

1 非可換解析学の必然性とは、そしてそのご利益は？

2 Dirac 方程式と Weyl 方程式

3 スーパー数とスーパー空間

3.1 スーパー数

3.2 スーパー空間

3.3 Rogers による可算個の Grassmann 生成元の実現

4 スーパー空間上の線形代数

以下では

F.A. Berezin(ed. A.A. Kirillov), Introduction to Superanalysis, D.Reidel Publ. Company, 1987.

B.S. deWitt, Supermanifolds, London, Cambridge Univ. Press, 1984.

D.A. Leites, *Introduction to the theory of supermanifolds*, Russian Math. Surveys 35(1980), pp.1-64.

を参考にした。

注意：大概のスーパー関係の論文では、Banach-Grassmann 代数上で考え、有限個の odd 変数を取るとし、Grassmann 生成元をわざわざ導入してはいない。講義中にも話したが、例えば Rogers 流に ℓ^1 とすると $\sum_I |X_I| < \infty$ を示さなければならないが、それはほとんどチェック不能であろう。そのような状況下の論文でも、考えるベクトル空間の位相とは無関係な代数的演算の部分は、必要ならば少し修正して借用した。

4.1 スーパー空間上の行列環

定義 4.1 正方行列 M は以下の条件を満たす時スーパー行列と呼ばれ $M \in \text{Mat}((m|n) \times (r|s) : \mathbb{C})$ と書かれる：

1. M は $(m+n) \times (r+s)$ 行列で、 A, B, C と D をその行列要素を \mathfrak{C} とする、それぞれ $m \times r, n \times s, m \times s$ と $n \times r$ 行列を用いて、 $M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$ とブロックに分解される。

2. 以下のどちらかの条件が満たされる：

- $p(M) = 0$, that is, $p(A_{jk}) = 0 = p(B_{uv})$ and $p(C_{jv}) = 1 = p(D_{uk})$ or
- $p(M) = 1$, that is, $p(A_{jk}) = 1 = p(B_{uv})$ and $p(C_{jv}) = 0 = p(D_{uk})$.

もし $p(M) = 0$ (resp. $p(M) = 1$) ならば、行列 M は偶であるといい $\text{Mat}_{\text{ev}}((m|n) \times (r|s) : \mathfrak{C})$ (resp. 奇であることを $\text{Mat}_{\text{od}}((m|n) \times (r|s) : \mathfrak{C})$) と記す。故に、

$$\text{Mat}((m|n) \times (r|s) : \mathfrak{C}) = \text{Mat}_{\text{ev}}((m|n) \times (r|s) : \mathfrak{C}) \oplus \text{Mat}_{\text{od}}((m|n) \times (r|s) : \mathfrak{C}).$$

更に、行列 M を $M = M_B + M_S$ 、

$$M_B = \begin{cases} \begin{pmatrix} A_B & 0 \\ 0 & B_B \end{pmatrix} & \text{when } p(M) = 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & C_B \\ D_B & 0 \end{pmatrix} & \text{when } p(M) = 1 \end{cases}$$

とも分解する。 \square

$\text{Mat}_{\text{ev}}((m|n) \times (r|s) : \mathfrak{C})$ 或は $\text{Mat}_{\text{od}}((m|n) \times (r|s) : \mathfrak{C})$ での行列の和はそれぞれの成分の和と定めるが、 $\text{Mat}_{\text{ev}}((m|n) \times (r|s) : \mathfrak{C})$ と $\text{Mat}_{\text{od}}((m|n) \times (r|s) : \mathfrak{C})$ の和はどちらかが零行列でないと定義されない。

もし M が $(m+n) \times (r+s)$ 行列で N が $(r+s) \times (p+q)$ 行列ならば、その積 MN と偶奇 $p(MN)$ は

$$(MN)_{ij} = \sum_k M_{ik} N_{kj}, \quad p(MN) = p(M) + p(N) \pmod{2}$$

と定められる。更に、スーパー正方行列 $(m+n) \times (m+n)$ のなす環を $\text{Mat}[m|n : \mathfrak{C}]$ と書く。

行列の定める線形変換：ベクトルへの行列の演算の定義より

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\text{ev}}((m|n) \times (r|s) : \mathfrak{C}) \ni M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} : \mathfrak{R}^{r|s} \rightarrow \mathfrak{R}^{m|n}, \\ \text{Mat}_{\text{od}}((m|n) \times (r|s) : \mathfrak{C}) \ni M = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} : \mathfrak{R}^{r|s} \rightarrow \mathfrak{R}_{\text{od}}^m \times \mathfrak{R}_{\text{ev}}^n, \end{aligned}$$

$$\text{Mat}_{\text{od}}((n|m) \times (m|n) : \mathfrak{C}) \ni \Lambda_{n,m} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_m & 0 \end{pmatrix} : \mathfrak{R}_{\text{od}}^m \times \mathfrak{R}_{\text{ev}}^n \rightarrow \mathfrak{R}_{\text{ev}}^n \times \mathfrak{R}_{\text{od}}^m = \mathfrak{R}^{n|m}.$$

前回の講義で、 $X = \sum X_I \sigma^I$ に対し X^* を

$$X^* = \sum_{I \in \mathcal{I}} \overline{X_I \sigma^I} = \sum_{I \in \mathcal{I}} (-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}} \overline{X_I} \sigma^I$$

($X_I \in \mathbb{C}$ の複素共役を $\overline{X_I}$ とし、 $I = (i_1, \dots, i_n)$ に対して $\sigma^I = \sigma_n^{i_n} \cdots \sigma_1^{i_1}$) と定めた。

また、スーパー空間 $\mathfrak{R}^{m|n}$ の元 $X = (x, \theta) = (x_1, \dots, x_m, \theta_1, \dots, \theta_n)$ と $\Xi = (\xi, \pi) = (\xi_1, \dots, \xi_m, \pi_1, \dots, \pi_n)$ に対し、内積を

$$\langle X | \Xi \rangle_{m|n} = \sum_{j=1}^m \langle x_j | \xi_j \rangle + \sum_{k=1}^n \langle \theta_k | \pi_k \rangle \in \mathfrak{R}_{\text{ev}} \quad (4.1)$$

とし、 $\langle \cdot | \cdot \rangle_{m|n}$ を簡単に $\langle \cdot | \cdot \rangle$ とも書くことにした。

スーパー行列 M に対してその転置行列 M^t を $X = (x, \theta) \in \mathfrak{R}^{r|s}$ と $\Xi = (\xi, \omega) \in \mathfrak{R}^{m|n}$ に対して

$$\langle MX | \Xi \rangle_{m|n} = \langle X | M^t \Xi \rangle_{r|s} \quad \text{for any } M \in \text{Mat}_{\text{ev}}((m|n) \times (r|s) : \mathfrak{C})$$

と定める。より詳しくは

$$M^t = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} A^t & D^t \\ -C^t & B^t \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad M^{tttt} = M.$$

同様に、 $Z = (z, \theta) \in \mathfrak{C}^{r|s}$, $\Upsilon = (\eta, \rho) \in \mathfrak{C}^{m|n}$ に対し、 $\mathfrak{C}_Z^{m|n}$ と $\mathfrak{C}_\Upsilon^{m|n}$ の間の双対を

$$\langle Z | \Upsilon \rangle_{m|n} = \sum_{j=1}^m \langle z_j | \eta_j^* \rangle + \sum_{k=1}^n \langle \theta_k | \rho_k^* \rangle, \quad \text{or} \quad = \sum_{j=1}^m \langle z_j^* | \eta_j \rangle + \sum_{k=1}^n \langle \theta_k^* | \rho_k \rangle,$$

と定め、 M の双対行列 (あるいは共役行列) M^* を

$$\langle MZ | \Upsilon \rangle_{m|n} = \langle Z | M^* \Upsilon \rangle_{r|s}.$$

とする。故に、

$$M^* = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A^* & D^* \\ -C^* & B^* \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad M^{****} = M.$$

補題 4.1 $M \in \text{Mat}((m|n) \times (r|s) : \mathfrak{C})$ 及び $N \in \text{Mat}((r|s) \times (p|q) : \mathfrak{C})$ に対して

$$(MN)^t = N^t M^t, \quad (MN)^* = N^* M^*, \quad (M^t)^t = \Lambda M \Lambda \quad \text{where} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_n \end{pmatrix}.$$

$M \in \text{Mat}[m|n : \mathfrak{C}]$ が偶、即ち $M \in \text{Mat}_{\text{ev}}[m|n : \mathfrak{C}]$ ならば、 M は $\mathfrak{R}^{m|n}$ の元に線形に作用する。この線形作用素を T_M と記し、スーパー空間 $\mathfrak{R}^{m|n}$ 上の線形変換と呼び、 M を線形変換 T_M の表現行列と呼ぶ。

命題 4.1 $M \in \text{Mat}_{\text{ev}}[m|n : \mathfrak{C}]$ とし、 $\det M_B \neq 0$ と仮定する。すると、任意の元 $Y \in \mathfrak{R}^{m|n}$ に対し

$$T_M X = Y \quad (4.2)$$

は一意的な解 $X \in \mathfrak{R}^{m|n}$ が存在し、それを $X = M^{-1}Y$ と書く。

証明： M_B は逆行列 M_B^{-1} を持つので式 (4.2) は

$$X + N_S X = Y', \quad Y' = M_B^{-1}Y$$

となる。ここで、 $N_S = M_B^{-1}M_S$ と書いたが、 $j \geq 0$ に対し $N_S X^{[j]} \in \sum_{k \geq j+1} \mathfrak{C}^{[k]}$ となることに注意する。次数を用いて分解すると、

$$X^{[j]} = Y'^{[j]} - (N_S X^{(j-1)})^{[j]} \quad \text{for } j = 1, 2, \dots$$

となる。ここで、 $X^{(0)} = X^{[0]} = Y'^{[0]}$ より、 $j \geq 1$ に対し $X^{[j]}$ は $X^{(j-1)}$ から帰納法で求まる。□

演習問題 4.1 $M \in \text{Mat}_{\text{od}}((m|n) \times (n|m) : \mathfrak{C})$ のときはどうか？

少し一般化した命題が Leites の p.15 にある。

命題 4.2 \mathfrak{C} に対し (身体) 写像 $\pi : \mathfrak{C} \rightarrow \tilde{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}/(\mathfrak{C}_{\text{od}})$ の行列環への拡張も

$$\pi : \text{Mat}_n(\mathfrak{C}) \rightarrow \text{Mat}_n(\tilde{\mathfrak{C}})$$

と書く。このとき、 $X \in \text{Mat}_n(\mathfrak{C})$ が可逆なる必要十分条件は $\pi(X)$ が可逆である。ここで、 $(\mathfrak{C}_{\text{od}})$ は \mathfrak{C}_{od} で生成されるイデアルである。

定義 4.2 上の命題より、 M_B が可逆、即ち $\det A_B \det B_B \neq 0$ のとき、行列 $M \in \text{Mat}_{\text{ev}}[m|n : \mathfrak{C}]$ は可逆とか正則といい、そのとき $M \in \text{GL}_{\text{ev}}[m|n : \mathfrak{C}]$ と記す。

4.2 スーパー跡、スーパー行列式

補題 4.2 V と W を奇変数を要素とするそれぞれ、 $m \times n$, $n \times m$ 正方行列とする。そのとき、

$$(1) \text{tr}(VW)^k = -\text{tr}(WV)^k \text{ for any } k = 1, 2, \dots$$

$$(2) \det(\mathbb{I}_m + VW) = \det(\mathbb{I}_n + WV)^{-1}.$$

証明 : $V = (v_{ij}), W = (w_{jk})$ かつ $v_{ij}, w_{jk} \in \mathfrak{C}_{\text{od}}$ とする。

$$\begin{aligned} \text{tr}(VW)^k &= \sum v_{ij_1} w_{j_1 j_2} v_{j_2 j_3} \cdots v_{j_{k-1} j_k} w_{j_k i} \\ &= - \sum w_{j_1 j_2} v_{j_2 j_3} \cdots v_{j_{k-1} j_k} w_{j_k i} v_{ij_1} = - \text{tr}(WV)^k. \end{aligned}$$

上より $\text{tr}((WV)^{\ell-1}WV) = - \text{tr}(V(WV)^{\ell-1}W)$ となり、

$$\begin{aligned} \log \det(\mathbb{I}_n + WV) &= \text{tr} \log(\mathbb{I}_n + WV) = \sum_{\ell} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell} \text{tr}((WV)^{\ell-1}WV) \\ &= \sum_{\ell} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell} [- \text{tr}(V(WV)^{\ell-1}W)] = - \sum_{\ell} \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell} \text{tr}(VW)^{\ell} \\ &= - \log \det(\mathbb{I}_m + VW). \quad \square \end{aligned}$$

比較 4.1 もし $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(m \times n : \mathfrak{C}_{\text{ev}}), B = (b_{jk}) \in \text{Mat}(n \times m : \mathfrak{C}_{\text{ev}})$ ならば

- (1) $\text{tr}(AB)^k = \text{tr}(BA)^k,$
- (2) $\det(\mathbb{I}_m + AB) = \det(\mathbb{I}_n + BA).$

定義 4.3 $M = \begin{bmatrix} A & C \\ D & B \end{bmatrix} \in \text{Mat}[m|n : \mathfrak{C}]$ に対し、そのスーパートレース

$$\text{str } M = \text{tr } A - (-1)^{p(M)} \text{tr } B$$

と定める。

上の補題 4.2 より直ちに

命題 4.3 (a) $M, N \in \text{Mat}[m|n : \mathfrak{C}]$ が $p(M) + p(N) \equiv 0 \pmod{2}$ なるとき、

$$\text{str}(M + N) = \text{str } M + \text{str } N.$$

(b) M を $(m+n) \times (r+s)$ 、 N を $(r+s) \times (m+n)$ -行列とする。すると、

$$\text{str}(MN) = (-1)^{p(M)p(N)} \text{str}(NM).$$

定義 4.4 $B = (B_{jk})$ をその要素が \mathfrak{C}_{ev} にある $(\ell \times \ell)$ -正方行列とする (これを $B \in \text{Mat}[\ell : \mathfrak{C}_{\text{ev}}]$ と記す)。 \mathfrak{C}_{ev} は可換環だから、行列式 $\det B$ は複素数の場合と同様に定まる:

$$\det B = \sum_{\rho \in \varphi_{\ell}} \text{sgn}(\rho) B_{1\rho(1)} \cdots B_{\ell\rho(\ell)}.$$

このとき

$$\det(AB) = \det A \det B, \quad \det(\exp A) = \exp(\text{tr } A) \quad \text{for } A, B \in \text{Mat}[\ell : \mathfrak{C}_{\text{ev}}]. \quad (4.3)$$

定義 4.5 スーパー行列 M に対し、 $\det B_B \neq 0$ のとき

$$\text{sdet } M = (\det(A - CB^{-1}D))(\det B)^{-1}$$

と定義し、 M のスーパー行列式とか *Berezinian* と呼ぶ。

比較 4.2 要素が偶のブロック行列

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_m & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & \mathbb{I}_n \end{pmatrix},$$

をとる。このとき、

$$\det A = \det AM = \det \begin{pmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) \det A_{22}.$$

系 4.1 $\det B_B \neq 0$ であり $\text{sdet } M \neq 0$ ならば、 $\det A_B \neq 0$ である。

演習問題 4.2 上の系を証明せよ。

注意 4.1 ここで行列式を非可換環の上で定義することに関する *Dyson*¹の結果を引用しよう：

定理 4.1 (Dyson) R を単位元を持つ零因子無しの環としよう。サイズ $n (> 1)$ の (正方) 行列環 A 上に以下の公理を満たす写像 $D : A \rightarrow R$ があるとする：

Axiom 1. $a \in A$ に対し $D(a) = 0$ となるのは、零でない $w \in W$ で $aw = 0$ を満たすものがあるときに限る。ここで、 W は要素を R にもつ縦ベクトル全体である。

Axiom 2. $D(a)D(b) = D(ab)$.

Axiom 3. a の要素を a_{ij} $i, j = 1, \dots, n$ とし、 b と c についても同様とする。ある列番号 k があって

$$\begin{cases} a_{ij} = b_{ij} = c_{ij}, & i \neq k \\ a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}, & i = k, \end{cases}$$

となっているならば

$$D(a) + D(b) = D(c).$$

このような写像 D が存在するならば R は可換である。 □

この定理は、非可換環に要素を持つ行列に対し、上の公理 1, 2, 3 を満たす行列式を定義することは不可能であることを示している。その一方で *Dyson* は、そのような環、例えば 4 元数環の上でも上の公理のうちの 2 つを満たすような行列のクラスを考えることはできるとし、更に行列式に関する *Moore* の観点について詳しい説明をしている。

=====

メモ：休みが入ったためか、受講者が 8 名となってしまったが、ともかく聴いてくれる人がいることは有り難いことである。

¹F.J. Dyson, *Quaternion determinants*, Helvetica Physica Acta 45(1972), pp. 289-302.