スーパー解析学の基礎　第6回講義内容 – 08-11.14　井上　淳 v.2-1

1　非可換解析学の必然性とは、そしてそのご利益は？

2　Dirac 方程式と Weyl 方程式

3　スーパー数とスーパー空間

4　スーパー空間上の線形代数

4.1　スーパー空間上の行列環

4.2　スーパー跡、スーパー行列式

4.3　Gauss 型 “積分” と Pfaffian

5　スーパー空間上の基礎解析

5.1　スーパー空間上の関数

5.1.1　Grassmann 接続の導入

$\phi(q)$ を開集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 上で定義された $\mathfrak{C}$-値関数とする、即ち、

$$\phi(q)=\sum_{I\in\mathcal{I}}\phi_I(q)\sigma^I \quad \text{ここで} \quad \phi_I:\Omega\ni q\to\phi_I(q)\in\mathbb{C}.$$

$\mathfrak{C}$ の位相の定義から、$\phi(q)$ の連続性は

$$\lim_{q\to q_0}\phi(q)=\sum_{I\in\mathcal{I}}\big(\lim_{q\to q_0}\phi_I(q)\big)\sigma^I$$

と定義する。また、$\phi(q)$ の微分可能性と積分については

$$\frac{\partial}{\partial q_j}\phi(q)=\sum_{I\in\mathcal{I}}\frac{\partial}{\partial q_j}\phi_I(q)\sigma^I,$$

$$\int_\Omega dq\,\phi(q)=\sum_{I\in\mathcal{I}}\Big(\int_\Omega dq\,\phi_I(q)\Big)\sigma^I$$

とする。各 $I\in\mathcal{I}$ に対し $\phi_I\in C^\infty(\Omega:\mathbb{C})$ のとき $\phi\in C^\infty(\Omega:\mathfrak{C})$ という。

補題 5.1 $\phi(t)$ と $\Phi(t)$ を区間 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上で連続な $\mathfrak{C}$-値関数とする。このとき、

(1) 積分 $\int_a^b dt\,\phi(t)$ が存在する。

(2) $[a,b]$ 上で $\Phi'(t)=\phi(t)$ ならば、$\displaystyle\int_a^b dt\,\phi(t)=\Phi(b)-\Phi(a)$,

(3) $\lambda\in\mathfrak{C}$ を定数とすると

$$\int_a^b dt\,(\phi(t)\cdot\lambda)=\left(\int_a^b dt\,\phi(t)\right)\cdot\lambda,\quad \int_a^b dt\,(\lambda\cdot\phi(t))=\lambda\cdot\int_a^b dt\,\phi(t).$$

更に、上の補題は開集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 上の $\mathfrak{C}$-値関数 $\phi(q)$ にまで拡張できる。

定義 5.1 集合 $U_{\rm ev}\subset\mathfrak{R}^{m|0}=\mathfrak{R}^m_{\rm ev}$ が偶スーパー領域であるとは、$U_{\rm ev,B}=\pi_{\rm B}(U_{\rm ev})\subset\mathbb{R}^m$ が開かつ連結で $\pi_{\rm B}^{-1}(\pi_{\rm B}(U_{\rm ev}))=U_{\rm ev}$ となることである。集合 $U\subset\mathfrak{R}^{m|n}$ が偶スーパー領域 $U_{\rm ev}\subset\mathfrak{R}^{m|0}$ を用いて $U=U_{\rm ev}\times\mathfrak{R}^n_{\rm od}$ と表されているとき、U は $\mathfrak{R}^{m|n}$ のスーパー領域という。

命題 5.1 $U_{\rm ev}\subset\mathfrak{R}^{m|0}$ を偶スーパー領域とする。f を $U_{\rm ev,B}=\pi_{\rm B}(U_{\rm ev})$ から $\mathfrak{C}$ の中への滑らかな写像（これを $f\in C^\infty(U_{\rm ev,B}:\mathfrak{C})$ と記す)、即ち、

$$f(q)=\sum_{J\in\mathcal{I}}f_J(q)\,\sigma^J\quad \text{但し、各 } J\in\mathcal{I} \text{ に対し}\quad f_J(q)\in C^\infty(U_{\rm ev,B}:\mathbb{C}). \tag{5.1}$$

このとき、$U_{\rm ev}$ から $\mathfrak{C}$ への写像を

$$\tilde f(x)=\sum_{|\alpha|\ge0}\frac{1}{\alpha!}\partial_q^\alpha f(x_{\rm B})\,x_{\rm S}^\alpha\quad \text{但し}\quad \partial_q^\alpha f(x_{\rm B})=\sum_J\partial_q^\alpha f_J(x_{\rm B})\,\sigma^J \tag{5.2}$$

と定義できる。ここで $x=(x_1,\cdots,x_m)$, $x=x_{\rm B}+x_{\rm S}$ は $x_{\rm B}=(x_{1,\rm B},\cdots,x_{m,\rm B})=(q_1,\cdots,q_m)=q\in U_{ev,\rm B}$, $x_{\rm S}=(x_{1,\rm S},\cdots,x_{m,\rm S})$ かつ $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}$ である。$\tilde f$ を f の *Grassmann continuation*（接続）という。

証明 [ポイントは式 (5.2) の無限和に意味がつくかどうかである。そのためには $\tilde f$ の Grassmann 次数が k のところの $\tilde f^{[k]}$ がどう定義されていくのかを見ればよい]：

$x_{1,\rm S}$ の k_1-次の成分を $x_{1,\rm S}^{[k_1]}$ と書くと、

$$(x_{1,\rm S}^{\alpha_1})^{[k_1]}=\sum(x_{1,\rm S}^{[r_1]})^{p_{1,1}}\cdots(x_{1,\rm S}^{[r_\ell]})^{p_{1,\ell}}$$

を得る。ここで、「和」は整数 α_1 の分割 $\alpha_1=p_{1,1}+\cdots+p_{1,\ell}$ で $\sum_{i=1}^\ell r_ip_{1,i}=k_1$, $r_i\ge0$ となるもの全てに対してとる。この記法で、$(\partial_q^\alpha f)^{[k_0]}(x_{\rm B})=\sum_{|J|=k_0}\partial_q^\alpha f_J(x_{\rm B})\,\sigma^J$ とし

$$\tilde f^{[k]}(x)=\sum_{\substack{|\alpha|\le k,\ k_0+k_1+\cdots+k_m=k\\ k_1,\cdots,k_m \text{ are even}}}\frac{1}{\alpha!}(\partial_q^\alpha f)^{[k_0]}(x_{\rm B})\,(x_{1,\rm S}^{\alpha_1})^{[k_1]}\cdots(x_{m,\rm S}^{\alpha_m})^{[k_m]} \tag{5.3}$$

が定義されれば良い。式 (5.3) を少し詳しく書くと

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}^{[0]}(x) &= f^{[0]}(x_{\mathrm{B}}),\\
\tilde{f}^{[1]}(x) &= f^{[1]}(x_{\mathrm{B}}),\\
\tilde{f}^{[2]}(x) &= f^{[2]}(x_{\mathrm{B}}) + \sum_{j=1}^{m} (\partial_{q_j} f)^{[0]}(x_{\mathrm{B}})(x_{j,\mathrm{S}})^{[2]},\\
\tilde{f}^{[3]}(x) &= f^{[3]}(x_{\mathrm{B}}) + \sum_{j=1}^{m} (\partial_{q_j} f)^{[1]}(x_{\mathrm{B}})(x_{j,\mathrm{S}})^{[2]},\\
\tilde{f}^{[4]}(x) &= f^{[4]}(x_{\mathrm{B}}) + \sum_{j=1}^{m} (\partial_{q_j} f)^{[2]}(x_{\mathrm{B}})(x_{j,\mathrm{S}})^{[2]}\\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} (\partial_{q_j}^2 f)^{[0]}(x_{\mathrm{B}})(x_{j,\mathrm{S}}^2)^{[4]} + \sum_{j\neq k} (\partial_{q_j\, q_k}^2 f)^{[0]}(x_{\mathrm{B}})(x_{j,\mathrm{S}})^{[2]}(x_{k,\mathrm{S}})^{[2]}, \quad etc.
\end{aligned}
$$

$\mathfrak{C}$ の中で $\tilde{f}^{[j]}(x) \neq \tilde{f}^{[k]}(x)$ $(j \neq k)$ となるのだから, 和を $\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{f}^{[j]}(x) \in \mathfrak{C} = \oplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{C}^{[k]}$ とし、それを $\tilde{f}(x)$ と記す。更にこの和の順序を変えて、より親しみのある表示にしたものが (5.2) である。 □

系 5.1 f と $\tilde{f}$ を上のように与えると、*(i)* $\tilde{f}$ は連続、*(ii)* U_{ev} 上で $\tilde{f}(x) = 0$ ならば $U_{\mathrm{ev,B}}$ では $f(x_{\mathrm{B}}) = 0$ となる。更に、$\tilde{f}$ の j-方向の偏微分を

$$
\partial_{x_j} \tilde{f}(x) = \frac{d}{dt}\tilde{f}(x + te_{(j)})\Big|_{t=0} \qquad \text{ここで} \quad e_{(j)} = (\overbrace{0,\cdots,0,1}^{j},0,\cdots,0) \in \mathfrak{R}^{m|0}, \tag{5.4}
$$

と定めると、

$$
\partial_{x_j} \tilde{f}(x) = \widetilde{\partial_{q_j} f}(x) \quad (j = 1,\cdots,m). \tag{5.5}
$$

証明：$y_j = y_{j,\mathrm{B}} + y_{j,\mathrm{S}} \in \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}}$ とする。$y_{(j)} = y_j e_{(j)} = y_{j,\mathrm{B}} e_{(j)} + y_{j,\mathrm{S}} e_{(j)} = y_{(j),\mathrm{B}} + y_{(j),\mathrm{S}} \in \mathfrak{R}^{m|0}$ に対し

$$
\frac{d}{dt}\tilde{f}(x + ty_{(j)}) = \frac{d}{dt}\left\{ \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\left(\sum_J \partial_q^\alpha f_J(x_{\mathrm{B}} + ty_{(j),\mathrm{B}})\sigma^J \right)(x_{\mathrm{S}} + ty_{(j),\mathrm{S}})^\alpha \right\},
$$

とすると、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tilde{f}(x + ty_{(j)})\Big|_{t=0} &= y_{(j),\mathrm{B}} \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\left(\sum_J \partial_q^\alpha f_J(x_{\mathrm{B}})\sigma^J \right) x_{\mathrm{S}}^\alpha + y_{(j),\mathrm{S}} \sum_{\check{\alpha}} \frac{1}{\check{\alpha}!}\left(\sum_J \partial_q^{\check{\alpha}} \partial_{q_j} f_J(x_{\mathrm{B}})\sigma^J \right) x_{\mathrm{S}}^{\check{\alpha}}\\
&= y_j \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}\partial_q^\alpha \partial_{q_j} f(x_{\mathrm{B}})\, x_{\mathrm{S}}^\alpha = y_j \widetilde{\partial_{q_j} f}(x).
\end{aligned}
$$

ここで $\check{\alpha} = (\alpha_1,\cdots,\alpha_j - 1,\cdots,\alpha_m)$. 上式で $y_j = y_{j,\mathrm{B}} + y_{j,\mathrm{S}} = 1$ と置く事により (5.5) が求まる。 □

注意 5.1 上と同様な議論で、$y=(y_1,\cdots,y_m)\in\mathfrak{R}^{m|0}$ に対して

$$\frac{d}{dt}\tilde{f}(x+ty)\Big|_{t=0}=\sum_{j=1}^m y_j\sum_\alpha\frac{1}{\alpha!}\partial_q^\alpha\partial_{q_j}f(x_{\mathrm{B}})\,x_{\mathrm{S}}^\alpha=\sum_{j=1}^m y_j\partial_{x_j}\tilde{f}(x). \tag{5.6}$$

注意 5.2 さて式 (5.6) より、f の *Grassmann* 接続 $\tilde{f}$ は x で y 方向にスーパー *Gâteaux*-微分可能であると定義するのが自然であろう。即ち、各 y に対し $\tilde{f}'_F(x;y)\in\mathfrak{C}$ があって

$$\begin{aligned}&\tilde{f}(x+ty)-\tilde{f}(x)-t\tilde{f}'_F(x;y)\to 0\quad in\ \mathfrak{C}\quad when\quad t\to 0,\\ &or\quad \frac{d}{dt}\tilde{f}(x+ty)\Big|_{t=0}=\tilde{f}'_F(x;y).\end{aligned}\tag{5.7}$$

更に、f の Grassmann 接続 $\tilde{f}$ は以下の性質を持つ：

補題 5.2 [1] f を $\mathbb{R}^m$ 上で実解析的とする。そのとき *Grassmann* 接続 $\tilde{f}$ は x でスーパー *Gâteaux*-微分可能[2]、即ち、$F_j(x)\in\mathfrak{C}$ と $\epsilon_j(x,y)\in\mathfrak{C}$ があって

$$\tilde{f}(x+y)=\tilde{f}(x)+\sum_{j=1}^m y_jF_j(x)+\sum_{j=1}^m\epsilon_j(x,y)y_j,\quad with\quad \epsilon_j(x,y)\to 0\quad in\ \mathfrak{C}\quad when\quad y\to 0\quad in\ \mathfrak{C}.$$

証明：以下簡単のために $m=1$ の場合について述べる。すると、命題 5.1 より

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x+y)&=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{B}})(x_{\mathrm{S}}+y_{\mathrm{S}})^n\\
&=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\Big(\sum_{\ell=0}^\infty\frac{1}{\ell!}f^{(\ell+n)}(x_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{B}}^\ell\Big)\Big(\sum_{k=0}^n\frac{n!}{k!(n-k)!}x_{\mathrm{S}}^{n-k}y_{\mathrm{S}}^k\Big)\quad\text{by real analyticity of } f(q),\\
&=\sum_{n=0}^\infty\Big(\sum_{\ell=0}^\infty\frac{1}{\ell!}f^{(\ell+j+k)}(x_{\mathrm{B}})y_{\mathrm{B}}^\ell\cdot\Big(\sum_{j+k=0}^n\frac{1}{k!j!}x_{\mathrm{S}}^jy_{\mathrm{S}}^k\Big)\Big)\quad\text{by renumbering } n=k+j,\\
&=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\Big(\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{j!}f^{(n+j)}(x_{\mathrm{B}})x_{\mathrm{S}}^j\Big)\Big(\sum_{\ell+k=0}^n\frac{n!}{\ell!k!}y_{\mathrm{B}}^\ell y_{\mathrm{S}}^k\Big)\\
&=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\Big(\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{j!}f^{(n+j)}(x_{\mathrm{B}})x_{\mathrm{S}}^j\Big)(y_{\mathrm{B}}+y_{\mathrm{S}})^n\quad\text{by putting } n=\ell+k,\\
&=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}\tilde{f}^{(n)}(x)y^n.\end{aligned}$$

故に、

$$\tilde{f}(x+y)-\tilde{f}(x)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n!}\tilde{f}^{(n)}(x)y^n=\tilde{f}^{(1)}(x)y+[\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n!}\tilde{f}^{(n)}(x)y^{n-1}]y.$$

[1]S. Matsumoto and K. Kakazu, *A note on topology of supermanifolds*, J.Math.Phys.27(1986), pp. 2690-2692,
S. Matsumoto, S Uehara and Y Yasui, *A superparticle on the super Riemann surface*, J.Math.Phys.31(1990), pp. 476-501.

[2]実はより強く Fréchet-微分可能

ここで

$$\epsilon(x,y)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\tilde{f}^{(n)}(x)y^{n-1}\to 0 \quad \text{in } \mathfrak{C} \quad \text{when} \quad y\to 0. \qquad \Box$$

より一般に

補題 5.3 $f(q)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^m)$ とするとき、$\tilde{f}$ は *Taylor* 展開される：任意の N に対し $\tilde{\tau}_N(x,y)\in \mathfrak{C}$ があって

$$\tilde{f}(x+y)=\sum_{|\alpha|=0}^{N}\frac{1}{\alpha!}\tilde{f}^{\alpha}(x)y^{\alpha}+\tilde{\tau}_N(x,y) \tag{5.8}$$

となる。ここで

$$\tilde{\tau}_N(x,y)=\sum_{|\alpha|=N+1}(x-y)^{\alpha}\int_0^1 dt\frac{1}{N!}(1-t)^N\partial_x^{\alpha}\tilde{f}(y+t(x-y)).$$

証明：$q=x_{\mathrm{B}}$, $q'=y_{\mathrm{B}}$ とおく。任意の N に対し

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=N+1}(q-q')^{\alpha}\int_0^1 dt\frac{1}{N!}(1-t)^N\partial_q^{\alpha}f(q'+t(q-q'))\\
&\qquad=\int_0^1 dt\frac{(1-t)^N}{N!}(\frac{d}{dt})^{N+1}f(q'+t(q-q'))\\
&\qquad=-\frac{1}{N!}\sum_{|\alpha|=N}(q-q')^{\alpha}\partial_q^{\alpha}f(q)+\int_0^1 dt\frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!}(\frac{d}{dt})^N f(q'+t(q-q'))\\
&\qquad=f(q)-\sum_{|\alpha|=0}^{N}\frac{1}{\alpha!}(q-q')^{\alpha}\partial_q^{\alpha}f(q').
\end{aligned}$$

両辺をそれぞれ Grassmann 接続して、求めたい結果を得る。 $\Box$

記法: 記述の簡単化のために、誤解の恐れがない限り、$\tilde{f}$ **を単に** f と記す。

5.1.2 スーパースムーズ（超滑）関数の導入と偏微分

$\mathfrak{R}^{m|n}$ から $\mathfrak{C}$ への関数（写像）の連続性、微分可能性をどう定義するか？まず既存の考え方を見直してみよう。

関数の「微分可能性」の定義について ：$(X,\|\cdot\|_X)$ と $(Y,\|\cdot\|_Y)$ を 2 つの Banach 空間とする。
● 関数 $\Phi:X\to Y$ が $x\in X$ で $h\in X$ の方向に **Gâteaux-微分可能**（偏微分可能）とは、ある元 $\Phi'_G(x;h)\in Y$ が存在して

$$\|\Phi(x+th)-\Phi(x)-t\Phi'_G(x;h)\|_Y=o(t) \quad (t\to 0)$$

となることである。$\Phi'_G(x;h)$ を $\Phi'_G(x)(h)$ 或は $(d_G\Phi(x))(h)$ とも記す。
● 更に、$\Phi : X \to Y$ が $x \in X$ で **Fréchet-微分可能**（全微分可能）であるとは、$\Phi'_F(x) \in L(X:Y)$ と元 $\tau(x,h) \in Y$ があって

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) - \Phi'_F(x)h = \tau(x,h) \quad \text{with} \quad \|\tau(x,h)\| = o(\|h\|) \quad (\|h\| \to 0)$$

となることである。ここで X から Y への有界線形作用素全体に作用素ノルムを入れた空間を $L(X:Y)$ と書いた。更に、$\Phi'_F(x)$ が $x \in X$ に関し $L(X:Y)$ で連続のとき 1 階連続 Fréchet-微分可能といい $\Phi \in C^1_F(X:Y)$ と書く。

定理 5.1 (Theorem 2.1.13 of Berger[3]) もし $\Phi : X \to Y$ が x で *Fréchet*-微分可能ならば、x でどの方向にも *Gâteaux*-微分可能である。逆に、もし Φ の x での *Gâteaux*-微分 $d_G\Phi(x,h)$ が h に関し線形で、$X \to L(X:Y)$ の写像として x に関し連続ならば、Φ は x で *Fréchet*-微分可能である。どの場合も、$\Phi'_F(x)y = \Phi'_G(x;y)$ となる。

● N 階 Gâteaux-微分に関しては

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^N}{\partial t_1 \cdots \partial t_N}\Phi(x + \sum_{j=1}^N t_j h_j)\Big|_{t_1=\cdots=t_N=0} &= \frac{d}{dt_N} d_G^{N-1}\Phi(x + t_N h_N; h_1, \cdots, h_{N-1})\Big|_{t_N=0} \\
&= d_G(d_G^{N-1}\Phi(x; h_1, \cdots, h_{N-1}); h_N) \\
&= d_G^N\Phi(x; h_1, \cdots, h_N) = \Phi_G^{(N)}(x; h_1, \cdots, h_N)
\end{aligned}$$

と定める。ここで $d_G^N\Phi(x; h_1, \cdots, h_N)$ は存在すれば $(h_1, \cdots, h_N)$ に関して対称である。
● Φ が 2 階 Fréchet-微分可能とは、$\Phi'_F(x)$ が X から $L(X:Y)$ への写像として Fréchet-微分可能なることである。更に $d_F^2\Phi(x)$ が $x \in X$ から $L(X \times X : Y) = L_2(X:Y)$ への写像として連続ならば、2 階連続 Fréchet-微分可能といい、$\Phi \in C^2_F(X:Y)$ と記す。一般に $\Phi \in C^N_F(X:Y)$ とは、各 $x \in U \subset X$ に対し Φ が N 階 Fréchet-微分可能であり、更に $\Phi_F^{(N)}(x)$ が x に関し U から $L(\overbrace{X \times \cdots \times X}^{N} : Y) = L_N(X:Y)$ への連続写像となることである。

定理 5.2 (Theorem 2.1.27 of Berger) Φ が x の近傍 $U \subset X$ で N 階 *Fréchet*-微分可能で、その微分を $d_F^N\Phi(x)(h_1, \cdots, h_N)$ と記すとき、Φ は N 階 *Gâteaux*-微分可能で

$$\Phi_G^{(N)}(x; h_1, \cdots, h_N) = d_F^N\Phi(x)(h_1, \cdots, h_N).$$

逆に、Φ の N 階 *Gâteaux*-微分 $\Phi_G^{(N)}(x; h_1, \cdots, h_N)$ が x の近傍 $U \subset X$ で存在し、$\Phi_G^{(N)}(x; h_1, \cdots, h_N) \in L_N(X:Y) = L(X : L(X^{N-1} : Y))$ であり、更に x に関し $\Phi_G^{(N)}(x; h_1, \cdots, h_N)$ が U から $L_N(X:Y)$ への写像として連続ならば Φ は N 階 *Fréchet*-微分可能である。

問題: Fréchet-Grassmann 代数間の写像に対しては、上の微分可能性をどう定義するのが自然なのか[4]？

この問題に答えるために、我々の「扱いたい関数の形」を先に導入し、それをスーパースムーズ関数と名付ける事にする。次回にそれらの性質と特徴付けを試みる。

[3]M.S. Berger, Nonlinearity and Functional Analysis–Lectures on Nonlinear Problems in Mathematical Analysis, Academic Press, NewYork, 1977.

[4]Banach-Grassmann 代数を Fréchet-Grassmann 代数と替え、「環構造及び距離がある」無限次元空間の間の写像として微分可能性をどう定義するべきなのか？

定義 5.2 *(1)* 偶スーパー領域 $U_{\mathrm{ev}} \subset \mathfrak{R}^{m|0}$ に対し、U_{ev} から $\mathfrak{C}$ への写像 $\tilde{f}$ がスーパースムーズ（超滑）関数であるとは、$\tilde{f}$ が $U_{\mathrm{ev,B}} = \pi_{\mathrm{B}}(U_{\mathrm{ev}})$ から $\mathfrak{C}$ への滑らかな関数 f の *Grassmann* 接続となっていることである。U_{ev} 上のスーパースムーズ（超滑）関数全体を $\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U_{\mathrm{ev}} : \mathfrak{C})$ と記す。

(2) スーパー領域 $U \subset \mathfrak{R}^{m|n}$ から $\mathfrak{C}$ への写像 f がスーパースムーズ（超滑）とは、それが以下のように分解されることを言う：

$$f(x,\theta) = \sum_{|a|\le n} f_a(x)\theta^a \tag{5.9}$$

ここで、$a = (a_1, \cdots a_n) \in \{0,1\}^n$, $\theta^a = \theta_1^{a_1} \cdots \theta_n^{a_n}$ かつ $f_a(x) \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U_{\mathrm{ev}} : \mathfrak{C})$.

今後、特に断らない限り、各 a に対し $f_a(x)$ が一斉に偶あるいは奇（これをスーパースムーズ（超滑）関数は斉次という）とし、それらを $\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U : \mathfrak{C})$ と記す。更に、各 a に対し $\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U_{\mathrm{ev}} : \mathbb{C})$ のとき

$$\not{\mathcal{C}}_{\mathrm{SS}}(U : \mathfrak{C}) = \{f(x,\theta) \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U : \mathfrak{C}) \,|\, f_a(x) \in \mathbb{C}\}$$

と記す。

(3) $f \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U : \mathfrak{C})$ とする。$j = 1, 2, \cdots, m$ 及び $s = 1, 2, \cdots, n$ に対し、

$$\begin{cases} F_j(X) = \displaystyle\sum_{|a|\le n} \partial_{x_j} f_a(x)\theta^a, \\ F_{s+m}(X) = \displaystyle\sum_{|a|\le n} (-1)^{l(a)+p(f_a(x))} f_a(x)\theta_1^{a_1} \cdots \theta_s^{a_s - 1} \cdots \theta_n^{a_n} \end{cases} \tag{5.10}$$

とおく。ここで、$l(a) = \sum_{j=1}^{s-1} a_j$ かつ $\theta_s^{-1} = 0$ とおいた。このとき、$F_\kappa(X)$ を $X = (x,\theta) = (X_\mu)$ における X_κ に関する f の（左）偏微分といい、

$$\begin{cases} F_j(X) = \dfrac{\partial}{\partial x_j} f(x,\theta) = \partial_{x_j} f(x,\theta) = f_{x_j}(x,\theta) \quad \mathit{for} \quad j = 1, 2, \cdots, m, \\ F_{m+s}(X) = \dfrac{\partial}{\partial \theta_s} f(x,\theta) = \partial_{\theta_s} f(x,\theta) = f_{\theta_s}(x,\theta) \quad \mathit{for} \quad s = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \tag{5.11}$$

或は簡単に

$$F_\kappa(X) = \partial_{X_\kappa} f(X) = f_{X_\kappa}(X) \quad \mathit{for} \quad \kappa = 1, \cdots, m+n. \tag{5.12}$$

と記述する。左を強調する時には $F_{s+m}^{(l)}$, $\overrightarrow{\partial}_{\theta_s} f$, $f_{\theta_s}^{(l)}$ 等と記す。

注意 5.3 *(1)* この講義では、特に断らない限り上に述べた奇変数に関する微分を用い、必要ならば、左微分という。これは、奇変数に関する各単項式において微分される変数を「先頭」或は「最も左に」もってきてそれをで置き換える操作であるからである。とはいえ、ある人々[5]はこれを右微分ともいうので、混乱を来す恐れがある。

[5]V.S. Vladimirov and I.V. Volovich, *Superanalysis I. Differential calculas*, Theor. Math. Phys. 59(1983), pp. 317-335.

念の為に、我々の立場での奇変数に関する右微分を以下に記しておく：$f \in \mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U:\mathfrak{C})$ とする。$j=1,2,\cdots,m$ と $s=1,2,\cdots,n$ に対し

$$\begin{cases} F_j^{(r)}(X) = \sum_{|a|\le n} \partial_{x_j} f_a(x)\theta^a, \\ F_{s+m}^{(r)}(X) = \sum_{|a|\le n} (-1)^{r(a)} f_a(x)\theta_1^{a_1}\cdots\theta_s^{a_s-1}\cdots\theta_n^{a_n} \end{cases}$$

とおく。ここで $r(a)=\sum_{j=s+1}^n a_j$ とおいた。$F_\kappa^{(r)}(X)$ を $X=(x,\theta)$ における X_κ に関する f の（右）偏微分といい、

$$F_j^{(r)}(X) = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x,\theta) = \partial_{x_j} f(x,\theta), \quad F_{m+s}^{(r)}(X) = f(x,\theta)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\theta_s} = f(x,\theta)\overleftarrow{\partial}_{\theta_s}$$

と記す。

(2) 無限次元 *Grassmann* 代数を用いているので、表式 (5.10) の分解は一意的である。実際、U 上で $\sum_a f_a(x)\theta^a \equiv 0$ ならば $f_a(x)\equiv 0$ である。*(see, p 322 in Vladimirov and Volovich.)*

(3) $\partial_{\theta_1}\partial_{\theta_2}u(\theta) = \partial_{\theta_1}(\partial_{\theta_2}u(\theta)) = -\partial_{\theta_2}(\partial_{\theta_1}u(\theta)) = -\partial_{\theta_2}\partial_{\theta_1}u(\theta)$ となる。これを拡張して、高階（左）微分も同様に定義され、以下のように記す：多重指数 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^m$ と $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\{0,1\}^n$ に対し、

$$\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_m}^{\alpha_m} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{\partial}_\theta^a f = \overrightarrow{\partial}_{\theta_1}^{a_1}(\cdots(\overrightarrow{\partial}_{\theta_n}^{a_n} f)) = \partial_{\theta_1}^{a_1}\cdots\partial_{\theta_n}^{a_n} f.$$

任意の $t\in[0,1]$ に対し $X=(x,\theta), Y=(y,\omega)\in\mathfrak{R}^{m|n}$ を $X+tY\in U$ なるものとする。このとき、系 5.1 に用いた証明法を繰り返して、$f\in\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U:\mathfrak{C})$ に対して以下が成立する：

$$\frac{d}{dt}f(X+tY)\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^m y_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(X) + \sum_{s=1}^m \omega_s \frac{\partial}{\partial\theta_s} f(X) \tag{5.13}$$

5.1.3 Taylor の定理

$f\in\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U:\mathfrak{C})$ に対して以下が成立する：

$$\frac{d}{dt}f(X+tY)\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^m y_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(X) + \sum_{s=1}^m \omega_s \frac{\partial}{\partial\theta_s} f(X). \tag{5.14}$$

これより、

定義 5.3 スーパースムーズ（超滑）関数 f に対し微分 *(=differential)* df を

$$df(X) = d_X f(X) = \sum_{\kappa=1}^{m+n} dX_\kappa \frac{\partial f(X)}{\partial X_\kappa},$$

或は

$$df(x,\theta) = \sum_{j=1}^m dx_j \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial x_j} + \sum_{s=1}^n d\theta_s \frac{\partial f(x,\theta)}{\partial\theta_s}$$

と定める。

前に述べた定義より、

命題 5.2 U を $\mathfrak{R}^{m|n}$ 内のスーパー領域とする。任意の $f,g\in\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U:\mathfrak{C})$ に対し、積 fg も $\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U:\mathfrak{C})$ に属し、その微分 $d_X f(\cdot)$ と $d_X g(\cdot)$ は $\mathfrak{R}^{m|n}$ から $\mathfrak{C}^{m+n}$ への連続線形写像と見なせる。

更に、それらは以下を満たす*:*

(1) 任意の斉次な元 $\lambda,\,\mu\in\mathfrak{C}$ に対し

$$d_X(\lambda f+\mu g)(X)=(-1)^{p(\lambda)p(X)}\lambda\, d_X f(X)+(-1)^{p(\mu)p(X)}\mu\, d_X g(X). \tag{5.15}$$

(2) (Leibniz の公式*)*

$$\partial_{X_\kappa}[f(X)g(X)]=(\partial_{X_\kappa}f(X))g(X)+(-1)^{p(X_\kappa)p(f(X))}f(X)(\partial_{X_\kappa}g(X)). \tag{5.16}$$

証明. (5.15) は明らか。$f,g\in\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U:\mathfrak{C})$ に対して以下が成立する：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(X+tY)g(X+tY)\Big|_{t=0}&=\left(\sum_{j=1}^m y_j\frac{\partial}{\partial x_j}f(X)+\sum_{s=1}^m \omega_s\frac{\partial}{\partial\theta_s}f(X)\right)g(X)\\&\quad+f(X)\left(\sum_{j=1}^m y_j\frac{\partial}{\partial x_j}g(X)+\sum_{s=1}^m \omega_s\frac{\partial}{\partial\theta_s}g(X)\right).\end{aligned} \tag{5.17}$$

これより、望みの式が従う。□

命題 5.3 (Taylor の定理) $U\subset\mathfrak{R}^{m|n}$ を、その中の任意の 2 点 $X=(x,\theta),Y=(y,\omega)\in U$ に対し $Y+t(X-Y)\in U$ $(0\le\forall t\le 1)$ なるものとする。$f\in\mathcal{C}_{\mathrm{SS}}(U:\mathfrak{C})$ に対し以下の *Taylor* の定理が成立する：任意の正整数 p に対し

$$f(x,\theta)-\sum_{|\alpha|+|a|\le p,\ |a|\le n}\frac{1}{\alpha!}(x-y)^\alpha(\theta-\omega)^a\partial_x^\alpha\partial_\theta^a f(y,\omega)=\tau_p(X,Y) \tag{5.18}$$

ここで

$$\tau_p(X,Y)=\sum_{|\alpha|+|a|=p+1,\ |a|\le n}(x-y)^\alpha(\theta-\omega)^a\int_0^1 dt\,\frac{1}{p!}(1-t)^p\partial_x^\alpha\partial_\theta^a f(y+t(x-y),\omega+t(\theta-\omega)). \tag{5.19}$$

証明. 以下の等式

$$\begin{aligned}&\int_0^1 dt\,\frac{(1-t)^p}{p!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{p+1}f(y+t(x-y),\omega+t(\theta-\omega))\\&\quad=\sum_{|\alpha|+|a|=p+1}(x-y)^\alpha(\theta-\omega)^a\int_0^1 dt\,\frac{1}{p!}(1-t)^p\partial_x^\alpha\partial_\theta^a f(y+t(x-y),\omega+t(\theta-\omega)).\end{aligned}$$

を用い、左辺で部分積分をすれば式 (5.19) が従う。□

============ メモ ============

幸い 6 名程の諸君が聴講してくれている。