrm{B}))^{[k]}$ は well-defined で $C^\infty(U_\mathrm{B}:\mathfrak{C}^{[k]})$ に属することが示せるので $f(\varphi(x_\mathrm{B}))=\sum_{k=0}^\infty f(\varphi(x_\mathrm{B}))^{[k]}\in C^\infty(U_\mathrm{B}:\mathfrak{C})$. 故に、これは Grassmann 接続を持つので $(f\circ\varphi)(x)$ と記す。一方、式 $\partial_{x_j}\tilde{f}(x)=\widetilde{\partial_{q_j}f}(x)$ より

$$
\begin{aligned}
&\partial_{x_{j,\mathrm{B}}}(f\circ\varphi)^{[k]}(x_\mathrm{B})\\
&\quad=\sum_{\substack{\ell,\,|\alpha|\le k,\\ k_0+k_1+\cdots+k_m=k}}\frac{1}{\alpha!}(\partial_y^\alpha\partial_{y_\ell}f)^{[k_0]}(y_\mathrm{B})\frac{\partial\varphi_{\ell,\mathrm{B}}(x_\mathrm{B})}{\partial x_{j,\mathrm{B}}}(y_{1,\mathrm{S}}^{\alpha_1})^{[k_1]}\cdots(y_{m,\mathrm{S}}^{\alpha_m})^{[k_m]}\Big|_{y=\varphi(x_\mathrm{B})}\\
&\quad=\sum_{\substack{\ell,\,|\alpha|\le k,\\ k_0+k_1+\cdots+\\ k'_\ell+k''_\ell+\cdots+k_m=k}}\frac{1}{\alpha!}(\partial_y^\alpha\partial_{y_\ell}f)^{[k_0]}(y_\mathrm{B})\\
&\qquad\qquad\times(y_{1,\mathrm{S}}^{\alpha_1})^{[k_1]}\cdots\alpha_\ell(y_{\ell,\mathrm{S}}^{\alpha_\ell-1})^{[k'_\ell]}\frac{\partial\varphi_{\ell,\mathrm{S}}(x_\mathrm{B})}{\partial x_{j,\mathrm{B}}}\Big)^{[k''_\ell]}\cdots(y_{m,\mathrm{S}}^{\alpha_m})^{[k_m]}\Big|_{y=\varphi(x_\mathrm{B})}\\
&\quad=\sum_\ell\sum_{k_0=0}^{k}\Big(\partial_{y_\ell}f(\varphi(x_\mathrm{B}))\Big)^{[k_0]}\Big(\frac{\partial\varphi_\ell(x_\mathrm{B})}{\partial x_{j,\mathrm{B}}}\Big)^{[k-k_0]}.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

これより、 (1) の場合についての式 (5.4) が示された。

(2) 次に、$m,\ m',\ n,\ n'$ が任意で、$m''=n''=1$ となる場合を考える。$U\subset\mathfrak{R}^{m|n}$ と $U'\subset\mathfrak{R}^{m'|n'}$ をスーパー領域、$\varphi:U\to U'$ と $f:U'\to\mathfrak{C}$ をスーパー写像とし、$\varphi_\kappa(x,\theta)=\sum_a\varphi_{\kappa,a}(x)\theta^a$ と $f(y,\omega)=\sum_b f_b(y)\omega^b$ $(b=(b_1,\cdots,b_{n'})\in\{0,1\}^{n'})$ と表示されているとする。このとき $\varphi(x,\theta)=(\varphi_\kappa(x,\theta)),\ 1\le\kappa\le m'+n'$ とおく。

$$\varphi_j(x,\theta)=Y_j=Y_j^{(0)}+Y_j^{(1)}\quad\text{for}\quad 1\le j\le m'$$

と分解する。ここで

$$
\begin{cases}
Y_j^{(0)}=\varphi_{j,\tilde{0}}(x)=Y_{j,\mathrm{B}}^{(0)}+Y_{j,\mathrm{S}}^{(0)}\quad\text{with}\quad Y_{j,\mathrm{B}}^{(0)}=\varphi_{j,\tilde{0},\mathrm{B}}(x),Y_{j,\mathrm{S}}^{(0)}=\varphi_{j,\tilde{0},\mathrm{S}}(x),\\
Y_j^{(1)}=\sum_{1\le|a|\le n}\varphi_{j,a}(x)\theta^a.
\end{cases}
$$

形式的に

$$\tilde{F}(x,\theta)=\sum_b f_b(Y_1,\cdots,Y_{m'})(Y_{m'+1})^{b_1}\cdots(Y_{m'+n'})^{b_{n'}}$$

とおく。$Y_j^{(1)}Y_j^{(1)}=0$ だから、Taylor の公式を $Y=Y^{(0)}$ で $f_b(Y^{(0)}+Y^{(1)})$ に対して適用し

$$
\begin{aligned}
f_b(Y^{(0)}+Y^{(1)})=f_b(Y^{(0)})+\sum_{j=1}^{m'}\partial_{y_j}f_b(Y^{(0)})Y_j^{(1)}&\\
+\cdots+\partial_{y_1}\cdots\partial_{y_{m'}}f_b(Y^{(0)})Y_1^{(1)}\cdots Y_{m'}^{(1)}&.
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

一方

$$f_b(Y^{(0)})=\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_Y^\alpha f_b(Y_\mathrm{B}^{(0)})(Y_\mathrm{S}^{(0)})^\alpha,\tag{5.8}$$

だから、

$$f_b(\varphi_1(x,\theta),\cdots,\varphi_{m'}(x,\theta))=\sum_c g_{b,c}(x)\theta^c\tag{5.9}$$

ここで、$g_{b,c}(x)$ は U_{ev} 上のスーパースムーズ関数でスーパースムーズ関数 $\partial_y^\alpha f(\varphi_\mathrm{B}(x))$ と $\varphi_{\kappa,a}(x)$ の積からなる。これより、

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}(x,\theta)&=\sum_b(\sum_c g_{b,c}(x)\theta^c)(\sum_{\tilde{a}_1}\varphi_{m'+1,\tilde{a}_1}(x)\theta^{\tilde{a}_1})^{b_1}(\sum_{\tilde{a}_{n'}}\varphi_{m'+n',\tilde{a}_{n'}}(x)\theta^{\tilde{a}_{n'}})^{b_{n'}}\\
&=\sum_d\tilde{F}_d(x)\theta^d,
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

[2]前々回述べた命題、滑らかな関数 f に対しその germs $\{\partial_q^\alpha f(q)\}_{|\alpha|=0}^\infty$ を $\tilde{f}$ という関数形にしたもの

ここで、$d=(d_s)$, $c=(c_s)$, $\tilde{a}_s=(\tilde{a}_{s,r})$, $d_s=c_s+b_1\tilde{a}_{1,s}+\cdots+b_{n'}\tilde{a}_{n',s}$、但し、$1\le s\le n$ かつ $1\le r\le n'$.
故に、$\tilde{F}_d(x)\in\mathcal{C}_{\rm SS}(U_{ev}:\mathfrak{C})$, 即ち、$\tilde{F}(x,\theta)=f(\varphi(x,\theta))\in\mathcal{C}_{\rm SS}(U;\mathfrak{C})$. (2) の場合の式 (5.4) を得るために、式 (5.10) を x_k に関し微分する

$$\partial_{x_k}\tilde{F}(x,\theta)=\sum_{j=1}^{m'}\sum_b \partial_{y_j}f_b(\varphi_{ev}(x,\theta))\frac{\partial\varphi_j(x,\theta)}{\partial x_k}(\varphi_{od}(x,\theta))^b$$
$$+\sum_b f_b(\varphi_{ev}(x,\theta))\sum_{s=m'+1}^{m'+n'}(-1)^{b_1+\cdots+b_{s-1}}b_s\frac{\partial\varphi_s(x,\theta)}{\partial x_k}\prod_{\ell=1}^{(s,n')}\varphi_{m'+\ell}(x,\theta)^{b_\ell}.$$

ここで、$\prod_{\ell=1}^{(s,n')}\varphi_{m'+\ell}(x,\theta)^{b_\ell}=\overbrace{\varphi_{m'+1}(x,\theta)^{b_1}\cdots 1}^{s}\cdots\varphi_{m'+n'}(x,\theta)^{b_{n'}}$, $\varphi_{ev}(x,\theta)=(\varphi_j(x,\theta))_{j=1}^{m'}$ かつ $\varphi_{od}(x,\theta)=(\varphi_{m'+s}(x,\theta))_{s=1}^{n'}$ とする。

θ_r に関し微分すれば上と同様の表示を得、これらより

$$[\partial_{x_k}\tilde{F}(x,\theta),\partial_{\theta_r}\tilde{F}(x,\theta)]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\varphi_j(x,\theta)}{\partial x_k},\cdots,\dfrac{\partial\varphi_j(x,\theta)}{\partial\theta_r}\\ \dfrac{\partial\varphi_s(x,\theta)}{\partial x_k},\cdots,\dfrac{\partial\varphi_s(x,\theta)}{\partial\theta_r}\end{bmatrix}\left[\frac{\partial f(y,\omega)}{\partial y_j},\frac{\partial f(y,\omega)}{\partial\omega_s}\right],$$

即ち、(2) の場合の式 (5.4) を得る。
(3) 同様の議論を一般の場合に行い、辛抱強く計算することによって望みの結果を得る。 □

定義 5.5 $U\subset\mathfrak{R}^{m|n}$ と $U'\subset\mathfrak{R}^{m'|n'}$ をスーパー領域とし、$\varphi:U\to U'$ はスーパースムーズ写像で $\varphi(X)=(\varphi_1(X),\cdots,\varphi_{m'+n'}(X))$ *with* $\varphi_\kappa(X)\in\mathcal{C}_{\rm SS}(U:\mathfrak{C})$ と表示されるものとする。
(1) φ は以下を満たすときスーパー微分同型と言われる。

(i) φ は U と U' の位相同型、

(ii) φ と φ^{-1} はスーパースムーズ写像。

(2) 任意の $f\in\mathcal{C}_{\rm SS}(U':\mathfrak{C})$ に対し、f の *pull back* と言われる $(\varphi^*f)(X)=(f\circ\varphi)(X)=f(\varphi(X))$ は f の *pull back* は *well-defined* で $\mathcal{C}_{\rm SS}(U:\mathfrak{C})$ に属する。

注意 5.2 *(1)* φ がスーパー微分同型ならば $\varphi_{\rm B}=\pi_{\rm B}\circ\varphi$ は $U_{\rm B}$ から $U'_{\rm B}$ への普通の意味の C^∞ 微分同型となる。
(2) $\mathcal{C}_{\rm SS}(U':\mathfrak{C})$ と $\mathcal{C}_{\rm SS}(U:\mathfrak{C})$ の位相を適切に導入すれば、φ^* は $\mathcal{C}_{\rm SS}(U':\mathfrak{C})$ から $\mathcal{C}_{\rm SS}(U:\mathfrak{C})$ への連続な線形写像を与える。更にもし $\varphi:U\to U'$ がスーパー微分同型ならば φ^* は $\mathcal{C}_{\rm SS}(U':\mathfrak{C})$ から $\mathcal{C}_{\rm SS}(U:\mathfrak{C})$ への同型写像を与える。

============ 付録 ============

スーパースムーズ性の意味を知るために、関数の座標依存性を詳しく見ることにするが、この特徴付けは後の具体例の計算に役立ちそうにない。

命題 5.2 U を $\mathfrak{R}^{m|n}$ におけるスーパー領域とし、$f(X)=\sum_I f_I(X)\sigma^I\in\mathcal{C}_{\rm SS}(U:\mathfrak{C})$ とする。点 X は $X=(X_\kappa)_{\kappa=1}^{m+n}$、$X_\kappa=\sum_I X_{\kappa,I}\sigma^I$、各 $|I|\neq 0$ に対して $X_{\kappa,I}\in\mathbb{C}$ かつ $X_{\kappa,\tilde{0}}\in\mathbb{R}$ と表示されるとする。このとき関数 $f(X)$ は可算無限個の変数 $\{X_{\kappa,I}\}$ をもった $\mathfrak{C}$ 値関数で以下の *Cauchy-Riemann* 型方程式を満

たす：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial X_{\kappa,I}} f(X) = \sigma^I \dfrac{\partial}{\partial X_{\kappa,\tilde{0}}} f(X) \quad (1 \le \kappa \le m,\ |I| = even), \\ \sigma^K \dfrac{\partial}{\partial X_{\kappa,J}} f(X) + \sigma^J \dfrac{\partial}{\partial X_{\kappa,K}} f(X) = 0 \quad (m+1 \le \kappa \le m+n,\ |J| = odd = |K|). \end{cases} \tag{5.11}$$

ここで、$Y_{(\kappa,\tilde{0})} = (\overbrace{0,\cdots,0,1}^{\kappa},0,\cdots,0) \in \mathfrak{R}^{m|n}$、$Y_{(\kappa,I)} = (\overbrace{0,\cdots,0,\sigma^I}^{\kappa},0,\cdots,0) \in \mathfrak{R}^{m|n}$ に対し、

$$\frac{\partial}{\partial X_{\kappa,\tilde{0}}} f(X) = \frac{d}{dt} f(X + tY_{(\kappa,\tilde{0})}) \Big|_{t=0} \sigma^J, \quad \frac{\partial}{\partial X_{\kappa,I}} f(X) = \frac{d}{dt} f(X + tY_{(\kappa,I)}) \Big|_{t=0} \tag{5.12}$$

とおいた。

逆に、関数 $f(X) = \sum_I f_I(X)\sigma^I$ が与えられ、任意の $X, Y \in U$ に対し $f_I(X + tY) \in C^\infty([0,1] : \mathbb{C})$ であり、上の式 (5.11) を満たすとする。このとき、$f \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U : \mathfrak{C})$ となる。

証明：(5.3) において $1 \le \kappa \le m$、$|J|$ =even とし Y を $Y_{(\kappa,J)}$ で置き換えれば式 (5.11) における最初の式を得る。また、(5.3) において $Y_{(\kappa,J)}$ 或は $Y_{(\kappa,K)}$ を $m+1 \le \kappa \le m+n$ かつ $|J| = \mathrm{odd} = |K|$ なるものとし、それぞれに σ^K 或は σ^J を左から掛けると、(5.11) の第 2 の式が従う。

逆の主張のために、関数達 $F_i(X)(1 \le i \le m+n)$ で、$X \in U$ と $H = (H_i) \in \mathfrak{R}^{m|n}$ に対して

$$\frac{d}{dt} f(X + tH)\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{m+n} H_i F_i(X) \tag{5.13}$$

となるものを構成する。

(5.3) と (5.11) の最初の式から

$$F_\kappa(X) = \frac{\partial}{\partial X_{\kappa,\tilde{0}}} f(X) \quad \text{for} \quad 1 \le \kappa \le m\ X \in U$$

となる。関数 $F_\kappa(X)(m+1 \le \kappa \le m+n)$ を定めるために、次の補題を用意する：

補題 5.2 スーパー数の集まり $\{F_I \in \mathfrak{C} : I \in \mathcal{I}_1\}$ $(\mathcal{I}_1 = \{I \in \mathcal{I} \,|\, |I| = 1\})$ が、任意の $I, J \in \mathcal{I}_1$ に対して $\sigma^J F_I + \sigma^I F_J = 0$ を満たすものとする。すると、スーパー数 $F \in \mathfrak{C}$ で $I \in \mathcal{I}_1$ に対し $F_I = \sigma^I F$ となるものが一意的に存在する。

差し当たりこの補題を認めると、(5.11) の第 2 の式より、元 $F_\kappa(X)(m+1 \le \kappa \le m+n)$ で

$$\sigma^J F_\kappa(X) = \frac{\partial}{\partial X_{\kappa,J}} f(X)$$

なるものが存在する。これより、

$$\frac{d}{dt} f(X + tH)\big|_{t=0} = \sum_{\kappa=1}^{m+n} H_\kappa F_\kappa(X)$$

となる。故に、$m+1 \le \kappa \le m+n$ かつ $|J|$=odd に対し、$H = X_{\kappa,J}$ とおけば良い。 □

補題の証明：スーパー数達 $\{F_{(i)} = \sum_{J \in \mathcal{I}_1} a^i_J \sigma_i\}$ が補題の条件を満たしているならば、$i = j$ として $\sigma_i F_{(i)} = 0$ であり、$\sum_{i \notin J \in \mathcal{I}_1} a^i_J \sigma_i = 0$ となる。故に、各 i に対し、ある数のセット $b^i_J \in \mathbb{C}$ があって、一意的に $F_{(i)} = \sigma_i(\sum_{i \notin J \in \mathcal{I}_1} b^i_J)$ となる。ここで、$\sigma_j F_{(i)} + \sigma_i F_{(j)} = 0$ が任意の i, j に対して成立するならば、$i, j \notin J \in \mathcal{I}_1$ に対して $b^i_J = b^j_J$ となる。そこで、$i \notin J \in \mathcal{I}_1$ に対して $b_J = b^i_J$ とし、$F = \sum_{J \in \mathcal{I}_1} b_J \sigma^J$ は well-defined で $F_{(i)} = \sigma_i F$ となる。 □

============ 付録終 ============

5.2 陰関数定理

命題 5.3 (逆関数定理) U を $\mathfrak{R}^{m|n}$ のスーパー領域、$G(X):U\subset\mathfrak{R}^{m|n}\to\mathfrak{R}^{m|n}$ をスーパー写像とする。スーパー行列 $[d_XG(X)]$ が $X=\tilde{X}_{\mathrm{B}}\in\pi_{\mathrm{B}}(U)$ で可逆とする。このとき、$\tilde{Y}=G(\tilde{X})$ の近傍であるスーパー領域 U' と一意的なスーパー写像 F で $F(G(X))=X$ を満たすものが存在する。更に、

$$d_YF(Y)=(d_XG(X))^{-1}\big|_{X=F(Y)}\quad in\quad U'. \tag{5.14}$$

注意：講義中に「スーパー行列 $[d_XG(X)]$ が逆行列を持つ」という表現に対して質問が出た。

定義 5.6 スーパースムーズ（超滑）関数 f に対し微分 *(=differential)* df を

$$df(X)=d_Xf(X)=\sum_{\kappa=1}^{m+n}dX_\kappa\frac{\partial f(X)}{\partial X_\kappa},$$

或は

$$df(x,\theta)=\sum_{j=1}^{m}dx_j\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial x_j}+\sum_{s=1}^{n}d\theta_s\frac{\partial f(x,\theta)}{\partial\theta_s}$$

と定める。

上の定義より、

命題 5.4 U を $\mathfrak{R}^{m|n}$ 内のスーパー領域とする。任意の $f,g\in\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U:\mathfrak{C})$ に対し、積 fg も $\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U:\mathfrak{C})$ に属し、その微分 $d_Xf(\cdot)$ と $d_Xg(\cdot)$ は $\mathfrak{R}^{m|n}$ から $\mathfrak{C}^{m+n}$ への連続線形写像と見なせる。

更に、$G(X):U\subset\mathfrak{R}^{m|n}\to\mathfrak{R}^{m|n}$ がスーパー写像ならば、

$$G(X)=(g_1(x,\theta),\cdots,g_m(x,\theta),g_{m+1}(x,\theta),\cdots,g_{m+n}(x,\theta))\in\mathfrak{R}^{m|n}$$

と表現され、上に述べた微分 (=differential) dg_j の定義より

$$d_XG(X)=\begin{pmatrix}A & C\\ D & B\end{pmatrix}$$

ここで

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1}\\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial g_1}{\partial x_m} & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m}\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_{m+2}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{m+n}}{\partial x_1}\\ \frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_2} & \frac{\partial g_{m+2}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_{m+n}}{\partial x_2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial g_{m+1}}{\partial x_m} & \frac{\partial g_{m+2}}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial g_{m+n}}{\partial x_m}\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial \theta_1}\\ \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial \theta_2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial g_1}{\partial \theta_n} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_n} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial \theta_n}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_{m+1}}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_{m+2}}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial g_{m+n}}{\partial \theta_1}\\ \frac{\partial g_{m+1}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial g_{m+2}}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial g_{m+n}}{\partial \theta_2}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial g_{m+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial g_{m+2}}{\partial \theta_n} & \cdots & \frac{\partial g_{m+n}}{\partial \theta_n}\end{pmatrix}$$

となる。故に、$d_XG(X)$ は偶スーパー行列を成す。

証明：(1) まず $m=1$、$n=0$ なる場合、即ち、$U_{\mathrm{ev}},U'_{\mathrm{ev}}\subset\mathfrak{R}^{1|0}$ なる時を考える。

$g:U_{\mathrm{ev}}\to U'_{\mathrm{ev}}$ をスーパースムーズで

$$g(x)=g(x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{S}})=g_{\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}})+g_{\mathrm{S}}(x),\quad g_{\mathrm{S}}(x)=g_{\mathrm{S}}(x_{\mathrm{B}})+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_{\mathrm{B}}^{(k)}(x_{\mathrm{B}})}{k!}x_{\mathrm{S}}^k$$

と表示されているとする。ここで、

$$g^{(k)}(x_{\mathrm{B}})=g_{\mathrm{B}}^{(k)}(x_{\mathrm{B}})+g_{\mathrm{S}}^{(k)}(x_{\mathrm{B}}),\quad g_{\mathrm{S}}^{(k)}(x_{\mathrm{B}})=\sum_{|I|=\mathrm{even}\geq 2}g_I^{(k)}(x_{\mathrm{B}})\sigma^I.$$

また

$$g(x_{\mathrm{B}})=y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{S}} \quad \text{with} \quad y_{\mathrm{B}}=g_{\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}}),\ \ y_{\mathrm{S}}=\sum_{|J|=\mathrm{even}\geq 2} g_J(x_{\mathrm{B}})\sigma^J.$$

とおく。ここで $g_{\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}})\in C^\infty(U_{\mathrm{B}}:\mathbb{R})$ かつ $g_J(x_{\mathrm{B}})\in C^\infty(U_{\mathrm{B}}:\mathbb{C})$ とする。

仮定より $g'_{\mathrm{B}}(\tilde{x}_{\mathrm{B}})\neq 0$ とすると、滑らかな関数 f_{B} が存在して

$$f_{\mathrm{B}}(g_{\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}}))=x_{\mathrm{B}} \quad \text{near } x_{\mathrm{B}}=\tilde{x}_{\mathrm{B}}.$$

$$g_{\mathrm{B}}(f_{\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}}))=y_{\mathrm{B}} \quad \text{near } y_{\mathrm{B}}=\tilde{y}_{\mathrm{B}}=g_{\mathrm{B}}(\tilde{x}_{\mathrm{B}}).$$

関数の族 $f_I\in C^\infty(U'_{\mathrm{B}}:\mathbb{C})$ で $f(y_{\mathrm{B}})=f_{\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}})+f_{\mathrm{S}}(y_{\mathrm{B}})$, $f_{\mathrm{S}}(y_{\mathrm{B}})=\sum_{|I|=\mathrm{even}\geq 2} f_I(y_{\mathrm{B}})\sigma^I$ であり

$$\begin{aligned}
&f(g(x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{S}}))=x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{S}} \quad \text{near } x_{\mathrm{B}}=\tilde{x}_{\mathrm{B}}, \quad \text{かつ}\\
&g(f(y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{S}}))=y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{S}} \quad \text{near } y_{\mathrm{B}}=\tilde{y}_{\mathrm{B}}
\end{aligned}$$

なるものを構成することを考える。

得たい結論から推測して

$$\begin{aligned}
x_{\mathrm{B}}+x_{\mathrm{S}}&=f_{\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{S}})+f_{\mathrm{S}}(y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{S}})\\
&=f_{\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}})+\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}f_{\mathrm{B}}^{(k)}(y_{\mathrm{B}}){y_{\mathrm{S}}}^k+\sum_{\ell\geq 0}\frac{1}{\ell!}f_{\mathrm{S}}^{(\ell)}(y_{\mathrm{B}}){y_{\mathrm{S}}}^\ell,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

とならなければならないので、

$$x_{\mathrm{B}}=f_{\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}}), \quad f_{\mathrm{S}}(y_{\mathrm{B}})=x_{\mathrm{S}}-\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}f_{\mathrm{B}}^{(k)}(y_{\mathrm{B}}){y_{\mathrm{S}}}^k-\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}f_{\mathrm{S}}^{(k)}(y_{\mathrm{B}}){y_{\mathrm{S}}}^k \tag{5.16}$$

なるように f_{B} と f_{S} を決めれば良い。

次数に関する帰納法で結果を求める。式 (5.16) の次数 2 の部分は

$$f_{\mathrm{S}}(y_{\mathrm{B}})^{[2]}=x_{\mathrm{S}}^{[2]}-f'_{\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{[2]}. \tag{5.17}$$

別の言い方では、 I を $|I|=2$ なるとき族 $f_I(y_{\mathrm{B}})$ を

$$f_I(y_{\mathrm{B}})=x_I-f'_{\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}})\,g_I(f_{\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}}))\big(=x_I-f'_{\mathrm{B}}(g_{\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}}))\,g_I(x_{\mathrm{B}})\big)$$

と定める。ここで、$\tilde{y}_{\mathrm{B}}$ の近くの y_{B} に対し、x_{B} を定めることができる。

さて、$2i$ より低い次数に関し f_{S} が定義されていると仮定し、

$$f_{\mathrm{S}}(y_{\mathrm{B}})^{[2i+2]}=x_{\mathrm{S}}^{[2i+2]}-\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k!}f_{\mathrm{B}}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})(y_{\mathrm{S}}^k)^{[2i+2]}-\sum_{k\geq 1}\sum_{j=0}^{i}\frac{1}{k!}(f_{\mathrm{S}}^{(k)}(y_{\mathrm{B}}))^{[2j]}(y_{\mathrm{S}}^k)^{[2i+2-2j]} \tag{5.18}$$

とおく。そこで、

$$f(y_{\mathrm{B}})=\sum_{j=0}^{\infty}f(y_{\mathrm{B}})^{[2j]}=f_{\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}})+\sum_{j=1}^{\infty}f_{\mathrm{S}}(y_{\mathrm{B}})^{[2j]}\in C^\infty(U'_{\mathrm{B}}:\mathfrak{C})$$

と定義できる。これの Grassmann 接続を $f(x)$ とし、

$$f(g(x))=x \quad \text{near } x=\tilde{x}_{\mathrm{B}}$$

を示す。事実、$g(x)=g_{\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}})+g_{\mathrm{S}}(x)=y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{S}}$ と式 (5.18) より、

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) &= \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(y_{\mathrm{B}})}{k!} y_{\mathrm{S}}^k \\
&= f_{\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}}) + f_{\mathrm{S}}(y_{\mathrm{B}}) + \sum_{k=1} \frac{f_{\mathrm{B}}^{(k)}(y_{\mathrm{B}}) + f_{\mathrm{S}}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})}{k!} y_{\mathrm{S}}^k \\
&= x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{S}} = x.
\end{aligned}
$$

逆に、y_{B} が $\tilde{y}_{\mathrm{B}}$ に近いとき、$g(f(y_{\mathrm{B}}))=y_{\mathrm{B}}$ となるので、合成関数の高階微分公式より、を省略して、$\tilde{g}\circ\tilde{f}(y)=\widetilde{g\circ f}(y),\quad g(f(y))=y\quad \text{for}\quad y=g_{\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}})+g_{\mathrm{S}}(x).\qquad\square$

(2) 次に、m=n=1、即ち、U,U'$\subset\mathfrak{R}^{1|1}$ の場合：$G(x,\theta)=(g_{ev}(x,\theta),g_{od}(x,\theta)):U\to U'$ をスーパースムーズ写像で

$$
g_{ev}(x,\theta)=g_{ev,0}(x)+g_{ev,1}(x)\theta,\quad g_{od}(x,\theta)=g_{od,1}(x)+g_{od,0}(x)\theta \tag{5.19}
$$

なるものとする。簡単のために、

$$
g_{ev}(x_{\mathrm{B}},\theta)=y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{S}}+\bar{y}\theta\quad\text{where}\quad\begin{cases} y_{\mathrm{B}}=g_{ev,0,\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}}),\quad y_{\mathrm{S}}=\sum_{|I|=\mathrm{even}\geq 2} g_{ev,0,I}(x_{\mathrm{B}})\sigma^I, \\ \bar{y}=\sum_{|\bar{I}|=\mathrm{odd}\geq 1} g_{ev,1,\bar{I}}(x_{\mathrm{B}})\sigma^{\bar{I}}, \end{cases}
$$

とし

$$
g_{od}(x_{\mathrm{B}},\theta)=\omega+\bar{\omega}\theta\quad\text{where}\quad\begin{cases} \omega=\sum_{|\bar{I}|=\mathrm{odd}\geq 1} g_{od,1,\bar{I}}(x_{\mathrm{B}})\sigma^{\bar{I}}, \\ \bar{\omega}=\bar{\omega}_{\mathrm{B}}+\bar{\omega}_{\mathrm{S}} \\ \quad=g_{od,0,\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}})+\sum_{|I|=\mathrm{even}\geq 2} g_{od,0,I}(x_{\mathrm{B}})\sigma^I \end{cases}
$$

とする。$\tilde{Y}=G(\tilde{X})$ とし、$d_X G(X)|_{X=\tilde{X}}$ の可逆性より、

$$
g_{ev,0,\mathrm{B}}(\tilde{x}_{\mathrm{B}})=\tilde{y}_{\mathrm{B}},\quad g'_{ev,0,\mathrm{B}}(\tilde{x}_{\mathrm{B}})\,g_{od,0,\mathrm{B}}(\tilde{x}_{\mathrm{B}})\neq 0. \tag{5.20}
$$

さて、$F(Y)=F(y,\omega)=(f_{ev}(y,\omega),f_{od}(y,\omega)):U'\to U$、但し

$$
f_{ev}(y,\omega)=f_{ev,0}(y)+f_{ev,1}(y)\omega,\quad f_{od}(y,\omega)=f_{od,1}(y)+f_{od,0}(y)\omega
$$

と表示され $F(G(X))=X$ near $X=(x,\theta)=(\tilde{x},\tilde{\theta})=\tilde{X}$ となる関数 F を探す。ここで

$$
\begin{cases} f_{ev,0}(y_{\mathrm{B}})=f_{ev,0,\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}})+\sum_{|I|=\mathrm{even}\geq 2} f_{ev,0,I}(y_{\mathrm{B}})\sigma^I, \\ f_{ev,1}(y_{\mathrm{B}})=\sum_{|\bar{I}|=\mathrm{odd}\geq 1} f_{ev,1,\bar{I}}(y_{\mathrm{B}})\sigma^{\bar{I}}, \\ f_{od,1}(y_{\mathrm{B}})=\sum_{|\bar{I}|=\mathrm{odd}\geq 1} f_{od,1,\bar{I}}(y_{\mathrm{B}})\sigma^{\bar{I}}, \\ f_{od,0}(y_{\mathrm{B}})=f_{od,0,\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}})+\sum_{|I|=\mathrm{even}\geq 2} f_{od,0,I}(y_{\mathrm{B}})\sigma^I. \end{cases}
$$

$F(G(x_{\mathrm{B}},\theta))=(x_{\mathrm{B}},\theta)$ より以下の関係式が成立する：

$$
f_{ev}(g_{ev}(x_{\mathrm{B}},\theta),g_{od}(x_{\mathrm{B}},\theta))=x_{\mathrm{B}},\quad f_{od}(g_{ev}(x_{\mathrm{B}},\theta),g_{od}(x_{\mathrm{B}},\theta))=\theta \tag{5.21}
$$

式 (5.15) の最初のものとスーパースムーズ性より

$$
\begin{aligned}
x_{\mathrm{B}} &= f_{ev,0}(y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{S}}+\bar{y}\theta)+f_{ev,1}(y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{S}}+\bar{y}\theta)(\omega+\bar{\omega}\theta) \\
&= f_{ev,0}(y_{\mathrm{B}})+\sum_{|k|\geq 1}\frac{1}{k!}f_{ev,0}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})(y_{\mathrm{S}}^{k}+ky_{\mathrm{S}}^{k-1}\bar{y}\theta) \\
&\qquad +\sum_{|\ell|\geq 0}\frac{1}{\ell!}f_{ev,1}^{(\ell)}(y_{\mathrm{B}})(y_{\mathrm{S}}^{\ell}+\ell y_{\mathrm{S}}^{\ell-1}\bar{y}\theta)(\omega+\bar{\omega}\theta) \\
&= f_{ev,0}(y_{\mathrm{B}})+\sum_{|k|\geq 1}\frac{1}{k!}f_{ev,0}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{k}+\sum_{|\ell|\geq 0}\frac{1}{\ell!}f_{ev,1}^{(\ell)}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{\ell}\omega \\
&\quad +\left\{\sum_{|k|\geq 1}\frac{1}{(k-1)!}(f_{ev,0}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})+f_{ev,1}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})\omega)y_{\mathrm{S}}^{k-1}\bar{y}+\sum_{|\ell|\geq 0}\frac{1}{\ell!}f_{ev,1}^{(\ell)}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{\ell}\bar{\omega}\right\}\theta.
\end{aligned} \tag{5.22}
$$

故に

$$
x_{\mathrm{B}} = f_{ev,0,\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}})+f_{ev,0,\mathrm{S}}(y_{\mathrm{B}})+\sum_{|k|\geq 1}\frac{1}{k!}f_{ev,0}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{k}+\sum_{|\ell|\geq 0}\frac{1}{\ell!}f_{ev,1}^{(\ell)}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{\ell}\omega \tag{5.23}
$$

また

$$
0=\sum_{|k|\geq 1}\frac{1}{(k-1)!}(f_{ev,0}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})+f_{ev,1}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})\omega)y_{\mathrm{S}}^{k-1}\bar{y}+\sum_{|\ell|\geq 0}\frac{1}{\ell!}f_{ev,1}^{(\ell)}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{\ell}(\bar{\omega}_{\mathrm{B}}+\bar{\omega}_{\mathrm{S}}). \tag{5.24}
$$

式 (5.20) より $g'_{ev,0,\mathrm{B}}(\tilde{x}_{\mathrm{B}})\neq 0$ であり、普通の逆関数定理を用いて、関数 $f_{ev,0,\mathrm{B}}(y_{\mathrm{B}})$ で

$$
f_{ev,0,\mathrm{B}}(g_{ev,0,\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}}))=x_{\mathrm{B}} \tag{5.25}
$$

なるものが $x_{\mathrm{B}}=\tilde{x}_{\mathrm{B}}$ の近傍にある。故に式 (5.23) より

$$
f_{ev,0,\mathrm{S}}(y_{\mathrm{B}})+\sum_{|k|\geq 1}\frac{1}{k!}f_{ev,0}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{k}+\left(f_{ev,1}(y_{\mathrm{B}})+\sum_{|k|\geq 1}\frac{1}{k!}f_{ev,1}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{k}\right)\omega=0. \tag{5.26}
$$

$|I|=1$ なる各 I に対し、式 (5.24) より次数 1 の部分を取り出すと

$$
f_{ev,1,I}(y_{\mathrm{B}})g_{od,0,\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}})+f'_{ev,0,\mathrm{B}}(g_{ev,0,\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}}))g_{ev,1,I}(x_{\mathrm{B}})=0. \tag{5.27}
$$

式 (5.20) より $g'_{ev,0,\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}})g_{od,0,\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}})\neq 0$ だから、$y_{\mathrm{B}}=g_{ev,0,\mathrm{B}}(x_{\mathrm{B}})$ のとき関数 $f_{ev,1,I}(y_{\mathrm{B}})$ で上式を満たすものがある。式 (5.25) と (5.26) は式 (5.23) の次数 0 と 1 の部分に対応する。

これらを用いて、式 (5.23) の次数 2 部分と式 (5.24) の次数 3 部分を求める。次々にこれを繰り返して、$f_{ev,0}$ と $f_{ev,1}$ を構成できる。

(5.21) の第 2 式より、

$$
\begin{aligned}
\theta &= f_{od,1}(y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{S}}+\bar{y}\theta)+f_{od,0}(y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{S}}+\bar{y}\theta)(\omega+\bar{\omega}\theta) \\
&= \sum_{|\ell|\geq 0}\frac{1}{\ell!}f_{od,1}^{(\ell)}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{\ell}+\sum_{|\ell|\geq 0}\frac{1}{\ell!}f_{od,0}^{(\ell)}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{\ell}\omega \\
&\quad +\left\{\sum_{|k|\geq 1}\frac{1}{(k-1)!}(f_{od,1}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})+f_{od,0}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})\omega)y_{\mathrm{S}}^{k-1}\bar{y}+\sum_{|k|\geq 1}\frac{1}{k!}f_{od,0}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{k}\bar{\omega}\right\}\theta.
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

即ち、

$$
0=f_{od,1,\mathrm{S}}(y_{\mathrm{B}})+\sum_{|k|\geq 1}\frac{1}{k!}f_{od,1}^{(k)}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{k}+\sum_{|\ell|\geq 0}\frac{1}{\ell!}f_{od,0}^{(\ell)}(y_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{S}}^{\ell}\omega \tag{5.29}
$$

かつ

$$1=\sum_{|k|\geq 1}\frac{1}{(k-1)!}(f^{(k)}_{od,1}(y_{\rm B})+f^{(k)}_{od,0}(y_{\rm B})\omega)y_{\rm S}^{k-1}\bar{y}+\sum_{|k|\geq 1}\frac{1}{k!}f^{(k)}_{od,0}(y_{\rm B})y_{\rm S}^{k}\bar{\omega}. \tag{5.30}$$

先程の議論を繰り返して、$f_{od,1}(y_{\rm B})$ と $f_{od,0}(y_{\rm B})$ を構成すると、これらが望みの性質を持つ。 □

演習問題 5.1 一般の m,n に対して証明を与えよ。

命題 5.5 (陰関数定理) $\Phi(X,Y):U\times U'\to\mathfrak{C}^{m'|n'}$ をスーパースムーズ写像とし、$(\tilde{X},\tilde{Y})\in U\times U'$ とする。ここで、U と U' はそれぞれ $\mathfrak{R}^{m|n}$ と $\mathfrak{R}^{m'|n'}$ のスーパー領域とする。$\Phi(\tilde{X},\tilde{Y})=0$ とし $\partial_Y\Phi=[\partial_{y_j}\Phi,_{\omega_r}\Phi]$ は $(\tilde{X}_{\rm B},\tilde{Y}_{\rm B})\in\pi_{\rm B}(U)\times\pi_{\rm B}(U')$ での連続かつ可逆なスーパー行列となっていると仮定する。このとき、スーパー領域 $V\subset U$ で $\tilde{X}_{\rm B}\in\pi_{\rm B}(V)$ を満たすものと V 上で一意的なスーパースムーズ写像 $Y=f(X)$ があって $\tilde{Y}=f(\tilde{X})$ かつ $\Phi(X,f(X))=0$ （$X\in V$）となる。更に、

$$\partial_X f(X)=-\left[\partial_Y\Phi(X,Y)\right]^{-1}\left[\partial_X\Phi(X,Y)\right]\big|_{Y=f(X)}. \tag{5.31}$$

証明：式 (5.31) は

$$0=\partial_X\Phi(X,f(X))=\left(\partial_X\Phi(X,Y)+\partial_Y\Phi(X,Y)\partial_X f(X)\right)|_{Y=f(X)}$$

より簡単に求まる。存在は命題 5.3 の証明を繰り返すことにより得られる。 □

5.3 スーパー空間上の関数の積分

5.3.1 偶変数での積分

Rogers 等に従い、与えられた偶スーパー領域 $U_{ev}\subset\mathfrak{R}^{m|0}$ 上のスーパースムーズ関数 $u(x)$ の積分を、複素数体上の正則関数の積分を真似て行う。

定義 5.7 偶スーパー領域 $U_{ev}\subset\mathfrak{R}^{1|0}$ 上のスーパースムーズ関数 $u(x)$ をとる。$\lambda=\lambda_{\rm B}+\lambda_{\rm S}$, $\mu=\mu_{\rm B}+\mu_{\rm S}\in U_{ev}$ とし、$c:[\lambda_{\rm B},\mu_{\rm B}]\to U_{ev}$ を区分的に C^1 な連続曲線で $c(\lambda_{\rm B})=\lambda$, $c(\mu_{\rm B})=\mu$ なるものとする。このとき、

$$\int_c dx\,u(x)=\int_{\lambda_{\rm B}}^{\mu_{\rm B}}dt\,u(c(t))\dot{c}(t)\in\mathfrak{C} \tag{5.32}$$

と定義し、これを曲線 c に沿う u の積分という。

Grassmann 接続した関数の積分について以下が基本的である。

命題 5.6 $u(t)\in C^\infty([\lambda_{\rm B},\mu_{\rm B}]:\mathfrak{C})$ とし $\tilde{u}(x)$ をそれの *Grassmann* 接続とする。$u(t)$ の原始関数 $U(t)\in C^\infty([\lambda_{\rm B},\mu_{\rm B}]:\mathfrak{C})$ があって、$[\lambda_{\rm B},\mu_{\rm B}]$ 上で $U'(t)=u(t)$ とする。そのとき、任意の連続で区分的な C^1-曲線 $c:[\lambda_{\rm B},\mu_{\rm B}]\to U_{ev}\subset\mathfrak{R}^{1|0}$ で $c(\lambda_{\rm B})=\lambda$, $c(\mu_{\rm B})=\mu$ なるものに対し、

$$\int_c dx\,\tilde{u}(x)=\tilde{U}(\lambda)-\tilde{U}(\mu).$$

注意：ここでは u, U とその Grassmann 接続 $\tilde{u}$, $\tilde{U}$ を区別する記号を用いる。

証明：定義より、

$$\begin{aligned}
\int_c dx\,\tilde{u}(x) &= \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt\, u(c(t))\dot{c}(t) = \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt \left(\sum_{\ell\ge 0}\frac{1}{\ell!}u^{(\ell)}(c_{\mathrm{B}}(t))c_{\mathrm{S}}(t)^\ell\right)(\dot{c}_{\mathrm{B}}(t)+\dot{c}_{\mathrm{S}}(t)) \\
&= \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt\, u(c_{\mathrm{B}}(t))\dot{c}_{\mathrm{B}}(t) + \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt \sum_{k\ge 1}\frac{1}{k!}u^{(k)}(c_{\mathrm{B}}(t))\dot{c}_{\mathrm{B}}(t)c_{\mathrm{S}}(t)^k \\
&\qquad + \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt \sum_{\ell\ge 0}\frac{1}{\ell!}u^{(\ell)}(c_{\mathrm{B}}(t))c_{\mathrm{S}}(t)^\ell\dot{c}_{\mathrm{S}}(t) \\
&= U(\mu_{\mathrm{B}}) - U(\lambda_{\mathrm{B}}) + \sum_{\ell\ge 0}\frac{1}{(\ell+1)!}\left\{U^{(\ell+1)}(\mu_{\mathrm{B}})(\mu_{\mathrm{S}})^{\ell+1} - U^{(\ell+1)}(\lambda_{\mathrm{B}})(\lambda_{\mathrm{S}})^{\ell+1}\right\} \\
&= \tilde{U}(\mu) - \tilde{U}(\lambda).
\end{aligned}$$

ここで２行から３行へのところで、被積分関数は $t\in[\lambda_{\mathrm{B}},\mu_{\mathrm{B}}]\subset\mathbb{R}$ から $\mathfrak{C}$ への関数なので部分積分できて

$$\begin{aligned}
\int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt \sum_{k\ge 1}\frac{1}{k!}u^{(k)}(c_{\mathrm{B}}(t))\dot{c}_{\mathrm{B}}(t)c_{\mathrm{S}}(t)^k &= \sum_{k\ge 1}\frac{1}{k!}u^{(k-1)}(c_{\mathrm{B}}(t))c_{\mathrm{S}}(t)^k\Big|_{t=\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} \\
&\qquad - \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt \sum_{k\ge 1}\frac{1}{k!}u^{(k-1)}(c_{\mathrm{B}}(t))\frac{d}{dt}c_{\mathrm{S}}(t)^k
\end{aligned}$$

なることを用いた。 □

系 5.2 $u(x)$ を偶スーパー領域 $U_{ev}\subset\mathfrak{R}^{1|0}$ から へのスーパースムーズ関数とする。c_1, c_2 を $[\lambda_{\mathrm{B}},\mu_{\mathrm{B}}]\to U_{ev}$ の連続で区分的 C^1-曲線とし、$\lambda = c_1(\lambda_{\mathrm{B}}) = c_2(\lambda_{\mathrm{B}})$ かつ $\mu = c_1(\mu_{\mathrm{B}}) = c_2(\mu_{\mathrm{B}})$ なるものとする。もし c_1 が c_2 にホモトピック（連続変形可能）とすると

$$\int_{c_1} dx\, u(x) = \int_{c_2} dx\, u(x) \tag{5.33}$$

となる。故に、もし $[\lambda_{\mathrm{B}},\mu_{\mathrm{B}}]\subset\pi_{\mathrm{B}}(U_{ev})$ ならば

$$\int_\lambda^\mu dx\, u(x) = \int_{\lambda_{\mathrm{B}}}^{\mu_{\mathrm{B}}} dt\, u(t). \tag{5.34}$$

上式 (5.34) より、次のように定義する。

定義 5.8 *(1)* I_{ev} を $\mathfrak{R}^{m|0}$ 内の偶スーパー領域で $\pi_{\mathrm{B}}(I_{ev}) = \prod_{j=1}^m (a_j,b_j)\subset\mathbb{R}^m$ なるものとする。ここで $-\infty < a_j < b_j < \infty$ とし、このような I_{ev} を偶スーパー立方体という。$u\in\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(I_{ev}:\mathfrak{C})$ に対し

$$\int_{I_{ev}} dx\, u(x) = \int_{a_1}^{b_1} dq_1 \cdots \int_{a_m}^{b_m} dq_m\, u(q_1,\cdots,q_m) = \int_{\pi_{\mathrm{B}}(I_{ev})} dx_{\mathrm{B}}\, u(x_{\mathrm{B}}). \tag{5.35}$$

(2) $U_{\mathrm{ev}}\subset\mathfrak{R}^{m|0}$ を $\pi_{\mathrm{B}}(U_{\mathrm{ev}})$ が面積確定なる任意の偶スーパー領域とする。このとき、$u\in\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U_{\mathrm{ev}}:\mathfrak{C})$ に対して

$$\int_{U_{\mathrm{ev}}} dx\, u(x) = \int_{\pi_{\mathrm{B}}(U_{\mathrm{ev}})} dx_{\mathrm{B}}\, u(x_{\mathrm{B}}) \tag{5.36}$$

とおく。

注意 5.3 *(1)* 公式 (5.36) は多重 *Riemann* 積分の定義と同様に求められる。
(2) 何故 *Riemannian* を用いると良いのかは前に引用した *Rogers* に説明されている。ここでの説明は彼女の議論を偶スーパー領域の場合に限って幾分簡単化して与えている。

============ メモ ============

幸い 5 名程の諸君が聴講してくれている。