

1 非可換解析学の必然性とは、そしてそのご利益は？

2 Dirac 方程式と Weyl 方程式

3 スーパー数とスーパー空間

4 スーパー空間上の線形代数

5 スーパー空間上の基礎解析

5.1 スーパー空間上の関数の微分

5.1.1 Grassmann 接続の導入

5.1.2 スーパースムーズ関数の導入と偏微分

前回の講義で、ほぼ天下り式にスーパー領域  $U \subset \mathfrak{R}^{m|n}$  上で  $\mathcal{C}_{SS}(U : \mathbb{C})$  という関数のクラスを考えた。しかし何かを計算の途中でそのクラスからはみ出る関数が表れるとかいう不都合はおこらないのか？

5.1.3 スーパースムーズ関数の特徴付

$\mathbb{C}$  には乗法が定義されているが  $\mathbb{R}^2$  には無い。そのような環構造の有無で関数の全微分可能性の定義はどう異なるか、それがもたらす関数の性質の違いのを見てみよう：

$\mathbb{C}$  から  $\mathbb{C}$  への関数  $f(z)$  を

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \longrightarrow f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad u(x, y) = \Re f(z) \in \mathbb{R}, \quad v(x, y) = \Im f(z) \in \mathbb{R}$$

と分解する。 $z = x + iy$  に対し  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  であったから、 $z_0 = x_0 + iy_0$  として

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |u(x, y) + iv(x, y) - (u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0))| \\ &= \sqrt{(u(x, y) - u(x_0, y_0))^2 + (v(x, y) - v(x_0, y_0))^2} \end{aligned}$$

だから、関数  $f(z)$  が  $z = z_0$  で連続ならば、 $u(x, y), v(x, y)$  は  $(x_0, y_0)$  で実数値実 2 変数関数として連続である。

関数  $f(z)$  が  $z = z_0$  で全微分可能であるとは、ある数  $\gamma \in \mathbb{C} \cong L(\mathbb{C} : \mathbb{C})$  があって、

$$|f(z_0 + w) - f(z_0) - \gamma w| = o(|w|) \quad (|w| \rightarrow 0) \quad (5.1)$$

なることである。この  $\gamma = \alpha + i\beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) を  $f'(z_0)$  と表記する。もう少し詳しく見てみよう。 $w = h + ik$  ( $h, k \in \mathbb{R}$ ) とおくと  $\gamma w = (\alpha + i\beta)(h + ik) = (h\alpha - k\beta) + i(k\alpha + h\beta)$  なることに注意すると、

$$\begin{aligned} |f(z_0 + w) - f(z_0) - \gamma w| &= |u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) - (h\alpha - k\beta) \\ &\quad + i(v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) - (k\alpha + h\beta))| \\ &= ([u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) - (h\alpha - k\beta)]^2 \\ &\quad + [v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) - (k\alpha + h\beta)]^2)^{1/2} \end{aligned}$$

となる。だから、 $(h, k) \rightarrow 0$  (i.e.  $\sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$ ) のとき、

$$\begin{aligned} |u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) - (h\alpha - k\beta)| &= o(\sqrt{h^2 + k^2}), \\ |v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) - (k\alpha + h\beta)| &= o(\sqrt{h^2 + k^2}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

上の第1式より、 $h = 0$  として  $\beta = -u_y(x_0, y_0)$ 、 $k = 0$  として  $\alpha = u_x(x_0, y_0)$  が導かれる。第2式より、 $\alpha = v_y(x_0, y_0)$ 、 $\beta = v_x(x_0, y_0)$  が求まる。これより、偏微分方程式系

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \quad (5.3)$$

が従う。この偏微分方程式系を Cauchy-Riemann 方程式といい、これを満たす関数を解析関数<sup>1</sup>という。また、

$$\frac{d}{dz} f(z) = f'(z) = \alpha + i\beta = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

と書いて混乱を引き起こさない。

上で用いた記号で、 $\mathbb{R}^2$  から  $\mathbb{R}^2$  への写像  $\Phi$

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

を考える。これが  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  で全微分可能とは  $\Phi'_F(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) \in L(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^2)$  があって

$$\|\Phi(\begin{pmatrix} x_0 + h \\ y_0 + k \end{pmatrix}) - \Phi(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) - \Phi'_F(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\| = o(\|\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}\|)$$

なることである。 $\Phi'_F(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$  を  $\Phi'_F(x, y)$  と書き表し、

$$\Phi'_F(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

とすると

$$\begin{aligned} &[(u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) - (hu_x(x_0, y_0) + kv_y(x_0, y_0)))^2 \\ &\quad + (v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) - (hv_x(x_0, y_0) + kv_y(x_0, y_0)))^2]^{1/2} = o(\sqrt{h^2 + k^2}) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Cauchy-Riemann 方程式を満たす  $u, v$  が 2 変数実数値関数として  $C^\infty$  であり、 $u + iv$  が  $z$  の関数として収束冪級数になることには別の検証が必要

となる。即ち、

$$\begin{aligned} |u(x_0 + h, y_0 + k) - u(x_0, y_0) - (hu_x(x_0, y_0) + kv_y(x_0, y_0))| &= o(\sqrt{h^2 + k^2}), \\ |v(x_0 + h, y_0 + k) - v(x_0, y_0) - (hv_x(x_0, y_0) + kv_y(x_0, y_0))| &= o(\sqrt{h^2 + k^2}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

複素数の積という考えている空間の代数的構造がもたらす影響が (5.2) と (5.5) に表れている。即ち、 $\mathbb{C}$  での乗法は同一視  $a + ib \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  によるのだが、 $\Phi'_F(x, y) \in L(\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^2)$  が  $\mathbb{C}$  での乗法の元と同一視されるための条件が C-R 関係式なのである。少し一般化して、 $\mathbb{C}^m$  から  $\mathbb{C}^m$  への写像  $\Phi$

$$\Phi : \mathbb{C}^m \ni z = {}^t(z_1, \dots, z_m) \rightarrow {}^t(\phi_1(z), \dots, \phi_m(z)) \in \mathbb{C}^m$$

を考える。これが  $z$  で全微分可能とは  $\Phi'_F(z) \in L(\mathbb{C}^m : \mathbb{C}^m)$  があって

$$\|\Phi(z + w) - \Phi(z) - \Phi'_F(z)w\| = o(\|w\|)$$

となることである。前と同じ計算で  $\Phi'_F(z)$  は

$$\Phi'_F(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(z)}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1(z)}{\partial z_m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_m(z)}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \phi_m(z)}{\partial z_m} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

となる、各  $j$  で  $\phi_j(z)$  は  $\mathbb{C}^m$  から  $\mathbb{C}$  への正則関数 (収束冪級数で展開できる関数) となることが分かる。更に、以下に述べる系 5.3 と同様の証明で  $\phi_{kj}(z), \rho_{kj}(z : w) \in \mathbb{C}$  があって

$$\begin{aligned} \phi_j(z + w) - \phi_j(z) &= \sum_{k=1}^m w_k \phi_{jk}(z) + \sum_{k=1}^m w_k \rho_{jk}(z : w) \\ \text{with } \phi_{kj}(z) &= \frac{\partial \phi_j(z)}{\partial z_k}, \quad \rho_{jk}(z : w) = o(1) \quad \text{when } |w| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

問題 : スーパースムーズ関数には対応する Cauchy-Riemann 方程式があるのか ?

**Bosonic case** :  $\mathfrak{R}^{m|0}$  (or  $\mathfrak{C}^{m|0}$ ) の偶スーパー領域  $U_{\text{ev}}$  (or  $V_{\text{ev}}$ ) 上の  $\mathfrak{C}$ -値関数の微分可能性を考える。

**定義 5.1** (スーパー偏微分、スーパー全微分)  $f : \mathfrak{R}^{m|0} \supset U_{\text{ev}} \rightarrow \mathfrak{C}$  (or  $f : \mathfrak{C}^{m|0} \supset V_{\text{ev}} \rightarrow \mathfrak{C}$ ) とする。

(i)  $f$  が  $x$  で  $h$  方向に 1 階スーパー偏微分可能 (=super  $G$ -differentiable) とは、 $f'_G(x; \cdot) : \mathfrak{R}^{m|0} \rightarrow \mathfrak{C}$  (or  $f'_G(x; \cdot) : \mathfrak{C}^{m|0} \rightarrow \mathfrak{C}$ ) があって  $t \rightarrow 0$  のとき

$$\frac{f(x + th) - f(x)}{t} - f'_G(x; h) \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathfrak{C}, \quad \text{or } \left. \frac{d}{dt} f(x + th) \right|_{t=0} = f'_G(x; h).$$

更に、 $h$  を固定して  $x$  の近くの  $y$  に対し  $f'_G(y; h)$  が存在し

$$f'_G(y; h) - f'_G(x; h) \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathfrak{C} \quad \text{if } y \rightarrow x \text{ in } U_{\text{ev}}$$

となるとき、 $f \in C_G^1(U_{ev} : \mathfrak{C})$  と書き、1階スーパー連続偏微分可能という。

同様に、 $f$  が  $x$  で  $h = (h^{(1)}, \dots, h^{(N)}) \in (\mathfrak{R}^{m|0})^N$  方向に  $N$ 階スーパー偏微分可能、とは、

$$\frac{\partial^N}{\partial t_1 \cdots \partial t_N} f\left(x + \sum_{j=1}^N t_j h^{(j)}\right) \Big|_{t_1 = \cdots = t_N = 0} = f_G^{(N)}(x; h^{(1)}, \dots, h^{(N)})$$

が存在することを言う。更に上と同様に  $C_G^N(U_{ev} : \mathfrak{C})$  なる概念も定義する。

(ii)  $f$  が  $x$  で 1階スーパー全微分可能 (=super F-differentiable) とは  $f'_F(x) \in \mathfrak{C}^m$  (or  $f'_F(\cdot) \in \mathfrak{C}^m$ )<sup>2</sup> と関数  $\epsilon(x, h) \in \mathfrak{C}^m$  があって

$$(i) f(x+h) - f(x) = \langle h | f'_F(x) \rangle + \langle h | \epsilon(x, h) \rangle \quad \text{for } h \in \mathfrak{R}^{m|0} \text{ (or } \mathfrak{C}^{m|0}),$$

$$(ii) \epsilon(x, h) \rightarrow 0 \text{ in } \mathfrak{C}^m \text{ when } h \rightarrow 0 \text{ in } \mathfrak{R}^{m|0} \text{ (or } \mathfrak{C}^{m|0}).$$

同様に、 $f$  が  $x$  で 2階スーパー全微分可能 とは、 $f'_F$  が  $x \in \mathfrak{R}^{m|0}$  から  $\mathfrak{C}^m$  への写像として  $x$  でスーパー全微分可能なることである。更に、 $f$  が  $x$  で  $N$ 階スーパー全微分可能を定義するとともに、 $\infty$ 階スーパー全微分可能のことを単に スーパー微分可能 という。

注意：(i)  $f$  が  $x$  で1階スーパー全微分可能ならば

$$f'_G(x; h) = f'_F(x)h = \sum_{j=1}^m h_j f_j(x) = \langle h | (f_j(x)) \rangle$$

$$\text{with } f_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f'_G(x; e_j), \quad e_j = (\overbrace{0, \dots, 0}^j, 1, \overbrace{0, \dots, 0}^{m-j}).$$

(ii) もし  $f : \mathfrak{C}^{m|0} \rightarrow \mathfrak{C}$  がスーパー全微分可能ならば、 $f_B(z)$  は  $z \in \mathbb{C}^m$  に関し「普通の意味で」解析的である。

(iii) 講義ではスーパー解析的という概念を導入したが、スーパー全微分だけで事は足りそうである。

(i) Bosonic “analytic” case :

補題 5.1 ((1.1.17) of deWitt, Theorem 1 of 松本-嘉数 for  $m = 1$ )<sup>3</sup>  $f$  を開集合  $V \subset \mathbb{C}$  から  $\mathbb{C}$  への解析関数とする。このとき、 $f$  を以下の  $\tilde{f}$  に一意的にスーパー全微分可能に拡張できる。

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_B) z_S^n \quad \text{for } z = z_B + z_S \quad \text{with } z_B \in V. \quad (5.7)$$

<sup>2</sup>講義中に  $f'_F(x) \in \mathcal{L}(\mathfrak{R}^{m|0} : \mathfrak{C}^m)$  等と書いたのが質問が出たが、その時の答えには間違いがあったのでここに訂正する

<sup>3</sup>deWitt: Supermanifolds, London, Cambridge Univ. Press, 1984.

Matsumoto and Kakazu: A note on topology of supermanifolds, J. Math. Phys. 27(1986), pp. 2690-2692.

証明：前回講義の命題 5.1 より、滑らかな関数に対して Grassmann 接続の存在は示されている。前回講義の補題 5.3 より、 $\tilde{f}$  が  $U = \pi_B^{-1}(V)$  上でスーパー全微分可能なることも示されている。更に、松本-嘉数の定理 1 の証明を少し変えて、

主張 5.1  $U$  上のスーパー全微分可能関数  $g$  は、もし  $z_B \in V$  上で  $g(z_B) = 0$  ならば  $z \in U$  上で  $g(z) = 0$  である。

実際、 $g$  は  $\mathfrak{C}$ -値関数だから、

$$g(z) = \sum_{I \in \mathcal{I}} g_I(z) \sigma^I \quad \text{with} \quad g_I : U \ni z \rightarrow \mathbb{C}$$

と展開できる。「有限次元的」に考察するために、 $\mathfrak{C}_L^{(m)}$  と  $\mathfrak{C}^{(m)}$  を導入する。

集合  $\Lambda_L^{\mathbb{C}}$  を

$$\begin{aligned} \Lambda_L^{\mathbb{C}} &= \left\{ X = \sum_{I \in \mathcal{I}_L} X_I \sigma^I \mid X_I \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{但し} \quad \mathcal{I}_L = \{ I = (i_1, i_2, \dots, i_L, 0, \dots) \} \subset \mathcal{I} \\ &\cong \Lambda(\mathbb{R}^L : \mathbb{C}) (= \mathbb{R}^L \text{ 上の } \mathbb{C} \text{ 係数微分形式全体のなす外積代数}) \cong \mathbb{C}^{2^L}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

と定義するとき、それらの射影極限集合  $\Lambda^{\mathbb{C}}$  を定める。実際、 $M > L$  に対して写像  $\psi_{LM} : \Lambda_M^{\mathbb{C}} \rightarrow \Lambda_L^{\mathbb{C}}$  を  $\psi_{LM}(\sum_{I \in \mathcal{I}_M} X_I \sigma^I) = \sum_{I \in \mathcal{I}_L} X_I \sigma^I$  とすれば、集合  $(\Lambda_L^{\mathbb{C}}, \psi_{LM})$  は射影系を成し、それで射影極限  $\Lambda^{\mathbb{C}}$  が定まる。このとき、 $\Lambda^{\mathbb{C}}$  の位相は次のようになる： $\Lambda^{\mathbb{C}}$  の元  $X^{(n)}$  が  $X$  に収束するとは、任意の  $\epsilon > 0$  及び  $I$  に対して整数  $n_0 = n_0(\epsilon, I)$  があって、 $n > n_0$  となるとき  $|X_I^{(n)} - X_I| < \epsilon$  となる。

任意の  $L$  に対し  $m \leq L$  なる  $m$  をとり

$$\mathfrak{C}_L^{(m)} = \left\{ X = \sum_{I \in \mathcal{I}_L, |I| \leq m} X_I \sigma^I \mid X_I \in \mathbb{C} \right\}$$

と定義する。このとき、

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}^{(m)} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \mathfrak{C}_L^{(m)}, \quad \mathfrak{C}_L^{(m)} = \left\{ X = \sum_{I \in \mathcal{I}_{m,L}} X_I \sigma^I \right\}, \\ \text{with } \mathcal{I} &= \cup_{m=0}^{\infty} \mathcal{I}_m, \quad \mathcal{I}_m = \{ I = (i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I} \mid |I| \leq m \}, \\ \mathcal{I}_{m,L} &= \{ I = (i_1, i_2, \dots, i_L, 0, \dots) \mid |I| \leq m \} \rightarrow \mathcal{I}_m \quad (L \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (5.9)$$

同様に、

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_L^{(m)} &= \left\{ X = \sum_{I \in \mathcal{I}_L, |I| \leq m} X_I \sigma^I \mid X_0 \in \mathbb{R}, X_I \in \mathbb{C} (|I| \geq 1) \right\} \rightarrow \mathfrak{R}^{(m)} \quad (L \rightarrow \infty), \\ \mathfrak{R}_L^{[m]} &= \left\{ X = \sum_{I \in \mathcal{I}_{m,L}, |I|=m} X_I \sigma^I \mid X_I \in \mathbb{C} \right\} \rightarrow \mathfrak{R}^{[m]} \quad (L \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (5.10)$$

任意の固定された  $I \in \mathcal{I}$  に対し、 $L$  と  $m$  を  $I \in \mathcal{I}_{m,L}$  なるようにとり、 $g_I(z)$  の定義域を  $U \cap \mathfrak{C}_L^{(m)}$  に制限する。こうすると、 $g_I(z)$  は変数  $\{z_J\}_{J \in \mathcal{I}_{m,L}}$  の解析関数である。すると、仮定  $z_B \in V$  上で  $g(z_B) = 0$  より、すべての  $J \in \mathcal{I}_{m,L}$  に対し  $\frac{\partial}{\partial z_J} g_I(z) = 0$  となる。故に、

$$g_I(z) = 0 \quad \text{for } \forall z \in U \cap \mathfrak{C}^{(m)},$$

であり、

$$g(z) = 0 \quad \text{for } \forall z \in U \cap (\cup_{m=1}^{\infty} \mathfrak{C}^{(m)}) = U \cap \mathfrak{C}.$$

即ち、 $\forall z \in U$  に対し  $g(z) = 0$ .  $\square$

**補題 5.2** ((1.1.18) of deWitt, Theorem 2 of 松本-嘉数 for  $m = 1$ )  $U \subset \mathfrak{C}_{\text{ev}}$  を連結開集合とする。  $f$  を  $U$  から  $\mathfrak{C}$  へのスーパー全微分可能関数とすると、

$$f(z) = \sum_{I \in \mathcal{I}} f_I(z) \sigma^I, \quad f_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_I^{(n)}(z_B) z_S^n.$$

証明 : 各  $I$  に対し  $f_I(z_B)$  は  $V = \pi_B(U) \subset \mathbb{C}$  から  $\mathbb{C}$  への解析関数となるので、スーパー全微分可能関数な拡張をもち  $f_I(z)$  と一致する。  $\square$

**系 5.1** (Theorem 3 of 松本-嘉数 for  $m = 1$ )  $f$  を連結開集合  $U \subset \mathfrak{C}_{\text{ev}}$  から  $\mathfrak{C}$  へのスーパー全微分可能関数とすると、 $f$  は  $\tilde{U}$  上のスーパー全微分可能関数として一意的に拡張される。ここで

$$U_B = \{z \in \mathbb{C} \mid z = w_B \text{ for some } w \in U\}, \quad \tilde{U} = \{w \in \mathfrak{C}_{\text{ev}} \mid w_B \in U_B\}.$$

証明: 上記 2 つの補題より従う。  $\square$

**補題 5.3**  $f$  を  $\mathbb{R}^m$  上実解析的とすると、その Grassmann 接続  $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x_B + x_S) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \partial_q^\alpha f(x_B) x_S^\alpha \quad \text{with } \partial_q^\alpha f = \partial_{q_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{q_m}^{\alpha_m} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

は  $x$  でスーパー Fréchet-微分可能, i.e.  $F_j(x) \in \mathfrak{C}$  と  $\epsilon_j(x, y) \in \mathfrak{C}$  があって

$$\tilde{f}(x+y) = \tilde{f}(x) + \sum_{j=1}^m y_j F_j(x) + \sum_{j=1}^m \epsilon_j(x, y) y_j, \quad \text{with } \epsilon_j(x, y) \rightarrow 0 \text{ in } \mathfrak{C} \text{ when } y \rightarrow 0 \text{ in } \mathfrak{C}.$$

(ii) Bosonic “smooth” case :

**命題 5.1**  $U_{\text{ev}} \subset \mathfrak{R}^{m|0}$  を偶スーパー領域とする。  $f$  を  $\mathbb{R}^m \supset U_{\text{ev},B} = \pi_B(U_{\text{ev}})$  から  $\mathfrak{C}$  への滑らかな関数 (これを単に、 $f \in C^\infty(U_{\text{ev},B} : \mathfrak{C})$  と記す) 。 即ち、

$$f(q) = \sum_{J \in \mathcal{I}} f_J(q) \sigma^J \quad \text{with } f_J(q) \in C^\infty(U_{\text{ev},B} : \mathbb{C}) \text{ for each } J \in \mathcal{I}. \quad (5.11)$$

このとき  $\tilde{f}$  は  $U_{\text{ev}}$  から  $\mathfrak{C}$  への  $f$  の Grassmann 接続

$$\tilde{f}(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \partial_q^\alpha f(x_B) x_S^\alpha \quad \text{where} \quad \partial_q^\alpha f(x_B) = \sum_J \partial_q^\alpha f_J(x_B) \sigma^J \quad (5.12)$$

が定義される。ここで、 $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $x = x_B + x_S$ ,  $x_B = (x_{1,B}, \dots, x_{m,B}) = (q_1, \dots, q_m) = q \in U_{\text{ev},B}$ ,  $x_S = (x_{1,S}, \dots, x_{m,S})$  かつ  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$ .

系 5.2  $f$  と  $\tilde{f}$  を上のように定めると

(i)  $\tilde{f}$  は連続、

(ii)  $U_{\text{ev}}$  で  $\tilde{f}(x) = 0$  ならば、 $U_{\text{ev},B}$  で  $f(x_B) = 0$  となる。

更に  $\tilde{f}$  の偏微分を

$$\partial_{x_j} \tilde{f}(x) = \left. \frac{d}{dt} \tilde{f}(x + te_{(j)}) \right|_{t=0} \quad \text{where} \quad e_{(j)} = (\overbrace{0, \dots, 0}^j, 1, 0, \dots, 0) \in \mathfrak{R}^{m|0}, \quad (5.13)$$

と定めることができ、

$$\partial_{x_j} \tilde{f}(x) = \widetilde{\partial_{q_j} f(x)} \quad \text{for} \quad j = 1, \dots, m \quad (5.14)$$

となる。

注意 5.1 同様の議論で  $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathfrak{R}^{m|0}$  に対し

$$\left. \frac{d}{dt} \tilde{f}(x + ty) \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^m y_j \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_q^\alpha \partial_{q_j} f(x_B) x_S^\alpha = \sum_{j=1}^m y_j \partial_{x_j} \tilde{f}(x). \quad (5.15)$$

式 (5.15) より、 $f$  の Grassmann 接続  $\tilde{f}$  は、 $x$  で  $y$  方向にスーパー Gâteaux 微分可能である。即ち、元  $F_j(x) \in \mathfrak{C}$  があって各  $y$  に対し

$$\tilde{f}(x + ty) - \tilde{f}(x) - t \sum_{j=1}^m y_j F_j(x) \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathfrak{C} \quad \text{when} \quad t \rightarrow 0. \quad (5.16)$$

より一般的に

補題 5.4  $f(q) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  に対し  $\tilde{f}$  は Taylor 展開される: 即ち、任意の  $N$  に対し  $\tilde{\tau}_N(x, y) \in \mathfrak{C}$  があって

$$\tilde{f}(x + y) = \sum_{|\alpha|=0}^N \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha \tilde{f}(x) y^\alpha + \tilde{\tau}_N(x, y), \quad (5.17)$$

となる。ここで

$$\tilde{\tau}_N(x, y) = \sum_{|\alpha|=N+1} y^\alpha \int_0^1 dt \frac{1}{N!} (1-t)^N \partial_x^\alpha \tilde{f}(x + ty).$$

系 5.3  $f(q) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$  に対し  $\tilde{f}$  はスーパー全微分可能である。

証明：  $m = 1$  の場合のみ述べる。補題より

$$\tilde{f}(x+y) - \tilde{f}(x) = y\tilde{f}'(x) + y\tau(x,y), \quad \tau(x,y) = y \int_0^1 dt(1-t)\tilde{f}''(x+ty)$$

であり、 $\mathfrak{R}_{\text{ev}}$  で  $y \rightarrow 0$  のとき、 $\mathfrak{C}$  の中で  $\tau(x,y) \rightarrow 0$  なるからである。  $\square$

演習問題 5.1 上の系で『 $\mathfrak{R}_{\text{ev}}$  で  $y \rightarrow 0$  のとき、 $\mathfrak{C}$  の中で  $\tau(x,y) \rightarrow 0$  なる』を詳しく説明せよ。

Grassmann 接続した関数の合成 :

系 5.4  $U \subset \mathbb{R}^m, U' \subset \mathbb{R}^{m'}$  を開集合とする。与えられた  $g \in C^\infty(U : \mathbb{R}^{m'})$  と  $f \in (U' : \mathbb{R}^{m''})$  が  $g(U) \subset U'$  なるものとする、

$$\widetilde{(f \circ g)}(x) = (\tilde{f} \circ \tilde{g})(x) \quad \text{for } x \in \tilde{U} \times \mathfrak{R}_{\text{od}}^m \quad \text{where } \tilde{U} = \pi_B^{-1}(U) \subset \mathfrak{R}_{\text{ev}}^m.$$

証明：一般性を失わずに  $m'' = 1$  と仮定して良い。

まず最も簡単な  $m = m' = 1$  に考察しよう。Faà di Bruno の公式

$$\frac{d^n}{dq^n} f(g(q)) = \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_n=k, \\ j_1+2j_2+3j_3+\dots=n}} \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_n!} f^{m_1+m_2+\dots+m_n}(g(q)) \prod \left( \frac{g^{(j)}(q)}{j!} \right)^{m_j}$$

と Grassmann 接続の定義より、

$$\begin{aligned} \widetilde{(f \circ g)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f \circ g)^{(n)}(x_B)}{n!} x_S^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=n, \\ k_1+2k_2+\dots+nk_n=n}} \frac{1}{k_1!\dots k_n!} \prod_{j=1}^n \left( \frac{g^{(j)}(x_B)}{j!} \right)^{k_j} f^{(k_1+\dots+k_n)}(g(x_B)) \right) x_S^n. \end{aligned} \quad (5.18)$$

ここで  $\tilde{g}(x) = g(x_B) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g^{(l)}(x_B)}{l!} x_S^l = y_B + y_S$  とおくと

$$(\tilde{f} \circ \tilde{g})(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(y_B)}{m!} y_S^m = f(y_B) + \frac{f^{(1)}(y_B)}{1!} y_S + \frac{f^{(2)}(y_B)}{2!} y_S^2 + \dots \quad (5.19)$$

となる。但し

$$y_S^m = \left( \sum_{l=1}^{\infty} \frac{g^{(l)}(x_B)}{l!} x_S^l \right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} x_S^n \left( \sum_{\substack{k_1+\dots+k_n=n, \\ k_1+2k_2+\dots+nk_n=n}} \frac{1}{k_1!\dots k_n!} \prod_{j=1}^n \left( \frac{g^{(j)}(x_B)}{j!} \right)^{k_j} \right) \quad (5.20)$$

であり、これらより加法の順序を変えて式 (5.18) が求まる。

一般の  $m, m'$  に対しては、一般次元での *Faà di Bruno* の公式<sup>4</sup>を用いれば

$$\widetilde{\partial_q^\alpha(f \circ g)}(x) = \partial_x^\alpha(\tilde{f} \circ \tilde{g})(x). \quad \square$$

記法：以下混乱が起こらない限り  $\tilde{f}$  を単に  $f$  と記す。

注意： $f$  の *Grassmann* 接続  $\tilde{f}$  の意味を *de Witt* は教科書 “*Supermanifolds*” の p.7 で

“*The presence of a soul in the independent variable evidently has little practical effect on the variety of functions with which one may work in applications of the theory. In this respect  $\mathfrak{R}_{\text{ev}}$  is a harmless generalization of its own subspace  $\mathbb{R}$ , the real line.*”

と書いている。実際

命題 5.2  $\mathfrak{R}^{m|0}$  から  $\mathfrak{C}$  への関数  $G$  がスーパー *Fréchet* 微分可能とする。  $G$  を  $\mathbb{R}^m$  に制限した関数を  $g(q) = G(q)$  とすると、  $\tilde{g} = G$  となる。

証明： $G$  を  $\mathfrak{C}^{m|0}$  から  $\mathfrak{C}$  へのスーパー解析関数とすると、少なくとも  $g$  は  $\mathbb{R}^m$  から  $\mathbb{C}$  への実解析的で補題 5.1 より  $\tilde{g} = G$ 。  $G$  が  $\mathfrak{R}^{m|0}$  から  $\mathfrak{C}$  へのスーパースムーズで  $\mathbb{R}^m$  上で 0 なるものとする、  $G$  は  $\mathfrak{R}^{m|0}$  上で 0 となる。実際、式 (5.17) より、任意の  $\alpha$  に対し  $\partial_q^\alpha g(x_B) = 0$  であり、

$$\begin{aligned} G(x_B + x_S) &= \tau_N(G; x_B, x_S) = \sum_{|\alpha|=N+1} x_S^\alpha \int_0^1 dt \frac{1}{N!} (1-t)^N \partial_x^\alpha G(x_B + tx_S) \\ &= \sum_{|\beta|=N+2} x_S^\beta \int_0^1 dt \frac{1}{(N+1)!} (1-t)^{N+1} \partial_x^\beta G(x_B + tx_S). \end{aligned}$$

前述したように、  $f_I(x) \rightarrow \infty$  だとしても  $|I|$  が  $\infty$  のとき  $\mathfrak{C}$  で  $f_I(x)\sigma^I \rightarrow 0$  となるので、  $N \rightarrow \infty$  のとき、  $\mathfrak{C}$  で  $\tau_N(G; x_B, x_S) \rightarrow 0$ 。実際、任意の  $\epsilon > 0$  に対し  $N$  を  $N^{N+1}e^{-N}2^{-2^N} < \epsilon$  なるようにとると、  $(x_S)^\alpha$  は次数が  $r(I) \sim 2^{2^N}$  より大きい *Grassmann* 生成元を含み、その成分の数は  $N_d = \#\{\alpha \mid |\alpha| = N+1\} \leq N! \sim \sqrt{2\pi}N^{N+1/2}e^{-N}$  となる。故に  $N$  を十分大きく取ると  $p_I(\tau_N(g; x_B, x_S)) \leq N_d 2^{-2^N} \leq \epsilon$  となる。  $\square$

注意：多変数関数の合成関数の高階微分についての最近の論文として

*G.M. Constantine and T.H. Savits, A multivariate Faà di Bruno formula with applications, Transactions of AMS, 348(1996), pp. 503-520.*

レポート問題：*Bell* の多項式、 *Faà di Bruno* の公式を検索し、自分なりに了解できる証明を与えよ。

===== 付録 =====

<sup>4</sup>L. Schwartz, pp. 262-263, Cours d'Analyses I, Hermann, Paris, 1967

講義中に有限次元空間での非線形問題が無限次元空間では線形問題になる例を述べた。もっとも典型的なのが、Hamilton 方程式の解と Liouville 方程式の解が特性曲線の方法で対応するというものである。より具体的には、 $H(q, p) \in C^\infty(\mathbb{R}^m : \mathbb{R})$  に対し Hamilton 方程式とは

$$\begin{cases} \dot{q}_j = H_{p_j}(q(t), p(t)), \\ \dot{p}_j = -H_{q_j}(q(t), p(t)), \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{q} \\ \underline{p} \end{pmatrix}$$

であり、Liouville 方程式とは

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, q, p) = \{u, H(q, p)\} \quad \text{with} \quad u(0, q, p) = \underline{u}(q, p)$$

である。ここで、Poisson 括弧式は

$$\{f, g\} = \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right)$$

とした。Hamilton 方程式は非線形の常微分方程式であり、Liouville 方程式は線形の偏微分方程式である。偏微分方程式は適当な関数空間で級数展開すれば、その係数が可算無限個の  $t$  に関する常微分方程式を満たしていると思わせることがある ( Galerkin 法 )

Liouville 方程式での初期値として  $\underline{u}(q, p)$  を測度  $\delta_q(q)$  或は  $\delta_p(p)$  ととれば Hamilton 方程式の解が求まる。逆に、 $u(t, \underline{q}, \underline{p}) = \underline{u}(q(t, \underline{q}, \underline{p}), p(t, \underline{q}, \underline{p}))$  とすれば Liouville 方程式の解  $u(t, \underline{q}, \underline{p})$  が求まる。

同様に、Navier-Stokes 方程式に対応する Liouville 方程式が Hopf 方程式と呼ばれる汎関数微分を含んだものとなる。少し詳しく書くと

**Navier-Stokes 方程式** :  $\mathbb{R}^m$  の領域  $\Omega$  を滑らかな境界  $\partial\Omega$  を持つものとする。ベクトル場  $u(t, x) = \sum_{j=1}^m u_j(t, x) \frac{\partial}{\partial x_j}$  と圧力  $p(t, x)$  で

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - \nu \Delta u(t, x) + (u \cdot \nabla)(t, x) + \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} u &= 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u(t, x)|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

を求めよ。この解があったとしてそれを  $(T_t u_0)(x) = u(t, x)$  と表記する。

以下、 $L_\sigma^2(\Omega)$  は領域  $\Omega$  上のソレノイダルベクトル場で 2 乗可積分なもの、 $\mathring{\Lambda}_\sigma^1(M)$  は多様体  $M$  上のコンパクト台を持つソレノイダルベクトル場である。

**Hopf-Foias 方程式 (HF)** : Hilbert 空間として  $\mathbf{H} = L_\sigma^2(\Omega)$  をとる。問題は  $\mathbf{H}$  上の Borel 測度の族  $\{\mu(t, \cdot)\}_{t \in (0, \infty)}$  で、適当なクラスの試料汎関数  $\Phi(t, u)$  に対し、

$$\begin{aligned} - \int_0^\infty \int_{\mathbf{H}} \frac{\partial \Phi(t, u)}{\partial t} \mu(t, du) dt - \int_{\mathbf{H}} \Phi(0, u) \mu_0(du) \\ = \int_0^\infty \int_{\mathbf{H}} \int_M ((\nabla_u u)^j(x) - \nu(\Delta u)^j(x) - f^j(x, t)) (\Phi(t, u), u^j(x)) d_g x \mu(t, du) dt \end{aligned}$$

を満たすものを求めよ。ここで、 $\mu_0(\cdot)$  は  $\mathbf{H}$  上の与えられた Borel 測度である。この方程式は、任意の  $\omega \in \mathcal{B}(\mathbf{H})$  に対して  $\mu(t, \omega) = \mu_0(T_t^{-1} \omega)$  とおき、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{H}} \Phi(t, T_t u) \mu_0(du)$$

を計算すれば得られる。ここでは  $T_t u$  が well-defined であるとしている。

Hopf 方程式 (H) :  $[0, \infty) \times \tilde{\mathbf{H}}$  上の汎関数  $W(t, \eta)$  で、 $(t, \eta) \in (0, \infty) \times \mathring{\Lambda}_\sigma^1(M)$  に対して

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W(t, \eta) &= \int_M \left( -i(\tilde{T}\eta)_{jk}(x) \frac{\delta^2}{\delta\eta_j(x)\delta\eta_k(x)} W(t, \eta) \right. \\ &\quad \left. + \nu(\Delta\eta)_j(x) \frac{\delta}{\delta\eta_j(x)} W(t, \eta) + i\eta_j(x) f^j(x, t) W(t, \eta) \right) d_g x, \\ \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sqrt{g(x)} \frac{\delta}{\delta\eta_j(x)} W(t, \eta) \right) &= 0, \\ W(t, 0) = 1 \quad \text{かつ} \quad W(0, \eta) &= W_0(\eta). \end{aligned}$$

を満たし

$$\begin{aligned} W_0(0) = 1, \quad \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sqrt{g(x)} \frac{\delta}{\delta\eta_j(x)} W_0(\eta) \right) &= 0, \\ f(x, t) = f^j(x, t) \in L^2(0, \infty; \mathbf{V}^{-1}). \end{aligned}$$

なるものを求めよ。

この方程式は  $\Phi(t, u) = \rho(t)e^{i\langle u, \eta \rangle}$  を (HF) に代入し、

$$W(t, \eta) = \int_{\mathbf{H}} e^{i\langle u, \eta \rangle} \mu(t, du) = \int_{\mathbf{H}} e^{i\langle T_t u, \eta \rangle} \mu_0(du) \quad \text{with} \quad \langle u, \eta \rangle = \int_M u^j(x) \eta_j(x) d_g x.$$

とおけば求まる。

上に幾分唐突に出てきた汎関数微分とは何か？例えば、 $\Omega$  を  $\mathbb{R}^m$  の領域とする。適当な関数空間  $X(\Omega)$  上での汎関数  $W : X(\Omega) \ni \eta \rightarrow W(\eta) \in \mathbb{C}$  に対し、試料関数  $\phi \in C_0^\infty(\Omega) \subset X(\Omega)$  をとって

$$\left. \frac{d}{dt} W(\eta + t\phi) \right|_{t=0}$$

が存在するとき、それを形式的だが

$$\mathcal{D}'\langle w, \phi \rangle_{\mathcal{D}} = \int_{\Omega} dx w(x) \phi(x), \quad w(x) = \frac{\delta W(\eta)}{\delta \eta(x)} \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

と書き、これを汎関数微分という。 $W$  の高階汎関数微分という概念がある。形式的には

$$\frac{\delta^2 W(\eta)}{\delta \eta(x) \delta \eta(y)} \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$$

となるのだが、これの  $x = y$  での「もの」としての意味付がどうなるのか？

筆者は、場の量子論や乱流理論の数学的基礎付をするためには、「新しい微分方程式論」が必要で、その候補が汎関数微分方程式だと考えている。しかし、無限次元空間には適当な *Lebesgue-like* 測度が無いので、積分ができず、それ故、部分積分も *Fourier* 変換も思うに任せない。現時点で残る道具<sup>5</sup>は *Taylor* 展開だけで、すると極めて「代数的」な取り扱いしか有効でなくなる。これが解析に携わる者としての苛つきの元である。

===== メモ =====

幸い 6 名程の諸君が聴講してくれている。

<sup>5</sup>解析的手法において、*Taylor* 展開、部分積分、積分記号下での変数変換、*Fourier* 変換が神器