スーパー解析学の基礎　第5回講義内容 – 08-11.07　　井上淳

1　非可換解析学の必然性とは、そしてそのご利益は？

2　Dirac 方程式と Weyl 方程式

3　スーパー数とスーパー空間

4　スーパー空間上の線形代数

4.1　スーパー空間上の行列環

4.2　スーパー跡、スーパー行列式

補題 4.1 V と W を奇変数を要素とするそれぞれ、$m \times n,\ n \times m$ 正方行列とする。そのとき、
(1) $\mathrm{tr}\,(VW)^k = -\,\mathrm{tr}\,(WV)^k$ *for any* $k = 1, 2, \cdots$.
(2) $\det(\mathbb{I}_m + VW) = \det(\mathbb{I}_n + WV)^{-1}$.

定義 4.1 $M = \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}\,[m|n : \mathfrak{C}]$ に対し、そのスーパートレース

$$\mathrm{str}\ M = \mathrm{tr}\ A - (-1)^{p(M)}\,\mathrm{tr}\ B$$

と定める。

命題 4.1 *(a)* $M, N \in \mathrm{Mat}\,[m|n : \mathfrak{C}]$ が $p(M) + p(N) \equiv 0 \bmod 2$ なるとき、

$$\mathrm{str}\,(M + N) = \mathrm{str}\ M + \mathrm{str}\ N.$$

(b) M を $(m+n) \times (r+s)$、 N を $(r+s) \times (m+n)$-行列とする。すると、

$$\mathrm{str}\,(MN) = (-1)^{p(M)p(N)}\,\mathrm{str}\,(NM).$$

定義 4.2 スーパー行列 M に対し、$\det B_{\mathrm{B}} \neq 0$ のとき

$$\mathrm{Mat}\,[m|n : \mathfrak{C}] \ni M \to \mathrm{sdet}\ M = (\det(A - CB^{-1}D))(\det B)^{-1} \in \mathfrak{C}$$

と定義し、M のスーパー行列式とか *Berezinian* と呼ぶ。

系 4.1 $\det B_{\mathrm{B}} \neq 0$ であり sdet $M \neq 0$ ならば、$\det A_{\mathrm{B}} \neq 0$ である。

比較 4.1 要素が偶のブロック行列

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & \mathbb{I}_n \end{pmatrix},$$

をとる。このとき、

$$\det A = \det(AM) = \det \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \cdot \det A_{22}.$$

さて上で定義されたスーパー行列式の性質を調べよう：

補題 4.2 *(1)* 行列 $L \in \mathrm{Mat}_{\mathrm{ev}}[\ell : \mathfrak{C}_{\mathrm{ev}}]$ のどの 2 つの行列成分の積もゼロとすると、

$$(\mathbb{I}_\ell + L)^{-1} = \mathbb{I}_\ell - L, \quad \det(\mathbb{I}_\ell + L) = 1 + \mathrm{tr}\ L.$$

(2) 偶スーパー行列 $M \in \mathrm{Mat}_{\mathrm{ev}}[m|n : \mathfrak{C}]$ のどの 2 つの行列成分の積もゼロとすると、

$$\mathrm{sdet}\,(\mathbb{I}_{m+n} + M) = 1 + \mathrm{str}\ M.$$

証明：(1) まず

$$(\mathbb{I}_\ell + L)^{-1} = \mathbb{I}_\ell - L + L^2 - L^3 + \cdots \quad \text{かつ} \quad \det(e^L) = e^{\mathrm{tr}\ L},$$

を注意し、仮定より望みの結果はすぐ従う。
(2) スーパー行列 $M = \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}$ をどの 2 つの行列成分の積もゼロとなるものとすると、$C(\mathbb{I}_n + B)^{-1}D = 0$ かつ $\mathrm{tr}\ A\,\mathrm{tr}\ B = 0$ となり、

$$\begin{aligned} \mathrm{sdet}\,(\mathbb{I}_{m+n} + M) &= \det(\mathbb{I}_m + A - C(\mathbb{I}_n + B)^{-1}D)\det(\mathbb{I}_n + B)^{-1} \\ &= \det(\mathbb{I}_m + A)\det(\mathbb{I}_n - B) = 1 + \mathrm{tr}\ A - \mathrm{tr}\ B = 1 + \mathrm{str}\ M. \end{aligned}$$ □

定理 4.1 $M, N \in \mathrm{Mat}\,[m|n : \mathfrak{C}]$ とする。

(1) sdet の乗法性：

$$\mathrm{sdet}\,(MN) = \mathrm{sdet}\ M \cdot \mathrm{sdet}\ N. \tag{4.1}$$

(2) str と sdet は行列不変量である。即ち、N が可逆だとすると

$$\mathrm{str}\ M = (-1)^{p(M)+p(N)}\,\mathrm{str}\,(NMN^{-1}), \quad \mathrm{sdet}\ M = \mathrm{sdet}\,(NMN^{-1}). \tag{4.2}$$

証明 (due to Leites). [講義ではここは割愛し、Liouville の定理のスーパー版の系としての証明を与えた]

(1) [Step 1]: $\mathcal{G}_+$, $\mathcal{G}_0$ と $\mathcal{G}_-$ を以下のように定めた $\mathrm{GL}[m|n:\mathfrak{C}]$ の部分群とする：

$$\mathcal{G}_+ = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & C \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{G}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{G}_- = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ D & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \right\}.$$

すると、$M_+ \in \mathcal{G}_+$, $M_0 \in \mathcal{G}_0$ と $M_- \in \mathcal{G}_-$ として $M = M_+ M_0 M_-$ と表示される。即ち、任意の $M \in \mathrm{GL}[m|n:\mathfrak{C}]$ に対し

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & CB^{-1} \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - CB^{-1}D & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ B^{-1}D & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \quad \text{if } \det B_{\mathrm{B}} \neq 0. \tag{4.3}$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & C \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & C' \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & C + C' \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix},$$

に注意し、E としてただ一つの零でない奇の行列成分をもつ「基本行列」を導入しておく。

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & E \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix}.$$

[Step 2]: $M \in \mathcal{G}_+$ 或は $M \in \mathcal{G}_0$ に対し $\mathrm{sdet}\,(MN) = \mathrm{sdet}\ M \cdot \mathrm{sdet}\ N$ となる。また、$N \in \mathcal{G}_0$ 或は $N \in \mathcal{G}_-$ に対しても同様である。

$\because$) 例えば、

$$M = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & C' \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_+ \quad N = \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}$$

とするとき

$$\begin{aligned} \mathrm{sdet}\,(MN) &= \mathrm{sdet} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & C' \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} = \mathrm{sdet} \begin{bmatrix} A + C'D & C + C'B \\ D & B \end{bmatrix} \\ &= \det(A + C'D - (C + C'B)B^{-1}D)(\det B)^{-1} = \det(A - CB^{-1}D)(\det B)^{-1} \\ &= \mathrm{sdet}\ M \cdot \mathrm{sdet}\ N. \ \ (\mathrm{sdet}\ N = \det(A - CB^{-1}D)(\det B)^{-1},\ \mathrm{sdet}\ M = 1) \end{aligned}$$

演習問題 4.1 他の場合についても証明せよ。

[Step 3]: N を任意の「基本行列」で

$$N = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & E \\ 0 & \mathbb{I}_n \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_+.$$

なるとき、$\mathrm{sdet}\,(MN) = \mathrm{sdet}\ M \cdot \mathrm{sdet}\ N$ となる。

$\because$) Step 1 と Step 2 より N を「基本行列」とするとき

$$\mathrm{sdet}\,(MN) = \mathrm{sdet}\,(M_+(M_0M_-N)) = \mathrm{sdet}\ M_+\cdot \mathrm{sdet}\,(M_0(M_-N))) = \mathrm{sdet}\ M_0\cdot \mathrm{sdet}\,(M_-N),$$
$$\mathrm{sdet}\ M\cdot \mathrm{sdet}\ N = \mathrm{sdet}\ M_0\cdot \mathrm{sdet}\ M_-\cdot \mathrm{sdet}\ N,$$

が従うので、

$$\mathrm{sdet}\,(M_-N) = \mathrm{sdet}\ M_-\cdot \mathrm{sdet}\ N = 1$$

を示せば良い。定義より

$$\mathrm{sdet}\begin{bmatrix}\mathbb{I}_m & 0\\ D & \mathbb{I}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{I}_m & E\\ 0 & \mathbb{I}_n\end{bmatrix} = \mathrm{sdet}\begin{bmatrix}\mathbb{I}_m & E\\ D & \mathbb{I}_n + DE\end{bmatrix} = \det(1-E(1+DE)^{-1}D)\det(1+DE)^{-1}.$$

E はただ一つの零でない奇の行列成分を持つので、行列 E, DE, $E(1+DE)^{-1}D$ のどの二つの積も零となる。前に述べた補題 4.2 より $(1+DE)^{-1} = 1-DE$ かつ $E\cdot DE = 0$ であり、

$$\mathrm{sdet}\,(M_-N) = \det(1-ED)(\det(1+DE))^{-1} = (1-\mathrm{tr}\,(ED))(1+\mathrm{tr}\,(DE))^{-1}.$$

更に補題 4.1 より $\mathrm{tr}\,(DE) = -\,\mathrm{tr}\,(ED)$ だから

$$\mathrm{sdet}\,(M_-N) = 1 = \mathrm{sdet}\ M_-\cdot \mathrm{sdet}\ N.$$

[Step 4]: 次に

$$\mathcal{G} = \left\{N \in \mathrm{GL}[m|n:\mathfrak{R}] \mid \mathrm{sdet}\,(MN) = \mathrm{sdet}\ M\cdot \mathrm{sdet}\ N \quad \text{for any} \quad M \in \mathrm{GL}[m|n:\mathfrak{R}]\right\}$$

とおく。$N_1, N_2 \in \mathcal{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{sdet}\,(M\cdot N_1N_2) &= \mathrm{sdet}\,((MN_1)N_2) = \mathrm{sdet}\,(MN_1)\cdot \mathrm{sdet}\ N_2\\ &= \mathrm{sdet}\ M\cdot \mathrm{sdet}\ N_1\cdot \mathrm{sdet}\ N_2 = \mathrm{sdet}\ M\cdot \mathrm{sdet}\,(N_1N_2),\end{aligned} \tag{4.4}$$

となるので、$\mathcal{G}$ は群をなす。Steps 2 と 3 より、$\mathcal{G}$ は $\mathcal{G}_-$ と $\mathcal{G}_0$、及び「基本行列」$N \in \mathcal{G}_+$ を含む。一方 Step1 より、$\mathrm{GL}[m|n:\mathfrak{C}]$ はこれらの行列で生成されているので、$\mathcal{G} = \mathrm{GL}[m|n:\mathfrak{C}]$、即ち $\mathrm{sdet}\,(MN) = \mathrm{sdet}\ M\cdot \mathrm{sdet}\ N$ となる。

(2) スーパー行列 N, M を与えられたとする。$p(MN^{-1}) = p(M) + p(N^{-1}) \mod 2$ かつ $0 = p(NN^{-1}) = p(N) + p(N^{-1}) \mod 2$ より $p(N)p(MN^{-1}) = p(N) + p(M) \mod 2$ となるので、式 (4.4) を用いて

$$\mathrm{str}\,(NMN^{-1}) = (-1)^{p(N)p(MN^{-1})}\,\mathrm{str}\,(MN^{-1}N) = (-1)^{p(N)+p(M)}\,\mathrm{str}\ M.$$

式 (4.4) を用い、$\mathrm{sdet}\,(MN) = \mathrm{sdet}\,(NM)$ で、これより $\mathrm{sdet}\,(NMN^{-1}) = \mathrm{sdet}\,(N^{-1}NM) = \mathrm{sdet}\ M$. □

注意：スーパー行列式において、ブロック A とブロック B の役割は全く異なる。実際、

$$M = \begin{bmatrix}A & C\\ D & B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbb{I}_m & 0\\ DA^{-1} & \mathbb{I}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & B-DA^{-1}C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{I}_m & A^{-1}C\\ 0 & \mathbb{I}_n\end{bmatrix} \quad \text{if } \det A_{\mathrm{B}} \neq 0. \tag{4.5}$$

という分解を用い、上の定理を用いると

$$\mathrm{sdet}\ M = \det A \cdot (\det(B - DA^{-1}C))^{-1}$$

となる。

命題 4.2 スーパー行列 $M = \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}\,[m|n : \mathfrak{C}]$ が可逆ならば $\mathrm{sdet}\ M \neq 0$ である。更に、もし A が可逆ならば

$$(\mathrm{sdet}\ M)^{-1} = \det(B - DA^{-1}C) \cdot (\det A)^{-1}. \tag{4.6}$$

補題 4.3 スーパー行列 $M = \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}\,[m|n : \mathfrak{C}]$ を可逆で $\det A \cdot \det B \neq 0$ なるものとする。このとき

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{C} \\ \tilde{D} & \tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} (A - CB^{-1}D)^{-1} & -A^{-1}C(B - DA^{-1}C)^{-1} \\ -B^{-1}D(A - CB^{-1}D)^{-1} & (B - DA^{-1}C)^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\mathbb{I}_m - A^{-1}CB^{-1}D)^{-1}A^{-1} & -(\mathbb{I}_m - A^{-1}CB^{-1}D)^{-1}A^{-1}CB^{-1} \\ -(\mathbb{I}_n - B^{-1}DA^{-1}C)^{-1}B^{-1}DA^{-1} & (\mathbb{I}_n - B^{-1}DA^{-1}C)^{-1}B^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A^{-1}(\mathbb{I}_m - CB^{-1}DA^{-1})^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}(\mathbb{I}_n - DA^{-1}CB^{-1})^{-1} \\ -B^{-1}DA^{-1}(\mathbb{I}_m - CB^{-1}DA^{-1})^{-1} & B^{-1}(\mathbb{I}_n - DA^{-1}CB^{-1})^{-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

が成立する。更に

$$\begin{aligned}
\mathrm{sdet}\ \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} &= (\det A)(\det B)^{-1} \det(\mathbb{I}_m - A^{-1}CB^{-1}D) \\
&= (\det A)(\det B)^{-1} \det(\mathbb{I}_m - CB^{-1}DA^{-1}) = (\det \tilde{A})^{-1}(\det B)^{-1} \\
&= (\det A)(\det B)^{-1} \det(\mathbb{I}_n - B^{-1}DA^{-1}C) \\
&= (\det A)(\det B)^{-1} \det(\mathbb{I}_n - DA^{-1}CB^{-1}) = (\det A)(\det \tilde{B}).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

証明：式 (4.8) に表われる逆行列の存在は以下の分解により保証される。

$$\begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - CB^{-1}D & 0 \\ 0 & B - DA^{-1}C \end{bmatrix}.$$

実際、上式左辺は可逆行列の積だから可逆であり、右辺のそれぞれの対角ブロックは可逆である。 □

以下で、スーパー行列式の乗法性の別証明を与えよう：

定理 4.2 (Liouville's theorem) 実変数 t に対し $M(t) \in \mathrm{Mat}\,[m|n : \mathfrak{C}]$ が与えられ、

$$\frac{d}{dt}X(t) = M(t)X(t), \quad X(0) = \mathbb{I}_{m+n}. \tag{4.9}$$

を満たすとする。すると $X(t) \in \mathrm{GL}[m|n:\mathfrak{C}]$ であり、

$$\mathrm{sdet}\ X(t) = \exp\{\int_0^t ds\, \mathrm{str}\ M(s)\}. \tag{4.10}$$

証明 (due to Berezin). $\tilde{X}(t)$ を

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}(t) = -\tilde{X}(t)M(t), \quad \tilde{X}(0) = \mathbb{I}_{m+n}.$$

の解とする。すると、

$$\frac{d}{dt}(\tilde{X}(t)X(t)) = 0 \quad \text{with} \quad \tilde{X}(0)X(0) = \mathbb{I}_{m+n},$$

となるので、$\tilde{X}(t)X(t) = \mathbb{I}_{m+n}$ であり、これより $X(t) \in \mathrm{GL}[m|n:\mathfrak{C}]$ となる。

ここで

$$M(t) = \begin{bmatrix} A(t) & C(t) \\ D(t) & B(t) \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} X_{11}(t) & X_{12}(t) \\ X_{21}(t) & X_{22}(t) \end{bmatrix}$$

と書き、$Y(t) = X_{11}(t) - X_{12}(t)X_{22}^{-1}(t)X_{21}(t)$、$Z = X_{22}^{-1}(t)$ とおくと、式 (4.9) を用いた単純な計算[1]で

$$\frac{d}{dt}Y = (A - X_{12}X_{22}^{-1}D)Y, \quad \frac{d}{dt}Z = -Z(DX_{12}X_{22}^{-1} + B).$$

上記の方程式に表われるすべての成分は偶なので、古典的な Liouville の定理を適用でき、

$$\frac{d}{dt}\det Y = \mathrm{tr}\,(A - X_{12}X_{22}^{-1}D)\det Y, \quad \frac{d}{dt}\det Z = -\,\mathrm{tr}\,(DX_{12}X_{22}^{-1} + B)\det Z.$$

また $\mathrm{tr}\,(A - X_{12}X_{22}^{-1}D) = \mathrm{tr}\,(A + DX_{12}X_{22}^{-1})$ なので、

$$\frac{d}{dt}\mathrm{sdet}\ X = \frac{d}{dt}(\det Y \det Z) = \mathrm{tr}\,(A-B)\det Y \det Z = \mathrm{str}\ M\, \mathrm{sdet}\ X \quad \text{with} \quad \mathrm{sdet}\ X(0) = 1$$

となる。これが求める結果であった。 □

系 4.2 $M, N \in \mathrm{Mat}_{\,\mathrm{ev}}[m|n:\mathfrak{C}]$ に対し

$$\begin{aligned} &\mathrm{sdet}\,(MN) = \mathrm{sdet}\ M \cdot \mathrm{sdet}\ N, \\ &\exp(\mathrm{str}\ M) = \mathrm{sdet}\,(\exp M). \end{aligned} \tag{4.11}$$

証明：(1) $M, N \in \mathrm{Mat}_{\,\mathrm{ev}}[m|n:\mathfrak{C}]$ に対して $X(t) = (1-t)\mathbb{I}_{m+n} + tM$ and $Y(t) = (1-t)\mathbb{I}_{m+n} + tN$ とおくとき、$X(t)$ と $Y(t)$ は t に関し微分可能かつ t の高々一点を除いて可逆である。そこで

$$A(t) = \frac{dX(t)}{dt}X(t)^{-1}, \quad B(t) = \frac{dX(t)}{dt}Y(t)^{-1}$$

[1] $X_{12}^{-1}X_{12} = \mathbb{I}_n$ を微分しを用いて式 (4.9) の 2 番目の式が求まる。再度式 (4.9) を用い 1 番目の式が求まる

と定義できる。すると

$$\frac{d}{dt}(X(t)Y(t)) = (A(t)+B_1(t))X(t)Y(t) \quad \text{where} \quad B_1(t) = X(t)B(t)X(t)^{-1}.$$

上の定理を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{sdet}\,(MN) = \mathrm{sdet}\,(X(1)Y(1)) = \exp\{\int_0^1 ds\,\mathrm{str}\,(A(t)+B_1(t))\} = \exp\{\int_0^1 ds(\mathrm{str}\ A(t) + \mathrm{str}\ B(t))\} \\ = \mathrm{sdet}\ X(1)\cdot \mathrm{sdet}\ Y(1) = \mathrm{sdet}\ M\cdot \mathrm{sdet}\ N.\end{aligned}$$

(2) 上の定理で、$M(t) = M$, $X(t) = e^{tM}$ とし $t = 1$ として、望みの結果を得る。 □

比較 4.2 ("Encyclopaedia of Mathematics" ed. M. Hazewinkel より) *Liouville*の公式 *(or Liouville-Ostrogradski*の公式*)* とは微分方程式系の解の *Wronskian* と線形常微分方程式の係数との関連を述べたものである。

$(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ で *1* 階線形斉次微分方程式

$$x' = A(t)x, \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.12}$$

の解で、係数行列（作用素）$A(t)$ は区間 I で連続とし、

$$W(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = W(t)$$

はこの方程式系の解の *Wronskian* とする。このとき *Liouville-Ostrogradski* の公式は

$$\frac{d}{dt}W(t) = W(t)\cdot \mathrm{tr}\ A(t), \qquad t \in I \tag{4.13}$$

或は別の表現で

$$W(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = W(x_1(\underline{t}), \cdots, x_n(\underline{t}))\cdot \exp\{\int_{\underline{t}}^t ds\ \mathrm{tr}\ A(s)\}, \quad t, \underline{t} \in I \tag{4.14}$$

と与えられる。ここで $\mathrm{tr}\ A(t)$ は作用素 $A(t)$ のトレースである。*Liouville-Ostrogradski*の公式は方程式系 (4.12) の基本解系（或は *Cauchy* 作用素）$X(t, \underline{t})$ を用いれば

$$\det X(t, \underline{t}) = \exp\{\int_{\underline{t}}^t ds\ \mathrm{tr}\ A(s)\}, \quad t, \underline{t} \in I \tag{4.15}$$

と書ける。ところで方程式 (4.15) *(or* (4.14) *)* の幾何学的意味は、写像 $X(t, \underline{t}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ によって、どんな領域の向き付き体積でも $\exp\{\int_{\underline{t}}^t ds\ \mathrm{tr}\ A(s)\}$ 倍されるということである。*Liouville-Ostrogradski*の公式 (4.13) は非線形常微分方程式系に拡張できるが、ここでは割愛する。

4.3　対角化

定義 4.3 スーパー行列 $M \in \mathrm{Mat}\,[m|n:\mathfrak{C}]$ は、M_{B} を $\mathrm{Mat}\,[m+n:\mathbb{C}]$ の元と見なしてそのすべての固有値が互いに異なるとき、*generic* という。

定理 4.3 (Berezin) $M \in \mathrm{Mat}\,[m|n:\mathfrak{C}]$ を *generic* とするとき、行列 $X \in \mathrm{GL}[m|n:\mathfrak{C}]$ で $E = XMX^{-1}$ が対角成分のみ、即ち、$E = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \cdots, \lambda_{m+n})$ になるものが存在する。

証明：等式 $EX = XM$ を次数に関して分解すると、

$$(EX)^{[k]} = \sum_{j=0}^{k} E^{[j]} X^{[k-j]} = \sum_{j=0}^{k} X^{[j]} M^{[k-j]} = (XM)^{[k]} \tag{4.16}$$

となる。この式より、$X^{[k]}$ と $E^{[k]}$ を定めていけばよい。

$k = 0$ に対して

$$E^{[0]} X^{[0]} = X^{[0]} M^{[0]} \tag{4.17}$$

となる。仮定より線形代数の基本知識より、$X^{[0]}_{11}$、$X^{[0]}_{22}$ 及び $E^{[0]}_{11} = (\lambda^{[0]}_1, \cdots, \lambda^{[0]}_m)$、$E^{[0]}_{22} = (\lambda^{[0]}_{m+1}, \cdots, \lambda^{[0]}_{m+n})$ があって

$$X^{[0]}_{11} A_{\mathrm{B}} = E^{[0]}_{11} X^{[0]}_{11} \quad \text{かつ} \quad X^{[0]}_{22} B_{\mathrm{B}} = E^{[0]}_{22} X^{[0]}_{22}$$

となる。そこで、

$$X^{[0]} = \begin{pmatrix} X^{[0]}_{11} & 0 \\ 0 & X^{[0]}_{22} \end{pmatrix}, \; E^{[0]} = \begin{pmatrix} E^{[0]}_{11} & 0 \\ 0 & E^{[0]}_{22} \end{pmatrix},$$

とおくと式 (4.17) を満たすようにできる。

$0 \le j \le k-1$ に対して $X^{[j]}$ と $E^{[j]}$ があって式 (4.16) を満たすものと仮定する。k に対して式 (4.16) の右から $(X^{[0]})^{-1}$ を掛けると、

$$E^{[0]} X^{[k]} (X^{[0]})^{-1} - X^{[k]} (X^{[0]})^{-1} E^{[0]} + E^{[k]} = K^{[k]} \tag{4.18}$$

となる。ここで

$$K^{[k]} = (\sum_{j=0}^{k-1} X^{[j]} M^{[k-j]})(X^{[0]})^{-1} - (\sum_{j=1}^{k-1} E^{[j]} X^{[k-j]})(X^{[0]})^{-1}.$$

帰納法の仮定より行列 $K^{[k]}$ は既知で $\mathrm{Mat}\,[m|n:\mathfrak{C}]$ に属している。式 (4.18) より、

$$(\lambda^{[0]}_i - \lambda^{[0]}_j)(X^{[k]}(X^{[0]})^{-1})_{ij} + \lambda^{[k]}_i \delta_{ij} = (K^{[k]})_{ij}. \tag{4.19}$$

$\lambda^{[0]}_i \ne \lambda^{[0]}_j$ であり、

$$\begin{cases} \lambda^{[k]}_i = (K^{[k]})_{ii}, \\ (X^{[k]}(X^{[0]})^{-1})_{ij} = \dfrac{(K^{[k]})_{ij}}{\lambda^{[0]}_i - \lambda^{[0]}_j}, \qquad \text{for} \quad i \ne j \end{cases}$$

よりこの式は一意的に解ける。即ち、任意の $j \ge 0$ に対し $X^{[j]}$ と $E^{[j]}$ が定義できる。$X^{[0]}$ は可逆なので $X \in \mathrm{GL}[m|n:\mathfrak{C}]$ であり、結局 X と E が望みのように定義された。□

比較 4.3 可換環上の $n \times n$ 行列 M が対角化可能であるための必要十分条件は最小多項式 $\varphi_M(x)$ が重根を持たないことである。

問題 4.1 スーパー行列 M が対角化可能である必要十分条件を求めよ[2]。

4.3.1 簡単な例

スーパー行列

$$Q = \begin{pmatrix} x_1 & \theta_1 \\ \theta_2 & ix_2 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad x_1,\, x_2 \in \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}},\ \theta_1,\, \theta_2 \in \mathfrak{R}_{\mathrm{od}},$$

は $\mathfrak{R}^{1|1}$ から $\mathfrak{R}^{1|1}$ へ、或は $\mathfrak{R}_{\mathrm{od}} \times i\mathfrak{R}_{\mathrm{ev}}$ から $\mathfrak{R}_{\mathrm{od}} \times i\mathfrak{R}_{\mathrm{ev}}$ への写像を定める。このスーパー行列は Random Matrix Theory における Efetov の計算方法で出現する。

K.B. Efetov, *Supersymmetry and theory of disordered metals*, Advances in Physics 32(1983) pp. 53-127.

A. Inoue and Y. Nomura, *Some refinements of Wigner's semi-circle law for Gaussian random matrices using superanalysis*, Asymptotic Analysis 23(2000), pp. 329-375.

Q の可逆性 ：与えられた V に対し

$$QY = V \quad \text{with} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}^{1|1},$$

即ち、

$$x_1 y_1 + \theta_1 \omega_2 = v_1,\ \theta_2 y_1 + ix_2 \omega_2 = \rho_2.$$

となる Y を求める。もし $(x_1 x_2)_{\mathrm{B}} \neq 0$ ならば、直ちに、

$$y_1 = \frac{ix_2 v_1 - \theta_1 \rho_2}{D_-},\ \omega_2 = \frac{x_1 \rho_2 - \theta_2 v_1}{D_+} \quad \text{with} \quad D_\pm = ix_1 x_2 \pm \theta_1 \theta_2.$$

同様に、

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ iy_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}_{\mathrm{od}} \times i\mathfrak{R}_{\mathrm{ev}},\ \tilde{V} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{R}_{\mathrm{od}} \times \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}},$$

に対して $Q\tilde{Y} = \tilde{V}$ なるものは

$$\omega_1 = \frac{ix_2 \rho_1 - \theta_1 v_2}{D_-},\ iy_2 = \frac{x_1 v_2 - \theta_2 \rho_1}{D_+}.$$

[2] 講義を聴いていてくれている吉野君からの提案

さて上で求めた量を sdet Q と関係づける。

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 & \omega_1 \\ \omega_2 & iy_2 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad QY=YQ=I_2.$$

とおくと $QY=I_2$ となるので

$$x_1y_1+\theta_1\omega_2=1, \quad x_1\omega_1+iy_2\theta_1=0,$$
$$\theta_2y_1+ix_2\omega_2=0, \quad \theta_2\omega_1-x_2y_2=1$$

となる。故に、

$$Y=\begin{pmatrix} \frac{ix_2}{D_-} & -\frac{\theta_1}{D_-} \\ -\frac{\theta_2}{D_+} & \frac{x_1}{D_+} \end{pmatrix}=(\text{sdet } Q)^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{ix_2} & \frac{\theta_1}{x_2^2} \\ \frac{\theta_2}{x_2^2} & -\frac{x_1x_2+2i\theta_1\theta_2}{x_2^3} \end{pmatrix},$$

とおくと $YQ=I_2$ となる。ここで

$$\text{sdet } Q=\det(x_1-\theta_1(ix_2)^{-1}\theta_2)(\det(ix_2))^{-1}=\frac{ix_1x_2-\theta_1\theta_2}{(ix_2)^2},\ (\text{sdet } Q)^{-1}=\frac{ix_1x_2+\theta_1\theta_2}{x_1^2}$$

を用いた。故に、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}=\frac{D_+}{x_1^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{ix_2} & \frac{-\theta_1}{(ix_2)^2} \\ \frac{-\theta_2}{(ix_2)^2} & \frac{ix_1x_2-2\theta_1\theta_2}{(ix_2)^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}=\frac{D_+}{x_1^2}\begin{pmatrix} \frac{ix_2v_1-\theta_1\rho_2}{(ix_2)^2} \\ \frac{-ix_2\theta_2v_1+(ix_1x_2-2\theta_1\theta_2)\rho_2}{(ix_2)^3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ iy_2 \end{pmatrix}=\frac{D_+}{x_1^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{ix_2} & \frac{-\theta_1}{(ix_2)^2} \\ \frac{-\theta_2}{(ix_2)^2} & \frac{ix_1x_2-2\theta_1\theta_2}{(ix_2)^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\frac{D_+}{x_1^2}\begin{pmatrix} \frac{ix_2\rho_1-i\theta_1v_2}{(ix_2)^2} \\ \frac{-ix_2\theta_2\rho_1+(ix_1x_2-2\theta_1\theta_2)v_2}{(ix_2)^3} \end{pmatrix}.$$

Eigenvalues :

$$QU=\lambda U \quad \text{with} \quad U=\begin{pmatrix} u \\ \omega \end{pmatrix}, \quad u\in\mathfrak{R}_{\text{ev}},\ \omega\in\mathfrak{R}_{\text{od}},\ \lambda\in\mathfrak{R}_{\text{ev}}.$$

とすると

$$(x_1-\lambda)u+\theta_1\omega=0,\ \theta_2u+(ix_2-\lambda)\omega=0.$$

そこで

$$D_+(\lambda)=(x_1-\lambda)(ix_2-\lambda)+\theta_1\theta_2,\ D_-(\lambda)=(x_1-\lambda)(ix_2-\lambda)-\theta_1\theta_2,$$

とおくと

$$D_-(\lambda)u=0,\ D_+(\lambda)\omega=0.$$

$u_{\text{B}}\neq 0$ で上の式を満たすものを見いだすために、λ として

$$D_-(\lambda)=\lambda^2-(x_1+ix_2)\lambda+ix_1x_2-\theta_1\theta_2=0$$

を満たすものを取る。すると

$$\lambda=x_1+\frac{\theta_1\theta_2}{x_1-ix_2} \quad (\text{or } \lambda=ix_2-\tfrac{\theta_1\theta_2}{x_1-ix_2}, \text{ but this is not fitted because } \notin\mathfrak{R}_{\text{ev}})$$

かつ

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\theta_2}{x_1 - ix_2} \end{pmatrix}, \quad QU = (x_1 + \frac{\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2})U.$$

同様に、$\tilde{\lambda} \in i\mathfrak{R}_{\mathrm{ev}}$ と $\tilde{U} \in \mathfrak{R}_{\mathrm{od}} \times \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}}$ で $Q\tilde{U} = \tilde{\lambda}\tilde{U}$ なるものを探すと

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \frac{-\theta_1}{x_1 - ix_2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q\tilde{U} = (ix_2 + \frac{\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2})\tilde{U}.$$

故に

$$Q \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\theta_1}{x_1 - ix_2} \\ \frac{\theta_2}{x_1 - ix_2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\theta_1}{x_1 - ix_2} \\ \frac{\theta_2}{x_1 - ix_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + \frac{\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2} & 0 \\ 0 & ix_2 + \frac{\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2} \end{pmatrix}.$$

Diagonalization ：変数変換

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2},\ y_2 = x_2 - \dfrac{i\theta_1\theta_2}{x_1 - ix_2}, \\ \rho_1 = \dfrac{\theta_1}{x_1 - ix_2},\ \rho_2 = -\dfrac{\theta_2}{x_1 - ix_2}, \end{cases} \tag{4.20}$$

或は

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \rho_1\rho_2(y_1 - iy_2),\ x_2 = y_2 - i\rho_1\rho_2(y_1 - iy_2), \\ \theta_1 = \rho_1(y_1 - iy_2),\ \theta_2 = -\rho_2(y_1 - iy_2), \end{cases} \tag{4.21}$$

を導入し、

$$G = \begin{pmatrix} 1 + 2^{-1}\rho_1\rho_2 & \rho_1 \\ \rho_2 & 1 - 2^{-1}\rho_1\rho_2 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + 2^{-1}\rho_1\rho_2 & -\rho_1 \\ -\rho_2 & 1 - 2^{-1}\rho_1\rho_2 \end{pmatrix}.$$

とすると

$$GQG^{-1} = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & iy_2 \end{pmatrix}, \quad GQ^2G^{-1} = \begin{pmatrix} y_1^2 & 0 \\ 0 & -y_2^2 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

と Q の対角化ができる。このとき

$$\mathrm{str}\ Q = x_1 - ix_2 = y_1 - iy_2 = \mathrm{str}\ GQG^{-1}, \quad \text{かつ}$$
$$\mathrm{str}\ Q^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2\theta_1\theta_2 = y_1^2 + y_2^2 = \mathrm{str}\,(GQG^{-1})^2.$$

4.4 Gauss 型積分と Pfaffian

ここではまだ奇変数に関する積分を定義していないが、行列式や Pfaffian が出現する積分計算を挙げておこう：

定義 4.4 すべての成分が偶の $n \times n$ 歪対称行列 $\tilde{B} = (\tilde{B}_{jk})$ に対し、B の *Pfaffian* $\mathrm{Pf}\,(\tilde{B})$ を

$$\mathrm{Pf}\,(\tilde{B}) = \frac{1}{(n/2)!} \sum_{\rho \in \wp_n} \mathrm{sgn}\,(\rho) \tilde{B}_{\rho(1)\,\rho(2)} \cdots \tilde{B}_{\rho(n-1)\,\rho(n)} \tag{4.23}$$

と定める。ここで、$\wp_n$ は次数 n の置換群で、$\mathrm{sgn}\,(\rho)$ は $\rho \in \wp_n$ の符号である。

注意：n を偶数、$A = (A_{ij})$ は歪対称行列 (i.e. $A_{ii} = 0,\ A_{ij} = -A_{ji}$) ならばグラスマン数でのガウス積分

$$\int d\theta\ \exp(-\frac{1}{2} A_{ij} \theta_i \theta_j)$$

は $\mathrm{Pfaffian}(A)$ に等しい。更に $\mathrm{Pf}\,(A)^2 = \det(A)$ が成立する。

奇変数に関する「積分」は Berezin により導入されたもの

$$\int d\theta\, \theta = 1, \quad \int d\theta\, 1 = 0 \quad (\text{Berezin 積分})$$

で、「測度という概念を用いない積分」で外積代数における内部積[3]

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \rfloor dz_k = \delta_{jk}$$

により定まるものである。少し後で詳しく説明するが以下のようになる。

定義 4.5 偶スーパー行列 $M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$ は以下の条件を満たすとき正定値と言われる:

(gs.1) A は、体部分 A_{B} が正定値の対称行列なる、正則な対称行列である。

(gs.2) B は正則な歪対称行列である。

(gs.3) C と D は ${}^tC + D = 0$ を満たす。

上の偶スーパー行列 M に対応する 2 次形式を

$$\begin{aligned} \langle X, MX \rangle &= {}^tXMX \\ &= \sum_{j,k=1}^{m} x_j A_{jk} x_k + \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} x_j C_{j\,m+s} \theta_s + \sum_{k=1}^{m} \sum_{t=1}^{n} \theta_t D_{m+t\,k} x_k + \sum_{s,t=1}^{n} \theta_s B_{m+s\,m+t} \theta_t. \end{aligned}$$

とする。

補題 4.4 M を正定値な偶スーパー行列とするとき、

$$\begin{aligned} G(\lambda, M) &= \int_{\mathfrak{R}^{m|n}} dX e^{-\lambda^{-1} 2^{-1} \langle X, MX \rangle} \quad \textit{for} \quad \lambda > 0 \\ &= \begin{cases} 0 & \textit{if } n \textit{ is odd}, \\ (2\pi\lambda)^{m/2} (2\lambda)^{-n/2} (\det\ A)^{-1/2}\, \mathrm{Pf}\,(B - DA^{-1}C) & \textit{if } n \textit{ is even}. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.24}$$

[3]前回の講義録参照

比較 4.4 H を正定値実対称行列とするとき

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\lambda x\cdot Hx/2}dx = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{m/2}(\det H)^{-1/2}. \tag{4.25}$$

H を実行列とするとき

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\cdot Hx/2}dx = (2\pi i)^{m/2}(\det H)^{-1/2}. \tag{4.26}$$

============ メモ ============

6 名程の諸君が聴講してくれている。