スーパー解析学の基礎　第3回講義内容 – 08-10.17　　井上淳

1　非可換解析学の必然性とは、そしてそのご利益は？

2　Dirac 方程式と Weyl 方程式

2.1　Dirac 方程式と Weyl 方程式：その由来

2.2　特性曲線の方法と Hamiltonian 経路積分法

2.3　2×2 行列の分解 – 行列の演算とは何か

3　スーパー数とスーパー空間

3.1　スーパー数

Grassmann 関係式 $\sigma_j\sigma_k+\sigma_k\sigma_j=0$ を満たす 可算個の文字 $\{\sigma_j\}_{j=1}^{\infty}$ を用意 し、

$$\mathfrak{C}=\{X=\sum_{I\in\mathcal{I}}X_I\sigma^I \bigm| X_I\in\mathbb{C}\}$$

とし、更に

$$\begin{cases}\mathfrak{C}^{(0)}=\mathfrak{C}^{[0]}=\mathbb{C},\\ \mathfrak{C}^{(j)}=\left\{X=\displaystyle\sum_{|I|\le j}X_I\sigma^I\right\}\quad \text{かつ}\\ \mathfrak{C}^{[j]}=\left\{X=\displaystyle\sum_{|I|=j}X_I\sigma^I\right\}=\mathfrak{C}^{(j)}/\mathfrak{C}^{(j-1)},\end{cases}$$

とおく。

ここで添字集合 $\mathcal{I}$ は

$$\mathcal{I}=\{I=(i_k)\in\{0,1\}^{\mathbf{N}} \bigm| |I|=\sum_k i_k<\infty\},$$
$$\sigma^I=\sigma_1^{i_1}\sigma_2^{i_2}\cdots,\ I=(i_1,i_2,\cdots),\ \tilde{0}=(0,0,\cdots).$$

注意：「何々を用意する」とはどういうことか？「文字」の構成法は？上の「和」はどういう意味付けができるのか？これらについては、しばらく後に述べる。

ここでの目標は、以下の命題を証明し、この $\mathfrak{C}$ が $\mathbb{C}$ の代替物となり得ることを "保証" することである。

命題 3.1 (Inoue and Maeda[1]**)** $\mathfrak{C}$ は複素数体 $\mathbb{C}$ 上の無限次元の *Fréchet-Grassmann* 代数をなす。即ち、結合則、分配則を満たす次数付きの非可換な環で *Fréchet* 位相を持つ。

注意：S. Matsumoto and K. Kakazu[2], Y. Choquet-Bruhat[3], P. Bryant[4] 等が、上の命題の原型を与えているが、$\mathfrak{C}$、あるいは後に述べる $\mathfrak{R}$ を「基礎体」としてその上に解析学を構築しようと試みてはいないようである。

3.1.1 数列空間とその位相

Köthe[5]に従って、以下のように数列空間を定義する：

$$\begin{cases} \phi = \left\{\mathfrak{x} = (x_k) = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \;\middle|\; x_k \in \mathbb{C} \text{ and } x_k = 0 \text{ effm } k\right\}, \\ \omega = \left\{\mathfrak{u} = (u_k) = (u_1, u_2, \cdots, u_k, \cdots) \;\middle|\; u_k \in \mathbb{C}\right\}. \end{cases}$$

ここで（effm=except for finitely many）であり、$\phi \subset \ell^p \subset \omega (1 \leq p \leq \infty)$ 等は良く知られている。

更に、ϕ を含む任意の数列空間 $\mathcal{X}$ に対し、空間 $\mathcal{X}^\times$ を

$$\mathcal{X}^\times = \left\{\mathfrak{u} = (u_k) \;\middle|\; \sum_k |u_k||x_k| < \infty \quad \text{for any} \quad \mathfrak{x} = (x_k) \in \mathcal{X}\right\},$$

と定めると、

$$\phi^\times = \omega \quad \text{かつ} \quad \omega^\times = \phi$$

となる。

$\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}^\times$ に（正規な）位相をセミノルム達

$$p_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{x}) = \sum_k |u_k||x_k| = p_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{u}) \quad \text{for } \mathfrak{x} \in \mathcal{X} \text{ and } \mathfrak{u} \in \mathcal{X}^\times \tag{3.1}$$

により入れる。特に、ϕ の中で、$\mathfrak{x}^{(n)}$ が $\mathfrak{x}$ に収束する、即ち、任意の $\mathfrak{u} \in \omega$ に対して $n \to \infty$ とするとき $p_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{x}^{(n)} - \mathfrak{x}) \to 0$ とは、任意の $\epsilon > 0$ に対して L と n_0 があって

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad x_k^{(n)} = x_k = 0 \quad \text{for} \quad k > L \quad \text{when} \quad n \geq n_0, \quad \text{かつ} \\ \text{(ii)} \quad |x_k^{(n)} - x_k| < \epsilon \quad \text{for} \quad k \leq L \quad \text{when} \quad n \geq n_0. \end{cases}$$

[1]A. Inoue & Y. Maeda:*Foundations of calculus on super Euclidean space $\mathfrak{R}^{m|n}$ based on a Fréchet-Grassmann algebra*, Kodai Math.J.14(1991), pp. 72-112.

[2]S. Matsumoto and K. Kakazu, *A note on topology of supermanifolds*, J.Math.Phys.27(1986), pp. 2690-2692.

[3]Y. Choquet-Bruhat, *Supergravities and Kaluza-Klein theories*, in "Topological properties and global structure of space-time" (eds. P. Bergmann and V. de Sabbata), New York, Plenum Press, 1986, pp. 31-48.

[4]P. Bryant, *DeWitt supermanifolds and infinite dimensional ground rings*,J.London Math.Soc.39(1989), pp. 347-368.

[5]G. Köthe:Topological Linear Spaces I, Berlin-New York-Tokyo-Heidelberg, Springer-Verlag, 1969.

同様に、ω の中で $\mathfrak{u}^{(n)}$ が $\mathfrak{u}$ に収束する、即ち、任意の $\mathfrak{x} \in \phi$ に対して $n \to \infty$ とするとき $p_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{u}^{(n)} - \mathfrak{u}) \to 0$ とは、任意の $\epsilon > 0$ と各 k に対して $n_0 = n_0(\epsilon, k)$ があって

$$|u_k^{(n)} - u_k| < \epsilon \quad \text{when} \quad n \geq n_0.$$

$\mathfrak{e}_j = (\overbrace{0, \cdots, 0, 1}^{j}, 0, \cdots) \in \omega$ とおき、可算個のセミノルム系 $\{p_k(\mathfrak{u})\}_{k \in \mathbb{N}}$ を $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \cdots) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \mathfrak{e}_j \in \omega$ に対して $p_k(\mathfrak{u}) = |u_k|$ と定める。それらの定める位相と上に述べたの位相が同等になることより ω が Fréchet 空間となることは明らかであろう。

さて、添字集合 $\mathcal{I}$ から自然数全体 $\mathbb{N}$ への同型写像 (diadic-decomposition) を以下のように与える：

$$r : \mathcal{I} \ni I = (i_k) \to r(I) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} 2^k i_k \in \mathbb{N} \quad \text{where} \quad i_k = 0 \text{ or } 1. \tag{3.2}$$

上で定めた $r(I)$ を用いて

$$T: \ \sigma^I \to \mathfrak{e}_{r(I)} \quad \text{for} \quad I = (i_k) \in \mathcal{I}$$

とし、この関係を線形性を用いて拡張し、

$$T(X) = \sum x_{r(I)} \mathfrak{e}_{r(I)} \in \omega \quad \text{for} \quad X = \sum_{|I| \leq j} X_I \sigma^I \in \mathfrak{C}_{(j)} \tag{3.3}$$

と定義する。例えば、最初の数項は以下のようになる：

$$\sum x_{r(I)} \mathfrak{e}_{r(I)} = (X_{(0,0,0,\cdots)}, X_{(1,0,0,\cdots)}, X_{(0,1,0,\cdots)}, X_{(1,1,0,\cdots)}, X_{(0,0,1,\cdots)}, X_{(1,0,1,\cdots)}, X_{(0,1,1,\cdots)}, \cdots).$$

ところで、$j \neq k$ ならば $T(\mathfrak{C}^{[j]})$ と $T(\mathfrak{C}^{[k]})$ は ω で互いに交わらないので、

$$\sum_{j=0}^{\infty} T(\mathfrak{C}^{[j]}) = \omega \tag{3.4}$$

と見なせる[6]。これは最初に述べた $\mathfrak{C}$ の定義での和の意味を与え、更に

$$\mathfrak{C} = \oplus_{j=0}^{\infty} \mathfrak{C}^{[j]}, \quad \text{that is,} \quad X = \sum_{j=0}^{\infty} X^{[j]} \quad \text{with} \quad X^{[j]} = \sum_{|I|=j} X_I \sigma^I \tag{3.5}$$

と記述する正当性を与える。ここで、$X^{[j]}$ は $X \in \mathfrak{C}$ の j-次成分と呼ばれる。更に、

$$\begin{cases} \mathfrak{C}^{(j)} \subset \mathfrak{C}^{(k)} \quad \text{for} \quad j \leq k, \\ \mathfrak{C} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \mathfrak{C}^{[j]} \quad \text{with} \quad \cap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{C}^{(j)} = \mathbb{C}, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$\mathfrak{C}^{[j]} \cdot \mathfrak{C}^{[k]} \subset \mathfrak{C}^{[j+k]} \quad \text{かつ} \quad \mathfrak{C}^{(j)} \cdot \mathfrak{C}^{(k)} \subset \mathfrak{C}^{(j+k)}. \tag{3.7}$$

[6]質問はベクトル空間の和集合と直和との差についてであった。例えば、$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^3$ の部分空間とすれば $\mathbb{R}^2 \cup \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ であるが $\mathbb{R}^2 \dot{+} \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^5$ そこで $\bigcup_{j=0}^{\infty} T(\mathfrak{C}^{(j)}) = \omega$ とも書いてあったが削除した。

3.1.2 位相

$\mathfrak{C}$からωへの写像Tを連続にする最弱位相を$\mathfrak{C}$に入れる。即ち、$\mathfrak{C}$で$X=\sum_{I\in\mathcal{I}}X_I\sigma^I\to 0$とは、各$I\in\mathcal{I}$に対し$\mathrm{proj}_I(X)=X_I$とするとき、任意の$I\in\mathcal{I}$に対し$\mathrm{proj}_I(X)\to 0$なることである。この位相は、$\mathfrak{C}$に距離$\mathrm{dist}(X,Y)=\mathrm{dist}(X-Y)$を入れたものと同等である。ここで

$$\mathrm{dist}(X)=\sum_{I\in\mathcal{I}}\frac{1}{2^{r(I)}}\frac{|\,\mathrm{proj}_I(X)|}{1+|\,\mathrm{proj}_I(X)|}\quad\text{for any}\quad X\in\mathfrak{C}. \tag{3.8}$$

例：$f(\ell)\to\infty$の場合にも$X^{(\ell)}=f(\ell)\sigma_1\cdots\sigma_\ell\to 0$ in $\mathfrak{C}$である。実際、$\mathrm{dist}(X^{(\ell)})\le 2^{-2^\ell+1}$.

参考：数列空間ωは1変数Xの形式的冪級数環[7]とも見なされることは明らかであろう。 即ち、

$$\mathbb{C}[[X]]=\{u=u(X)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nX^n\mid u_n\in\mathbb{C}\}\cong\{u=(u_0,u_1,\cdots,u_n,\cdots)\mid u_n\in\mathbb{C}\}$$

に和、積、スカラー倍の演算を通常のように入れる。更に、零の基本近傍系として

$$V_{m,n}=\{u=\sum_{p=0}^{\infty}u_pX^p\in\mathbb{C}[[X]]\mid |u_p|\le\frac{1}{m}\ (\forall p\le n)\}$$

をとると、これはFréchet空間をなす。(多変数の形式的冪級数環でも同様)

3.1.3 代数的演算：和と積

任意の$X,Y\in\mathfrak{C}$に対し和

$$X+Y=\sum_{j=0}^{\infty}(X+Y)^{[j]}\quad\text{with}\quad(X+Y)^{[j]}=X^{[j]}+Y^{[j]}\quad\text{for}\quad j\ge 0 \tag{3.9}$$

と積

$$XY=\sum_{j=0}^{\infty}(XY)^{[j]}\quad\text{where}\quad(XY)^{[j]}=\sum_{k=0}^{j}X^{[j-k]}Y^{[k]}=\sum_{|I|=j}(XY)_I\sigma^I \tag{3.10}$$

を定める。ここで、$(XY)_I=\sum_{I=J+K}(-1)^{\tau(I;J,K)}X_JY_K\in\mathbb{C}$とする。この右辺は任意の集合$I\in\mathcal{I}$に対して$J$, Kで$I=J\dot{+}K$ ($i.e.\ I=J\cup K,\ J\cap K=\emptyset$)となる分解は有限個しかないのでwell-definedである。ここで指数$\tau(I;J,K)$あるいはもっと一般に$\tau(I;J_1,\cdots,J_k)$は

$$(-1)^{\tau(I;J_1,\cdots,J_k)}\sigma^{J_1}\cdots\sigma^{J_k}=\sigma^I\quad\text{with}\quad I=J_1\dot{+}J_2\dot{+}\cdots\dot{+}J_k \tag{3.11}$$

と定める。但し、混乱が起こらない限りこの分解は詳しく書かず指数も単に$(-1)^{\tau(*)}$と書くことにする。

[7]See, p.25 or p.91 of F. Treves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, 1967

演習問題 3.1 $I = J + K$ を満たす集合 $I,\ J,\ K$ に対し

$$(-1)^{|J||K|}(-1)^{\tau(I;J,K)} = (-1)^{\tau(I;K,J)}$$

となることを示せ。

補題 3.1 上のように定めた積は $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ から $\mathfrak{C}$ への連続写像を与える。

証明. $I \in \mathcal{I}$ に対し $J \subset I$ を満たす $J \in \mathcal{I}$ は $2^{|I|}$ 個しかない。また、

$$|(XY)_I| \le \sum_{I=J+K} |X_J||Y_K| \le 2^{r(I)}(\max_{J\subset I}|X_J|)(\max_{K\subset I}|Y_K|) \quad \text{for any} \quad X, Y \in \mathfrak{C}. \qquad \square$$

偶奇　: $\mathfrak{C}$ での偶奇 (parity) を

$$p(X) = \begin{cases} 0 & \text{if } X = \sum_{I\in\mathcal{I},|I|=\mathrm{ev}} X_I\sigma^I, \\ 1 & \text{if } X = \sum_{I\in\mathcal{I},|I|=\mathrm{od}} X_I\sigma^I, \\ \text{undefined} & \text{if otherwise.} \end{cases}$$

$X \in \mathfrak{C}$ は $p(X) = 0$ 或は $= 1$ のとき斉次 (homogeneous) と言い、以下の様に定める。

$$\begin{cases} \mathfrak{C}_{\mathrm{ev}} = \{X \in \mathfrak{C} \,|\, p(X) = 0\}, \\ \mathfrak{C}_{\mathrm{od}} = \{X \in \mathfrak{C} \,|\, p(X) = 1\}, \\ \mathfrak{C} \cong \mathfrak{C}_{\mathrm{ev}} \oplus \mathfrak{C}_{\mathrm{od}} \cong \mathfrak{C}_{\mathrm{ev}} \times \mathfrak{C}_{\mathrm{od}}. \end{cases}$$

重要な注意　（ここは講義で言い忘れた）: 任意の $X \in \mathfrak{C}_{\mathrm{od}}$ に対して $X^2 = 0$ となるので $\mathfrak{C}$ は「体」ではない。しかし、

(i) 任意の $Y \in \mathfrak{C}_{\mathrm{od}}$ に対して $XY = 0$ となる X は $X = 0$ である。更に、

(ii) X の次数に関する分解 $X = \sum_{j=0}^{\infty} X^{[j]}$ は一意的である。

このような性質は Grassmann 生成元が無限個でないと成立しない。例えば、Grassmann 生成元の数が有限な n とする。このとき、零ではない "数" $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ に、$\{\sigma_j\}_{j=1}^n$ で生成される如何なる奇変数を掛けても 0 となるので (i) は成立しない。

補題 3.2 (可逆元)　元 $X \in \mathfrak{C}$ が $X_{\mathrm{B}} \ne 0$ なるものとする。このとき、$XY = 1 = YX$ を満たす一意的な元 $Y \in \mathfrak{C}$ が存在する。

証明 : そのような $Y \in \mathfrak{C}$ が存在したとして、それぞれを $X = X_{\mathrm{B}} + X_{\mathrm{S}}$、$Y = Y_{\mathrm{B}} + Y_{\mathrm{S}}$ と分解する。すると

$$X_{\mathrm{B}}Y_{\mathrm{B}} = 1, \quad X_{\mathrm{B}}Y_{\mathrm{S}} + X_{\mathrm{S}}Y_{\mathrm{B}} + X_{\mathrm{S}}Y_{\mathrm{S}} = 0$$

を満たす。$X_{\mathrm{S}}=\sum_{|I|>0}X_I\sigma^I=\sum_{k=1}^\infty X^{[k]}$、$Y_{\mathrm{S}}=\sum_{|J|>0}Y_J\sigma^J=\sum_{k=1}^\infty Y^{[k]}$ と分解すると、上の第 2 式の次数 ℓ 部分は

$$X_{\mathrm{B}}Y^{[\ell]}+X^{[\ell]}Y_{\mathrm{B}}+\sum_{k=1}^{\ell}X^{[\ell-k]}Y^{[k]}=0$$

となる。ここで $\ell=1$ のとき $X^{[1]}=\sum_{|I|=1}X_I\sigma^I$ とすると

$$Y^{[1]}=-X_{\mathrm{B}}^{-1}X^{[1]}X_{\mathrm{B}}^{-1}=-\sum_{|I|=1}X_{\mathrm{B}}^{-2}X_I\sigma^I.$$

一般の ℓ に対しては帰納法で $X^{[k]}$ $(1\le k\le\ell)$ から $Y^{[\ell]}$ が定まる。$Y=\sum_{\ell=0}^\infty Y^{[\ell]}$ が $XY=1=YX$ を満たすことは明らかである。

また、$X_{\mathrm{B}}=0$ ならば $XY=1$ 或は $YX=1$ を満たす Y は存在しない。 □

（実）スーパー数 ：(実) スーパー数を

$$\mathfrak{R}=\pi_{\mathrm{B}}^{-1}(\mathbb{R})\cap\mathfrak{C}=\left\{X=\sum_{I\in\mathcal{I}}X_I\sigma^I \mid\ X_{\mathrm{B}}\in\mathbb{R}\ \text{ and }\ X_I\in\mathbb{C}\quad\text{for}\quad|I|\neq0\right\}\tag{3.12}$$

と定め、更に

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_{\mathrm{ev}}\oplus\mathfrak{R}_{\mathrm{od}},\quad \mathfrak{R}=\oplus_{j=0}^\infty\mathfrak{R}^{[j]}\tag{3.13}$$

とおく。$\mathfrak{C}$ の場合と同じように、

$$\begin{cases}\mathfrak{R}=\{X\in\mathfrak{C}\mid\pi_{\mathrm{B}}X\in\mathbb{R}\},\qquad \mathfrak{R}^{[j]}=\mathfrak{R}\cap\mathfrak{C}^{[j]},\\ \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}}=\mathfrak{R}\cap\mathfrak{C}_{\mathrm{ev}},\quad \mathfrak{R}_{\mathrm{od}}=\mathfrak{R}\cap\mathfrak{C}_{\mathrm{od}}=\mathfrak{C}_{\mathrm{od}},\\ \mathfrak{R}\cong\mathfrak{R}_{\mathrm{ev}}\oplus\mathfrak{R}_{\mathrm{od}}\cong\mathfrak{R}_{\mathrm{ev}}\times\mathfrak{R}_{\mathrm{od}}\end{cases}\tag{3.14}$$

とおく。ここで身体写像 π_{B} を $\pi_{\mathrm{B}}X=\mathrm{proj}_{\mathrm{B}}(X)=X_{\tilde{0}}=X_{\mathrm{B}}$ とした。

（複素）共役 ：$X_I\in\mathbb{C}$ の複素共役を $\overline{X_I}$ とし、$I=(i_1,\cdots,i_n)$ に対して $\overline{\sigma^I}=\sigma_n^{i_n}\cdots\sigma_1^{i_1}$ と定め、

$$X^*=\sum_{I\in\mathcal{I}}\overline{X_I}\,\overline{\sigma^I}=\sum_{I\in\mathcal{I}}(-1)^{\frac{|I|(|I|-1)}{2}}\overline{X_I}\sigma^I\tag{3.15}$$

と演算 * を定義する。すると、

補題 3.3 $X,Y\in\mathfrak{C}$ 及び $\lambda\in\mathbb{C}$ に対し

$$(X^*)^*=X,\quad (XY)^*=Y^*X^*,\quad (\lambda X)^*=\bar{\lambda}X^*.\tag{3.16}$$

演習問題 3.2 以下を示せ：$\overline{\sigma^I\sigma^J}=\overline{\sigma^J}\,\overline{\sigma^I}$. *(Hint: Use* (**??**)*)*

3.2 スーパー空間

身体写像 (body map) と呼ばれる射影 π_{B} を

$$\pi_{\mathrm{B}}X = \mathrm{proj}_{\tilde{0}}(X) = X_{\tilde{0}} = X_{\mathrm{B}} \quad \text{for any} \quad X \in \mathfrak{C},$$

とし

$$\begin{cases} \mathfrak{R} = \{X \in \mathfrak{C} \,|\, \pi_{\mathrm{B}}X \in \mathbb{R}\}, \\ \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathrm{ev}}, \quad \mathfrak{R}_{\mathrm{od}} = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{C}_{\mathrm{od}} = \mathfrak{C}_{\mathrm{od}}, \\ \mathfrak{R} \cong \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}} \oplus \mathfrak{R}_{\mathrm{od}} \cong \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}} \times \mathfrak{R}_{\mathrm{od}} \end{cases}$$

と定める。実スーパー空間 $\mathfrak{R}^{m|n}$ を

$$\mathfrak{R}^{m|n} = \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}}^m \times \mathfrak{R}_{\mathrm{od}}^n \ni X = (x, \theta)$$

とする。ここで

$$x = (x_1, \cdots, x_m), \quad x_j = \sum_{I, |I| = \mathrm{even}} x_I \sigma^I \in \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}},$$

$$x = x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{S}} = (x_{1,\mathrm{B}} + x_{1,\mathrm{S}}, \cdots, x_{m,\mathrm{B}} + x_{m,\mathrm{S}}) \in \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}}^m \quad \text{with}$$
$$x_{j,\mathrm{B}} = \pi_{\mathrm{B}} x_j = x_{j,\tilde{0}}, \ \ x_{j,\mathrm{S}} = \sum_{|I| = \mathrm{even} \geq 2} x_{j,I} \sigma^I,$$

かつ

$$\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_n), \quad \theta_k = \sum_{|I| = \mathrm{odd}} \theta_{k,I} \sigma^I \in \mathfrak{R}_{\mathrm{od}}.$$

また、$X_{\mathrm{S}} = X - X_{\mathrm{B}}$ は X の魂体部分 (soul part) と呼ばれる。

双対スーパー空間: スーパー空間 $\mathfrak{R}^{m|n}$ の点を $X = (x, \theta) = (x_1, \cdots, x_m, \theta_1, \cdots, \theta_n)$ と強調するときは $\mathfrak{R}_X^{m|n}$ と書く。点を $\Xi = (\xi, \pi) = (\xi_1, \cdots, \xi_m, \pi_1, \cdots, \pi_n)$ とする別のスーパー空間 $\mathfrak{R}_\Xi^{m|n}$ をとり、

$$\langle X | \Xi \rangle_{m|n} = \sum_{j=1}^m \langle x_j | \xi_j \rangle + \sum_{k=1}^n \langle \theta_k | \pi_k \rangle \in \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}} \tag{3.17}$$

によって互いに双対とする。上の $\langle \cdot | \cdot \rangle_{m|n}$ を簡単に $\langle \cdot | \cdot \rangle$ とも書く。

3.3 Rogers[8]による可算個の Grassmann 生成元の実現

長さが高々L の整数ベクトルの集合 $\mathcal{M}_L$ を

$$\mathcal{M}_L = \{\mu \mid \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k), \, 1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_k \leq L, \ \mu_j \in \mathbb{Z}\}, \ \ \mathcal{M}_\infty = \cup_{L=1}^\infty \mathcal{M}_L$$

[8]A. Rogers, *A global theory of supermanifolds*, J.Math.Phys. 21(1980), pp. 1352-1365.

で定める。尚、$\emptyset \in \mathcal{M}_L$ とし、また、任意の $j \in \mathbb{N}$ に対し $(j) \in \mathcal{M}_\infty$ と見なす[9]。

各 $r \in \mathbb{N}$ に対し、数ベクトル $\mu \in \mathcal{M}_\infty$ を 2 進展開

$$r = \frac{1}{2}(2^{\mu_1} + 2^{\mu_2} + \cdots + 2^{\mu_k}) \longleftrightarrow \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k) \tag{3.18}$$

で定める。逆に、各 $\mu \in \mathcal{M}_\infty$ に対し e_μ を $e_\mu = (\overbrace{0, \cdots, 0, 1}^{r}, 0, \cdots)$ と対応させる。ここで、r と μ は式 (??) で関係している。

上の対応を用いて、任意の数列 $w = (w_1, w_2, \cdots) \in \omega$ は $w = \sum_\mu w_\mu e_\mu$ と表示される。$e_\mu(\mu \in \mathcal{M}_\infty)$ の間に積を

$$\begin{cases} e_\mu e_\emptyset = e_\emptyset e_\mu = e_\mu \quad \text{for} \quad \mu \in \mathcal{M}_\infty, \\ e_{(i)} e_{(j)} = -e_{(j)} e_{(i)} \quad \text{for} \quad i, j \in \mathbb{N}, \\ e_\mu = e_{(\mu_1)} e_{(\mu_2)} \cdots e_{(\mu_k)} \quad \text{where} \quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k) \end{cases} \tag{3.19}$$

で定義する。即ち、

$$e_{(j)} \leftrightarrow \sigma_j,\ e_{(1)}e_{(2)} = e_{(1,2)} \leftrightarrow \sigma_1\sigma_2 = \sigma^I,\ I_{(1,2)} = (1, 1, 0, \cdots),$$

$$e_\mu = e_{(\mu_1)}e_{(\mu_2)} \cdots e_{(\mu_k)} \leftrightarrow \sigma_{\mu_1}\sigma_{\mu_2}\cdots\sigma_{\mu_k} = \sigma^I,\ I_\mu = (\underbrace{\overbrace{0, \cdots, 0, 1}^{\mu_1}, 0, \cdots, 0, 1}_{\mu_k}, 0, \cdots).$$

として

$$w = (w_1, w_2, w_3, w_4, \cdots) = \sum_{j=1} w_j e_{(j)} \longleftrightarrow (w_{(1)}, w_{(2)}, w_{(1,2)}, w_{(3)}, \cdots) = \sum_\mu w_\mu e_\mu$$

と同一視する。そこで $\sigma_j = e_{(j)}$ とすれば $\{\sigma_j\}_{j=1}^\infty$ が求まる。

注意：まさに形式的だが、$z = (z_1, z_2, \cdots) \in \prod_{n=1}^\infty \mathbb{R}$ に対し、$e_{(j)} = dz_j$ と取り、外積 $\wedge$ で積を入れると考えれば直観的には「分かり易い」だろう。

注意：Rogers は ω ではなく ℓ^1 で考え、実 Banach-Grassmann 代数を

$$\|X\| = \sum_{I \in \mathcal{I}} |X_I| < \infty \quad \text{for } X = \textstyle\sum_{I \in \mathcal{I}} X_I \sigma^I \text{ with } X_I \in \mathbb{R}, \text{and it satisfies } \|XY\| \le \|X\|\|Y\|$$

と定義した。

命題 3.2 (Roger) *ℓ^1 に上で述べた積を定義すると、可算個の Grassmann 生成元を持つ Banach-Grassmann 代数が構成される。*

注意：多くの *super manifolds* を扱った論文では *Banach* 構造を持つ「基礎体」[10] を考えている。これは、陰関数定理が有限次元 *Euclid* 空間とほぼ同様に成立するのは *Banach*

[9] $(j) \in \mathcal{M}_\infty$ の意味を「予稿」に書いていたことを忘れ、M 君が助け舟を出してくれる、有り難い

[10] V.S. Vladimirov and I.V. Volovich, *Superanalysis I. Differential calculas*, Theor. Math. Phys. 59(1983), pp. 317-335.

空間までで、*Fréchet* 空間では成立しないからである。しかし、$\sum_{I\in\mathcal{I}}|X_I|<\infty$ なる条件は極めて強く、実例を考えるときチェック不能に思われる。

これに関して、形式的冪級数の係数決定問題とその級数の収束問題のギャップ[11]を思い出しておいて欲しい。

A　Tensor 代数、外積代数、内部積

数学の特性として、一般化して物事を述べた方が分かり易いということもある。とはいえ私には「代数」を一般化されると分からなくなるという特性があるので、せめて私にはそこそこ分かる範囲に一般化して述べることにする。

横沼健男「テンソル代数と外積代数」岩波講座基礎数学

を下敷きに簡略に記す。

A.1　Tensor 代数

定理 *A.1* k を標数 *(=characteristic)0* の体とし、$V_1, V_2, \cdots, V_n$ を有限次元 k 線形空間とする。このとき、以下の性質 $(\otimes)_1$, $(\otimes)_2$ を持つ k 線形空間 U_0 と n 重線形写像 $\iota\in\mathcal{L}(V_1,V_2,\cdots,V_n:U_0)$ が一意的に存在する。

$(\otimes)_1$ U_0 は ι の像 $\iota(V_1\times V_2\times\cdots\times V_n:U_0)$ によって生成される。

$(\otimes)_2$ 任意の $\Phi\in\mathcal{L}(V_1,V_2,\cdots,V_n:U)$ に対して $\Phi=F\circ\iota$ となる線形写像 $F:U_0\to U$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} V_1\times V_2\times\cdots\times V_n \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\Phi"'] & B \arrow[d, dotted, "F"] \\ & D \end{tikzcd}$$

定義 *A.1* 上の定理における (U_0,ι) を $V_1,V_2,\cdots,V_n$ のテンソル積といい、

$$U_0=V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_n,\quad \iota(v_1,v_2,\cdots.v_n)=v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n\ \ (v_i\in V_i),$$

と書く。

[11]正則係数を持った初期値問題に関する Cauchy-Kawalevski の定理では優級数の方法がギャップを埋めた。事の序でに、Nash の implicit functional theorem を J.Y. Schwartz, Non-linear functional analysis, Gordon and Breach, 1969 等で調べておくと良いだろう

定義 *A.2* 行列 $A = (\alpha_{ij}),\ B = (\beta_{ij})$ に対し行列

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}B & \alpha_{12}B & \cdots & \alpha_{1n}B \\ \alpha_{21}B & \cdots & \cdots & \alpha_{2n}B \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{m1}B & \alpha_{m2}B & \cdots & \alpha_{mn}B \end{pmatrix}$$

を、A 及び B のテンソル積（または *Kronecker* 積）といい $A \otimes B$ と表す。A が (m,n) 行列、B が (m',n') 行列ならば $A \otimes B$ は (mm',nn') である。

V を k 線形空間、V^* を V の双対空間とし、

$$T_q{}^p(V) = \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{p\text{-}times} \otimes \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^{q\text{-}times}$$

を (p,q) 型テンソル空間という。$T_0{}^0(V) = k$ とおく。また、$T_0{}^p(V) = T^p(V),\ T_q{}^0(V) = T_q(V)$ と書き、$T_0{}^0(V) = T^0(V) = T_0(V)$ とも表す。

注意：ここで $V \otimes V^* \equiv V^* \otimes V,\ V \otimes V^* \otimes V \otimes V \otimes V^* \equiv V^* \otimes V^* \otimes V \otimes V \otimes V$ 等と同一視している。

$(p,0)$-型テンソルを p 階反変テンソル、$(0,q)$-型テンソルを q 階共変テンソル、$T_0{}^1(V) = V$ の元を反変ベクトル、$T_1{}^0(V) = V^*$ の元を共変ベクトル、$T_0{}^0(V) = k$ の元をスカラーという。

$\mathrm{Hom}(V,V) \equiv V^* \otimes V \equiv T_1{}^1(V)$ より V の線形変換は $(1,1)$-型テンソルと見なせる。

$\mathcal{L}(V,V:k) \equiv V^* \otimes V^* = T_2{}^0(V)$ より V 上の双線形形式は 2 階の共変テンソルである。

命題 *A.1 (縮約=contraction)* 整数 $p > 0,\ q > 0$ をとりテンソル空間 $T_q{}^p(V)$ を考える。$1 \le r \le p$ かつ $1 \le s \le q$ なる任意の整数 $r,\ s$ に対し以下を満たす線形写像 $c_s{}^r : T_q{}^p(V) \to T_{q-1}{}^{p-1}(V)$ がただ一つ存在する：任意の $v_i \in V,\ \varphi_j \in V^*$ に対し

$$c_s{}^r(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_q) = \varphi_s(v_r) v_1 \otimes \cdots \otimes \check{v}_r \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \check{\varphi}_s \otimes \cdots \otimes \varphi_q.$$

注意：上で $\check{v}_r,\ \check{\varphi}_s$ はその因子を省くことを意味する。また、この写像 $c_s{}^r$ を r 番目の反変添字と s 番目の共変添字に関する縮約 *(=contraction)* という。

p 個の文字 $\{1,2,\cdots,p\}$ の置換全体の集合を $\mathfrak{S}_p$ とし、$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対する符号を $\mathrm{sgn}\ \sigma$ と書く。

命題 *A.2* *(1)* 各 $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して $T^p(V)$ の線形変換 P_σ で

$$P_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(p)} \quad (v_i \in V)$$

となるものがただ一つ存在する。
(2) $\sigma, \tau, 1 \in \mathfrak{S}_p$ に対して

$$P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}, P_1 = I$$

が成立する。

定義 *A.3* $t \in T^p(V)$ は任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して $P_\sigma(t) = t$ なるとき対称テンソルと言いその全体を $S^p(V)$ と書き、$P_\sigma(t) = (\mathrm{sgn}\ \sigma)t$ なるとき交代テンソルと言いその全体を $A^p(V)$ と書く。

$t \in S^p(V),\ t' \in S^q(V)$ に対し積を $t{\cdot}t' = \mathcal{S}_{p+q}(t \otimes t')$ と定める。

$t \in A^p(V),\ t' \in A^q(V)$ に対し外積を $t{\wedge}t' = \mathcal{A}_{p+q}(t \otimes t')$ と定める。

定義 *A.4*

$$\mathcal{S}_p = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} P_\sigma,\ \ \mathcal{A}_p = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} (\mathrm{sgn}\ \sigma)P_\sigma.$$

混乱が起こらない時は、$\mathcal{S}_p = \mathcal{S},\ \mathcal{A}_p = \mathcal{A}$ と書く。

定義 *A.5* 無限直和

$$T(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T^p(V)$$

に以下のように加法と積を導入し、テンソル代数という：

$$t = \sum_{j=0}^{\infty} t_j, t' = \sum_{j=0}^{\infty} t'_j \in T(V),\ \ t_j, t'_j \in T^j(V),\ \ \alpha \in k \Longrightarrow \begin{cases} t + t' = \sum_{j=0}^{\infty}(t_j + t'_j), \\ \alpha t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha t_j, \\ t \otimes t' = \sum_{p=0}^{\infty}\big(\sum_{r+s=p} t_r \otimes t'_s\big). \end{cases}$$

定義 *A.6*

$$S(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} S^p(V)$$

に積 $\cdot$ を以下のように定義する：

$$t \in S^p(V),\ t' \in S^q(V) \Longrightarrow t{\cdot}t' = \mathcal{S}_{p+q}(t \otimes t')$$

このとき、$S(V)$ を V 上の対称代数という。

A.1.1 外積代数

定義 *A.7* $p > n$ のとき $A^p(V) = 0$ となることに注意すると

$$A(V) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} A^p(V) = \bigoplus_{p=0}^{n} A^p(V)$$

となる。これに外積 $\wedge$ を以下のように定義する：

$$t \wedge t' = \sum_{p,q} t_p \wedge t'_q = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}_k(\sum_{p+q=k} t_p \otimes t'_q)$$

このとき、$A(V)$ を V 上の外積代数 *(exterior algebra)* という。

補題 *A.1* *(1)* $v_i \in V \Longrightarrow \mathcal{A}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$,
(2) $\sigma \in \mathfrak{S}_p \Longrightarrow v_{\sigma^{-1}1} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma^{-1}p} = \operatorname{sign}\sigma (v_1 \wedge \cdots \wedge v_p)$.
(3) $t \in A^p(V), t' \in A^q(V) \Longrightarrow t' \wedge t = (-1)^{pq} t \wedge t'$.

p 階の共変テンソルの空間 $T_p(V) = T^p(V^*)$ は内積

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p \in T_p(V),\, v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \in T^p(V) \longrightarrow \langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_p, \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_p \rangle = \varphi_1(v_1) \cdots \varphi_p(v_p) \quad (v_i \in V, \varphi_j \in V^*)$$

によって $T^p(V)$ の双対空間を見なされる。

$A^p(V) \times A^p(V^*)$ 上の双線形形式 $\langle \cdot | \cdot \rangle_p$ を

$$\langle z|\xi \rangle_p = p! \langle z, \xi \rangle \;\; (z \in A^p(V),\ \xi \in A^p(V^*))$$

と定義する。このとき

命題 *A.3* *(1)* $z = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \; (v_i \in V)$、$\xi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_p \; (\varphi_i \in V^*)$ に対して

$$\langle z|\xi \rangle_p = \det(\varphi_i(v_j))$$

が成り立つ。
(2) $\langle \cdot | \cdot \rangle_p$ を内積として $A^p(V)$ と $A^p(V^*)$ は互いに他の双対空間をなす。
(3) $z = \sum_{p=0}^n z_p \in A(V) \; (z_p \in A^p(V))$ 及び $\xi = \sum_{p=0}^n \xi_p \in A(V^*) \; (\xi_p \in A^p(V^*))$ に対して内積を

$$\langle z|\xi \rangle = \sum_{p=0}^n \langle z_p | \xi_p \rangle_p$$

と入れると、$A(V)$ と $A(V^*)$ は互いに他の双対空間をなす。

定義 *A.8* $\xi \in A(V^*)$ に対して $A(V^*)$ の線形変換 $\delta(\xi)$ を

$$\delta(\xi)\zeta = \xi \wedge \zeta \;\; (\zeta \in A(V^*))$$

と定義し、（左）外部積 *((left)exterior multiplication)* という。この $\delta(\xi)$ の転置写像を $\partial(\xi)$ と書き、ξ による内部微分 *(interior product or interior multiplication)* という*:*

$$\langle \partial(\xi) z | \zeta \rangle = \langle z | \delta(\xi)\zeta \rangle = \langle z | \xi \wedge \zeta \rangle.$$

注意：上の演算を $\delta(\xi)\cdot = \xi \wedge \cdot$, $\partial(\xi)\cdot = \xi \rfloor \cdot$ とも表示する。

============ メモ ============

12 名程の諸君が聴講していてくれ、お陰で準備にも講義にもやる気がより入る。老人にとっては有り難い事である。