スーパー解析学の基礎　第2回講義内容 – 08-10.10　　井上淳

1　非可換解析学の必然性とは、そしてそのご利益は？

1.1　Feynman による Schrödinger 方程式の解の経路積分表示

1.2　"Feynman 測度" の非存在

1.3　Fujiwara の方法

前回述べたように Feynman の表現は「美しい」が、それに用いたられた Feynman 測度は存在しない。とすると数学としてはどう解釈したら良いのか？

問題点はこうなる。

$$\hat{H} = \hat{H}(q, -i\hbar\partial_q) = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V(q)$$

は適当な条件を V に課せば、$L^2(\mathbb{R}^m)$ での自己共役作用素となるから、Stone の定理により対応する初期値問題の解は $e^{i\hbar^{-1}t\hat{H}}\underline{u}$ と表現される。すると Schwartz の核定理より超関数的な「核関数」は存在する、即ち、$E(t,q,\cdot) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m)$ で

$$\langle e^{i\hbar^{-1}t\hat{H}}\underline{u}, \varphi\rangle = \langle E(t,q,q')\underline{u}(q'), \varphi(q)\rangle = \langle E(t,q,q'), \underline{u}(q')\varphi(q)\rangle,$$

なるものが存在するが、これでは極めて抽象的対象物で「どんなものか認識できない」。

それに対し、例えば、対応する熱方程式に対しては具体的に核関数が構成できる。そこで「極めて抽象的対象物」を少しでも「はっきりさせたい」と思うのは自然であろう。

Fujiwara が彼の論文[1]を書いた時点では、Schrödinger 方程式の基本解の構成法は知られていなかった。

私流に Fujiwara の採った方法を解釈すると以下のようになる。

(1) 与えられた Lagrange 関数 $L(\gamma,\dot{\gamma}) \in C^\infty(TM)(M=\mathbb{R}^m)$ に対し Legendre 変換して Hamilton 関数 $H(q,p)$ を $H(q,p) = \inf_{\dot{q}}[\dot{q}p - L(q,\dot{q})] \in C^\infty(T^*M)$ と定める。

(2) Hamilton 関数 $H(q,p)$ に対し Hamilton-Jacobi 方程式

$$S_t(t,q,\underline{q}) + H(q, S_q(t,q,\underline{q})) = 0 \quad \text{with} \quad \lim_{t\to 0} tS(t,q,\underline{q}) = \frac{1}{2}|q-\underline{q}|^2$$

[1] D. Fujiwara, *A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation*, J. D'Analyse Math. 35 (1979), pp. 41-96.

の解を構成する。

(3) 上で構成された作用関数 $S(t,q,\underline{q})$ に対して振幅関数を

$$D(t,q,\underline{q}) = \det\left(\frac{\partial^2 S(t,q,\underline{q})}{\partial q \partial \underline{q}}\right) \quad \text{(van Vleck determinant)}$$

と定義すると、この関数は連続（continuiity）の方程式

$$D_t(t,q,\underline{q}) + \partial_q(D(t,q,\underline{q})H_p(q,S_q(t,q,\underline{q}))) = 0 \quad \text{with} \quad \lim_{t\to 0} D(t,q,\underline{q}) = 1$$

を満たす。

(4) 次に積分作用素を

$$F(t)\underline{u}(q) = (2\pi i\hbar)^{-m/2}\int_{\mathbb{R}^m} d\underline{q}\, D(t,q,\underline{q})^{1/2} e^{i\hbar^{-1}S(t,q,\underline{q})}\underline{u}(\underline{q}) \tag{1.1}$$

と定める。

定理 1.1 (Theorem 2.2 of Fujiwara) 任意に $0 < T < \infty$ をとる。$\mathbb{H} = L^2(\mathbb{R}^m : \mathbb{C})$ とし、$\mathcal{B}(\mathbb{H})$ を $\mathbb{H}$ 上の有界線形作用素全体の集合とする。

(1) $F(t)$ は $\mathbb{H}$ 上の有界線形作用素を定める：

$$\|F(t)u\| \le C\|u\| \quad \textit{by Cotlar's lemma.}$$

(2) 任意の $u \in L^2(\mathbb{R}^m : \mathbb{C})$, t, s, $t+s \in [-T,T]$ に対し

$$\lim_{t\to 0}\|F(t)u - u\| = 0,$$
$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}(F(t)u)(q)\bigg|_{t=0} = H(q,\partial_q)u(q),$$
$$\|F(t+s) - F(t)F(s)\| \le C(t^2+s^2).$$

(3) 更に、極限 $\lim_{k\to\infty}(F(t/k))^k = E(t)$ が $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ で存在する、即ち、*i.e.* $L^2(\mathbb{R}^m : \mathbb{C})$ での作用素ノルムで収束する。その極限は以下の初期値問題の解を与える*:*

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}(E(t)u)(q) = H(q,\partial_q)(E(t)u)(q), \\ (E(0)u)(q) = \underline{u}(q). \end{cases}$$

定理の証明の概略: (2) における Hamilton-Jacobi 方程式 の解の構成法として Jacobi の方法を用いた。即ち、

(a) 与えられた $H(q,p)$ 及び初期データ $(\underline{q},\underline{p})$ に対応する解を Hamilton flow $(q(s),p(s)) = (q(s,\underline{q},\underline{p}), p(s,\underline{q},\underline{p}))$ と書く。V が無限遠方で高々2次のとき逐次近似法で一意的に Hamilton flow が定まる。このとき

$$S_0(t,\underline{q},\underline{p}) = \int_0^t ds\,(\dot{q}(s)p(s) - H(q(s),p(s)))$$

と定義する。

(b) 与えられた時刻 t と与えられた $\bar{q}$ に対し、($|t|$ が十分小ならば) 陰関数定理が適用でき、$\bar{q} = q(t, \underline{q}, \underline{p})$ となる $\underline{p}$ があって、それを $\underline{p} = \xi(t, \underline{q}, \bar{q})$ と解く。

(c) これを用いて

$$S(t, \bar{q}, \underline{q}) = S_0(t, \underline{q}, \underline{p})\Big|_{\underline{p}=\xi(t,\underline{q},\bar{q})}$$

とすると、これが Hamilton-Jacobi 方程式の解であり、更に初期データ $(\bar{q}, \underline{q})$ に対する評価が示せる。

(3) は (2) から一般論として従う。

(4) のように積分作用素を決めたとき定理が示されるのだが、ここで $S(t, \bar{q}, \underline{q})$ や $D(t, \bar{q}, \underline{q})$ の「初期データ $(\bar{q}, \underline{q})$ に対する評価」が作用素の有界性の証明等に重要である。また、振幅として $D(t, \bar{q}, \underline{q})^{1/2}$ をとったのは、このようにすると half-density bundle (或は、intrinsic Hilbert space) 上の作用素と考えられるからで、これは Copenhagen 解釈に対応している、と私は考えている。　□

(5) Parametrix(1.1) の収束については上の結果で十分だが、Feynman の核関数の表示との関連がはっきりしない。これに関し基本解の構成として論文[2] があるが、ここではその説明は割愛する。

問題：Fujiwara の考察では運動量部分は $\mathbb{R}^m$ での平坦な計量に限られている。これを一般の Riemann 計量にする努力は未だに報いられていない！物理学者的な計算[3]では Laplace-Bertrami 作用素以外に、「曲がった空間」の影響が R を scalar curvature として $R/12$ と出てくる。これは熱方程式版では数学的にも確かめられている[4]。ここに、擬微分作用素、或は高振動相関数を持つ Fourier 積分作用素の L^2-有界性に関する曲がった空間への定理の拡張が求められるゆえんがある。

1.4 Feynman の呟き

2 Dirac 方程式と Weyl 方程式

2.1 Dirac 方程式と Weyl 方程式：その由来

Dirac が、現在 Dirac 方程式と呼ばれるものをどういう経緯で導入したのか？以下しばらく、

[2] D. Fujiwara, *Remarks on convergence of the Feynman path integrals*,Duke Math. J.47(1980), pp. 559-600.

[3] 例えば、B. DeWitt, *Dynamical theory in curved spaces I. A review of the classical and quantum action principles*, Reviews of modern physics 29(1984), pp. 377-397.

[4] A. Inoue and Y. Maeda, *On integral transformations associated with a certain Lagrangian– as a prototype of quantization*, J.Math.Soc.Japan 37(1985), pp. 219-244.

西島和彦, 相対論的量子力学, 培風館、 1973

に従って説明する。自由粒子のエネルギー E と運動量 p の間には Einstein の関係式

$$E^2 = c^2|p|^2 + c^4m^2$$

が成り立つ[5]。そこでこの関係式に、Schrödinger 方程式を導いたように（量子化の原型)、

$$p_j \longrightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_j}, \quad E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

なる「規則」を入れて整理すると

$$\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - c^2\hbar^2\Delta u + c^4m^2u = 0$$

なる Klein-Gordon 方程式が求まる。ところが、この式の解 u を用いて $\rho = |u|^2$ が「確率密度」という解釈が成り立つようにはできない[6]。物理学の教科書には確率解釈ができるためには、時間に関し 1 階でなければならないとしているようである。

そうだとして、もっとも簡単な対応策は

$$E = \pm c\sqrt{|p|^2 + c^2m^2}$$

とすることである。しかし、右辺に相当する偏微分作用素は「擬微分」になる、微分作用素は局所性、即ち、

$$\mathrm{supp}\ P(q,\partial_q)u \subset \mathrm{supp}\ u, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$$

なる性質をもつが、擬微分だとこうはならない！物理法則は局所性が満たされる方程式で表現されるべきであろうから、上の「表象」を持つ擬微分作用素を「量子化されたもの」とは解釈しにくい。

Einstein の関係式の量子化されたものとして確率密度解釈を許容する方程式であるためには、

$$\Big(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H\Big)\psi = 0$$

であり、かつ

$$\Big(\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + H^2\Big)\psi = 0$$

を満たすべきである！これが、Klein-Gordon 方程式と一致するための条件は

$$H^2 = c^2|p|^2 + c^4m^2$$

[5] $p = 0$ のときの $E = mc^2$ が原爆製造の理論的きっかけになった！

[6] 何故できないのか？どういう了解のもとで、できないと言っているのか、上記の本のみならず、例えば岩波の「現代物理学の基礎、量子力学」等も調べておくと良い。Google で「量子力学、確率解釈」とでも打ち込んでみる事から始めるのも良い

でなければならない。この関係式を満たすために、もし ψ が多成分ならば、

$$H = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{\alpha}_j\, p_j + mc^2 \boldsymbol{\beta}$$

という形のものがあり得る。そのときは、文字達 $\{\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}\}$ は

$$\boldsymbol{\alpha}_j\, \boldsymbol{\alpha}_k + \boldsymbol{\alpha}_k\, \boldsymbol{\alpha}_j = 2\delta_{jk}\mathbb{I}, \quad \boldsymbol{\alpha}_j\, \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}\, \boldsymbol{\alpha}_j = 0, \quad \boldsymbol{\beta}^2 = \mathbb{I} \tag{2.1}$$

を満たさなければならない。この関係式を満たす「数」$\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}$ は 4×4 行列として実現でき、それの一組を Dirac 行列と命名した。しかし、このような性質を持つ「数」のことは Clifford が最初に導入したものであることは、再度 Google で Clifford と打ち込んで検索してみると分かる。Dirac 行列は具体的に

$$\boldsymbol{\alpha}_j = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_j \\ \boldsymbol{\sigma}_j & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_1 \otimes \boldsymbol{\sigma}_j, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\sigma}_3 \otimes \mathbb{I}_2.$$

と表示される。但し、 Pauli 行列 $\{\boldsymbol{\sigma}_j\}_{j=1}^3$ は

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

で与えられている。

[レポート問題 2-1]: 関係式 (2.1) を満たす幾つかの表現（Majonara rep, chiral rep, etc.）がある。それらをできるだけ多く探し、関係を調べよ。ことのついでに、Lorentz 不変性も。

より一般に外場としての電磁ポテンシャルを取り入れた Dirac 方程式の初期値問題は以下のようになる：
初期値として $\underline{\psi}(q) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 : \mathbb{C}^4)$ を与えたとき $\psi(t,q) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^4$ で

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}\psi(t,q) = \mathbb{H}(t)\psi(t,q), \\ \psi(\underline{t}, q) = \underline{\psi}(q) \end{cases} \tag{2.3}$$

ここで

$$\mathbb{H}(t) = c\sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{\alpha}_k \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{e}{c}A_k(t,q) \right) + mc^2\boldsymbol{\beta} + eA_0(t,q) \tag{2.4}$$

を満たすものを求めよ。

Dirac の講演を聴いていたらしい Weyl が、もし質量 $m=0$ ならば 4×4 ではなく 2×2 行列で関係式 (2.1) を満たす代数が実現できるとした。そして導かれるのが自由 Weyl 方程式の初期値問題である：$\psi(t,q) = \begin{pmatrix} \psi_1(t,q) \\ \psi_2(t,q) \end{pmatrix}$ として、

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t}\psi(t,q) = \mathbb{H}\psi(t,q), \quad \mathbb{H} = -ic\,\hbar \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{\sigma}_j \frac{\partial}{\partial q_j}, \\ \psi(0,q) = \underline{\psi}(q). \end{cases} \tag{2.5}$$

この方程式は、parity を保存しないので、この方程式が表す物理的実体はないと無視されてきた。しかし、弱い相互作用での parity 非保存が Lee-Yang により理論的に、そして Wu により実験的に検証された結果、質量ゼロの neutrino（中性微子）が Weyl 方程式に従うと信じられてきた、とのことである。しかし、近年神岡での実験で neutrino に質量があるという事になっているようであり、今後この Weyl 方程式は認知され続けるのかどうか、週刊誌的な好奇心がある。しかし、きれいな式であり数学的には自然な導出に見えるので、たとえ今回は物理的意味がないと切り捨てられたとしても復活するのではあるまいか？

[レポート問題 2-2]: Google で Weyl 方程式と打つと、物性理論での使い道が書かれている。それらをできるだけ多く探し調べ、理解したことをレポートせよ。

この方程式の解を「古典力学的諸量」を用いてどう表示するのか？が問題であった。

まず、普通にやること：(2.5) は「系」とはいえ定数係数だから Fourier 変換を使えば「代数的演算」だけで解ける形になる。実際、Fourier 変換

$$\hat{u}(p) = (2\pi\hbar)^{-m/2}\int_{\mathbb{R}^m} dq\, e^{-i\hbar^{-1}qp}u(q), \quad u(q) = (2\pi\hbar)^{-m/2}\int_{\mathbb{R}^m} dp\, e^{i\hbar^{-1}qp}\hat{u}(p)$$

を $m=3$ として (2.5) の $q\in\mathbb{R}^3$ に関して施せば、

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(t,p) = \hat{\mathbb{H}}\hat{\psi}(t,p) \tag{2.6}$$

となる。ここで

$$\hat{\mathbb{H}} = c\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{\sigma}_j p_j = c\begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3\end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \hat{\mathbb{H}}^2 = c^2|p|^2\mathbb{I}_2.$$

これより簡単に

命題 2.1 任意の $t\in\mathbb{R}$ と $\underline{\psi}\in L^2(\mathbb{R}^3:\mathbb{C}^2)$ に対し

$$e^{-i\hbar^{-1}t\mathbb{H}}\underline{\psi}(q) = (2\pi\hbar)^{-3/2}\int_{\mathbb{R}^3} dp\, e^{i\hbar^{-1}qp}e^{-i\hbar^{-1}t\hat{\mathbb{H}}}\underline{\hat{\psi}}(p) \tag{2.7}$$

となる。更に $\underline{\psi}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3:\mathbb{C}^2)$ ならば

$$\mathbb{E}(t,q) = q(2\pi\hbar)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3} dp\, e^{i\hbar^{-1}qp}\big[\cos(c\hbar^{-1}t|p|)\mathbb{I}_2 - i\frac{\sin(c\hbar^{-1}t|p|)}{c|p|}\hat{\mathbb{H}}\big] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3:\mathbb{C}^2) \tag{2.8}$$

として

$$e^{-i\hbar^{-1}t\mathbb{H}}\underline{\psi}(q) = \mathbb{E}*\underline{\psi}(t,q) = \int_{\mathbb{R}^3} dq'\,\mathbb{E}(t,q-q')\underline{\psi}(q'), \tag{2.9}$$

となる。

注意: Pauli は「There exists no classical counter-part corresponding to quantum spinning particle」とどこかで言及したと、私は何かで読んだつもりなのだがどこに書いてあったのか判然としない。或は、私の妄想に基づく誤解なのか？

朝永振一郎：スピンはめぐる – 成熟期の量子力学,　中央公論社, 1974.

をながめると楽しい。何にしても表示式 (2.8) から方程式 (2.5) に対応する古典力学を類推する事は難しい。これが Feynman の呟き（それを私が勝手に Feynman の問題と呼んだ）の原因の一つである。

主張: これにもかかわらず、方程式 (2.5) に対応する古典力学を構成でき、しばらく説明した後に述べるような表示があることが分かる!

2.2 特性曲線の方法と Hamiltonian 経路積分法

ここでは、Feynman の問題を解決する為の工夫の一つ「Hamiltonian 経路積分法」について簡単な例で考え方を示す。Schrödinger 方程式では空間方向に 2 階偏微分が表れるが、Dirac 方程式では 1 階偏微分しか表れないので、Hamiltonian 経路積分法が不可欠なのである。

以下の方程式は簡単に解ける。

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,q) = a\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial q}u(t,q) + bqu(t,q), \\ u(0,q) = \underline{u}(q). \end{cases} \tag{2.10}$$

上式の右辺から Hamiltonian を

$$H(q,p) = e^{-i\hbar^{-1}qp}\Big(a\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q} + bq\Big)e^{i\hbar^{-1}qp}\Big|_{\hbar=0} = ap + bq$$

と定義すると、対応する古典軌道は簡単に

$$q(s) = \underline{q} + as, \quad p(s) = \underline{p} - bs. \tag{2.11}$$

と与えられる。特性方程式の方法を用いれば、直ちに

$$U(t,\underline{q}) = \underline{u}(\underline{q})e^{-i\hbar^{-1}(b\bar{q}t + 2^{-1}abt^2)}.$$

関数 $\bar{q} = q(t,\underline{q})$ の逆関数 $\underline{q} = y(t,\bar{q}) = \bar{q} - at$ を用いて、(2.10) の解は

$$u(t,\bar{q}) = U(t,\underline{q})\big|_{\underline{q}=y(t,\bar{q})} = \underline{u}(\bar{q} - at)e^{-i\hbar^{-1}(b\bar{q}t - 2^{-1}abt^2)}.$$

注意：特性方程式の方法では $p(t)$ の情報は使われていない！

[レポート問題 2-3]:　特性方程式の方法を用いる 1 階偏微分方程式について調べよ。常微分方程式の解の情報から偏微分方程式の情報が得られることに注目し、（非線形）Hamilton 方程式の解を用いて（線形）Liouville 方程式の解がどう表示されるかも考えよ。非線形の場の方程式に対応する線形 Liouville 方程式はどうなるか？これの例が、Navier-Stokes 方程式に対応する Hopf 方程式で、それは汎関数微分方程式になる！

この 解の表示を Hamiltonian 経路積分法で求める 事を考える。

$$S_0(t,\underline{q},\underline{p}) = \int_0^t ds\,[\dot{q}(s)p(s) - H(q(s),p(s))] = -b\underline{q}t - 2^{-1}abt^2$$

とし、上に求めた逆関数を用いて

$$S(t,\bar{q},\underline{p}) = \left(\underline{q}\,\underline{p} + S_0(t,\underline{q},\underline{p})\right)\Big|_{\underline{q}=y(t,\bar{q})} = \bar{q}\underline{p} - a\underline{p}t - b\bar{q}t + 2^{-1}abt^2$$

と定める。この作用関数 $S(t,\bar{q},\underline{p})$ は Hamilton-Jacobi 方程式を満たす：

$$\frac{\partial}{\partial t}S + H(\bar{q},\partial_{\bar{q}}S) = 0 \quad \text{with} \quad S(0,\bar{q},\underline{p}) = \bar{q}\,\underline{p}.$$

この場合の van Vleck determinant はスカラーで

$$D(t,\bar{q},\underline{p}) = \frac{\partial^2 S(t,\bar{q},\underline{p})}{\partial\bar{q}\partial\underline{p}} = 1.$$

勿論これは以下の連続の方程式を満たしている：

$$\frac{\partial}{\partial t}D + \frac{1}{2}\partial_{\bar{q}}(DH_p) = 0 \quad \text{with} \quad D(0,\bar{q},\underline{p}) = 1 \quad \text{where} \quad H_p = \frac{\partial H}{\partial p}\big(\bar{q},\frac{\partial S}{\partial\bar{q}}\big).$$

これらの 古典的量 S と D を用いてFeynman の考えに従って以下のように定義する：

$$u(t,\bar{q}) = (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} d\underline{p}\,D^{1/2}(t,\bar{q},\underline{p})e^{i\hbar^{-1}S(t,\bar{q},\underline{p})}\hat{\underline{u}}(\underline{p}).$$

すると、

$$\begin{aligned}u(t,\bar{q}) &= (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} d\underline{p}\,e^{i\hbar^{-1}S(t,\bar{q},\underline{p})}\hat{\underline{u}}(\underline{p})\\ &= (2\pi\hbar)^{-1}\iint_{\mathbb{R}^2} d\underline{p}d\underline{q}\,e^{i\hbar^{-1}(S(t,\bar{q},\underline{p})-\underline{q}\,\underline{p})}\underline{u}(\underline{q})\big(= \underline{u}(\bar{q}-at)e^{i\hbar^{-1}(-b\bar{q}t+2^{-1}abt^2)}\big).\end{aligned}$$

2.3　2×2 行列の分解 – 行列の演算とは何か

2×2 行列の中で次の形のものは特別なクラスをなす。

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

この行列の集合達 $\{A\}$ は普通の行列の加減乗除に関して同じ形を保つのみならず、可換である事が知られている。そして、上記の行列 A を複素数 $\alpha = a + ib$ と同一視できる。また、ベクトル $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を複素数 $z = x + iy$ と見なし、ベクトルの α 倍は

$$
\begin{aligned}
(a+ib)(x+iy) \sim \alpha\mathbf{z} \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ax-by \\ bx+ay \end{pmatrix} \\
&\sim (ax-by) + i(bx+ay) = (a+ib)(x+iy) \\
&\sim \begin{pmatrix} ax-by & -(bx+ay) \\ bx+ay & ax-by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と考えられる。

では、一般の縦ベクトルに 2×2 行列を施す演算の別解釈ができないものか？上の複素数で述べた事は、「事柄」には色々の見方があるということで、それを「一般化」できないのか？

この小節での隠れた原理は

定理 2.1 (C. Chevalley) 任意の *Clifford* 代数は *Grassmann* 代数上にその表現を持つ。

実は私はこれの証明を正確には知らない。この定理に勝手に勇気づけられ、2×2 行列を分解しそれの微分表現ができたので、この定理の存在意味としている。別の言い方をすれば、この定理を具体例、2×2 行列に適用することによって定理の意味を分かったことにする。

(I) 2×2 行列を分解する：

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} &= \frac{a+b}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{a-b}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{c+d}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{c-d}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{a+b}{2}\mathbb{I}_2 + \frac{a-b}{2}\boldsymbol{\sigma}_3 + \frac{c+d}{2}\boldsymbol{\sigma}_1 + i\frac{c-d}{2}\boldsymbol{\sigma}_2.
\end{aligned}
$$

ここで $\{\boldsymbol{\sigma}_j\}$ は (2.2) を満たすのみならず、以下の関係も満たすことを注意しておく。

$$
\boldsymbol{\sigma}_j\boldsymbol{\sigma}_k = i\boldsymbol{\sigma}_\ell
$$

但し、(j,k,ℓ) は $(1,2,3)$ の偶順列とする。

即ち、2×2 行列の元全体は、Pauli 行列 $\{\boldsymbol{\sigma}_k\}$ を基底とする Clifford 代数の構造を持っている。

(II-1) 次に $\theta^2 = 0$ となる文字 θ を用意し、Pauli 行列達を Grassmann 代数上の関数 $\Lambda = \{u(\theta) = u_0 + u_1\theta \mid u_0,\ u_1 \in \mathbb{C}\}$ に働く微分作用素と同一視しよう。それには、

$$
u_0 + u_1\theta \sim \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}
$$

に対して

$$\theta u(\theta)=u_0\theta\sim\begin{pmatrix}0\\u_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix},\quad \frac{\partial}{\partial\theta}u(\theta)=u_1\sim\begin{pmatrix}u_1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}$$

と定義する。すると

$$\begin{aligned}(\theta+\frac{\partial}{\partial\theta})u(\theta)&=u_0\theta+u_1\sim\begin{pmatrix}u_1\\u_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix},\\(\theta-\frac{\partial}{\partial\theta})u(\theta)&=u_0\theta-u_1\sim\begin{pmatrix}-u_1\\u_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix},\\(1-2\theta\frac{\partial}{\partial\theta})u(\theta)&=u_0-u_1\theta\sim\begin{pmatrix}u_0\\-u_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

これより、Pauli行列が Λ 上に作用する微分作用素として表現された。しかしこのような表現は一意的ではない！

(II-2) 上の Pauli 行列の微分作用素表現の別のものを与える。$\theta_i\theta_j+\theta_j\theta_i=0$ なる関係式を満たす 2 つの文字 θ_1, θ_2 を用意する。そして、

$$\Lambda_{\mathrm{ev}}=\{u=u_0+u_1\theta_1\theta_2\mid u_0,u_1\in\mathbb{C}\},\quad \Lambda_{\mathrm{od}}=\{v=v_1\theta_1+v_2\theta_2\mid v_1,v_2\in\mathbb{C}\}$$

とおく。

$$\begin{aligned}\sigma_1(\theta,\partial_\theta)&=\left(\theta_1\theta_2-\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right)u(\theta)=u_0\theta_1\theta_2+u_1\sim\begin{pmatrix}u_1\\u_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix},\\-i\sigma_2(\theta,\partial_\theta)&=\left(\theta_1\theta_2+\frac{\partial^2}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right)u(\theta)=u_0\theta_1\theta_2-u_1\sim\begin{pmatrix}-u_1\\u_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix},\\\sigma_3(\theta,\partial_\theta)&=\left(1-\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}-\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)u(\theta)=u_0-u_1\theta_1\theta_2\sim\begin{pmatrix}u_0\\-u_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

注意 2.1 上で定めた微分作用素 $\sigma_j(\theta,\partial_\theta)$ は Λ_{od} 上では全てをゼロとする。また、上の表現を用いれば対応する *Hamilton* 関数が「偶」となる。偶関数でないと *Weyl* 方程式や *Dirac* 方程式に対応する古典力学を定める事ができないのだが、これは後に説明する。

============ メモ ============

14 名程の諸君が聴講していてくれた。