スーパー解析学の基礎　第１回講義内容– 08.10.03　　井上淳

質問とその答え：講義後に「経路空間 $C_{t,\bar{q},\underline{q}}$ は線形空間になっていないので、Feynman 測度の非存在の説明ででてきた線形空間である Hilbert 空間との関連が分からない」という質問があった。もっともである。この空間自身は線形空間ではないが affine にはなっているので、「線形空間 $C_{t,loop} = \{\phi(\cdot) \in AC([0,t] : \mathbb{R}^m) \mid \phi(0) = \phi(t)\}$ には Feynman 測度が入らない」と修正した。

1　非可換解析学の必然性とは、そしてそのご利益は？

1.1　Feynman による Schrödinger 方程式の解の経路積分表示

その昔、R. Feynman が大学院学生のとき彼は「Schrödinger 方程式は本当に量子力学を支配しているのだろうか？」という素朴な疑問[1]を持ったと思われる。少し数学的にその疑問を表現すると、Schrödinger 方程式の初期値問題

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}u(t,q) = -\dfrac{\hbar^2}{2}\Delta u(t,q) + V(q)u(t,q), \\ u(0,q) = \underline{u}(q). \end{cases} \tag{1.1}$$

の解 $u(t,q) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ は $\hbar$ にどう依存するのか？それが「Bohr の対応原理」を具現化するのか？となろう。

私の学生時代、線形偏微分方程式の研究課題は、解の存在、一意性、正則性であったが、それらはほぼ一段落[2]つき、今は解の具体的表示[3]が課題である。その立場で考えると、Schrödinger 方程式の解の Planck 定数 $\hbar$ への依存性を明示化することで、Bohr の対応原理をどう説明するか という問題意識は良いスタートラインではないか！

そこで、Feynman が彼の博士論文でいかなる過程で彼の「経路積分」を導入したのかを見ておこう[4]。彼のもともとの問題意識は、物理学者が実験に基づいて見いだした Bohr の対応原理が、Schrödinger 方程式で表示された量子力学とやらではハッキリとは見えなくなっていて、ケシカランというものであった、と思われる。

---

[1]R. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Rev. Modern Phys. 20 (1948) pp. 367-387.

[2]L. Hörmander, “The Analysis of Linear Partial Differential Operators, I–IV” Springer, 1983-85

[3]例えば、R. Beals, *Exact fundamental solutions*, Journées Équations aux dérivées partielles, Saint-Jean-de-Monts, 2-5 juin 1998.

[4]ここでは S.A. Albeverio and R.J. Hoegh-Krohn, Mathematical Theory of Feynman Integrals, Lec.Notes in Math. 523, Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1976 を下敷きにする。

この (1.1) の右辺の Hamiltonian 作用素 は形式的に

$$\hat{H}=\hat{H}_0+V(\cdot),\quad \hat{H}_0=-\frac{\hbar^2}{2}\Delta=-\frac{\hbar^2}{2}\sum_{j=1}^m\frac{\partial^2}{\partial q_j^2}$$

と書ける。H が $L^2(\mathbb{R}^m)$ で本質的に自己共役作用素とすると、Stone の定理で (1.1) の解は

$$u(t,q)=(e^{-i\hbar^{-1}t\hat{H}}\underline{u})(q)$$

と書ける。少し一般化して、作用素 A の指数関数を

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^\infty\frac{(tA)^k}{k!}\quad (t\in\mathbb{R}^+ \text{ or } t\in i\mathbb{R})$$

と定義できるのは、どのような空間とそこでのどのような作用素か、という考え方もある。この考え方の美しい結実が Hille-Yosida の半群理論である。

[レポート問題 1-1]: 上で引用された Stone の定理とは何か調べよ。もし、考える Hilbert 空間が有限次元だとすると線形代数の枠内での対応物は何か？勿論、Hille-Yosida の半群理論とは何かと報告するのは大歓迎である。

一方、Lie-Trotter-Kato の積公式で $\hat{H}=\hat{H}_0+V$ のとき $e^{-i\hbar^{-1}t\hat{H}}$ は

$$e^{-i\hbar^{-1}t\hat{H}}=\operatorname*{s\text{-}lim}_{k\to\infty}\left(e^{-i\hbar^{-1}\frac{t}{k}V}e^{-i\hbar^{-1}\frac{t}{k}\hat{H}_0}\right)^k$$

となる。

注意:(i) 上の式で $[\hat{H}_0,V]=0$、即ち、$\hat{H}_0$ と V が可換ならば $(\hat{H}_0+V)^k=\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}\hat{H}_0^jV^{k-j}$ より $e^{s(\hat{H}_0+V)}=e^{s\hat{H}_0}e^{sV}$ となる。即ち、$\text{s-lim}_{k\to\infty}$ を取る必要がなくなる。
(ii) 有限次元線形空間では存在しなかった元達の「強収束」「弱収束」という概念、無限次元空間の作用素列の「強収束」、「一様収束」の差を思い出しておいて欲しい。$\Longleftarrow$ 有限次元ベクトル空間での線形代数を無限次元にしたものが関数解析学の起こり！

もし初期値 $\underline{u}$ が Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$（急減少関数の空間）

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)=\{u\in C^\infty(\mathbb{R}^m:\mathbb{C})\mid p_{k,\mathcal{S}}(u)<\infty\quad\forall k\in\mathbb{N}\}\\ \text{where}\quad |u|_{k,\mathcal{S}}=\sup_{q\in\mathbb{R}^m,\,l+|\alpha|\le k}|\langle q\rangle^l\partial_q^\alpha u(q)|\quad\text{with}\quad\langle q\rangle=\sqrt{1+|q|^2}\end{aligned}$$

に属しているならば、

$$(e^{-i\hbar^{-1}t\hat{H}_0}\underline{u})(\bar{q})=(2\pi i\hbar t)^{-m/2}\int_{\mathbb{R}^m}d\underline{q}\,e^{i\hbar^{-1}(\bar{q}-\underline{q})^2/(2t)}\underline{u}(\underline{q})$$

と書けるので

$$\begin{aligned}(e^{-i\hbar^{-1}t\hat{H}}\underline{u})(\bar{q})&\sim(e^{-i\hbar^{-1}tV}(e^{-i\hbar^{-1}t\hat{H}_0}\underline{u}))(\bar{q})\\&\sim(2\pi i\hbar t)^{-m/2}\,e^{-i\hbar^{-1}tV(\bar{q})}\int_{\mathbb{R}^m}d\underline{q}\,e^{i\hbar^{-1}(\bar{q}-\underline{q})^2/(2t)}\underline{u}(\underline{q})\end{aligned}$$

となる。これより

$$
\begin{aligned}
(e^{-i\hbar^{-1}s\hat{H}}(e^{-i\hbar^{-1}t\hat{H}}\underline{u}))(\bar{q}) &\sim (2\pi i\hbar s)^{-m/2}\, e^{-i\hbar^{-1}sV(\bar{q})}\int_{\mathbb{R}^m} dq^{(1)}\, e^{i\hbar^{-1}(\bar{q}-q^{(1)})^2/(2s)}(e^{-i\hbar^{-1}t\hat{H}}\underline{u})(q^{(1)}) \\
&\sim (2\pi i\hbar)^{-m}\,(ts)^{-m/2}e^{-i\hbar^{-1}sV(\bar{q})}\int_{\mathbb{R}^m} dx^{(1)}\, e^{i\hbar^{-1}(\bar{q}-q^{(1)})^2/(2s)} \\
&\qquad\qquad \times\left[e^{-i\hbar^{-1}tV(q^{(1)})}\int_{\mathbb{R}^m} d\underline{q}\, e^{i\hbar^{-1}(q^{(1)}-\underline{q})^2/(2t)}\underline{u}(\underline{q})\right] \\
&= (2\pi i\hbar)^{-m}\,(ts)^{-m/2}\int_{\mathbb{R}^m} d\underline{q} \\
&\qquad \times\left[\int_{\mathbb{R}^m} dq^{(1)}\, e^{-i\hbar^{-1}(sV(\bar{q})+tV(q^{(1)}))}\, e^{i\hbar^{-1}(\bar{q}-q^{(1)})^2/(2s)+i\hbar^{-1}(q^{(1)}-\underline{q})^2/(2t)}\right]\underline{u}(\underline{q})
\end{aligned}
$$

となる。$t=s$ とおけば

$$
\begin{aligned}
-i\hbar^{-1}t(V(\bar{q})+V(q^{(1)}))&+i\hbar^{-1}[(\bar{q}-q^{(1)})^2+(q^{(1)}-\underline{q})^2]/(2t) \\
&= i\hbar^{-1}t[\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{q}-q^{(1)}}{t}\right)^2 - V(\bar{q}) + \frac{1}{2}\left(\frac{q^{(1)}-\underline{q}}{t}\right)^2 - V(q^{(1)})]
\end{aligned}
$$

となる。この操作を k 回繰り返し $q^{(k)}=\bar{q},\ q^{(0)}=\underline{q}$ とおけば

$$
\left(e^{-i\hbar^{-1}\frac{t}{k}V}e^{-i\hbar^{-1}\frac{t}{k}\hat{H}_0}\right)^k\underline{u}(\underline{q}) \sim \int d\underline{q}\, F_k(t,\bar{q},q^{(1)},\cdots,q^{(1)},\underline{q})\underline{u}(\bar{q}).
$$

ここで

$$
F_k(t,\bar{q},q^{(1)},\cdots,q^{(1)},\underline{q}) = (2\pi i\hbar(t/k))^{-km/2}\int\cdots\int dq^{(1)}\cdots dq^{(k-1)}\, e^{i\hbar^{-1}S_t(\bar{q},q^{(k-1)},\cdots,q^{(1)},\underline{q})},
$$

$$
S_t(q^{(k)},\ldots,q^{(0)}) = \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{q^{(j)}-q^{(j-1)}}{t/k}\right)^2 - V(q^{(j)})\right]\frac{t}{k}
$$

と書いた。形式的に $k\to\infty$ とすれば

$$
F(t,\bar{q},\underline{q}) = \operatorname*{s\text{-}lim}_{k\to\infty}(2\pi i\hbar(t/k))^{-km/2}\int\cdots\int dq^{(1)}\cdots dq^{(k-1)}\, e^{i\hbar^{-1}S_t(\bar{q},q^{(k-1)},\cdots,q^{(1)},\underline{q})}. \tag{1.2}
$$

より

$$
(e^{-i\hbar^{-1}t\hat{H}}\underline{u})(\bar{q}) \sim \int d\underline{q}\, F(t,\bar{q},\underline{q})\underline{u}(\underline{q})
$$

と書ける。

[レポート問題 1-2]: 関数空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ は Fréchet 空間になることを示せ。

Feynman's interpretation: AC で絶対連続を表し、「経路」の集合を

$$
\begin{aligned}
C_{t,\bar{q},\underline{q}} &= \{\gamma(\cdot)\in AC([0,t]:\mathbb{R}^m)\,|\,\gamma(0)=\underline{q},\gamma(t)=\bar{q}\}, \\
C_{t,loop} &= \{\phi(\cdot)\in AC([0,t]:\mathbb{R}^m)\,|\,\phi(0)=\phi(t)\},
\end{aligned}
$$

とする。このとき. 任意の $\gamma \in C_{t,\bar{q},\underline{q}}$ に対して

$$C_{t,\bar{q},\underline{q}} = \gamma + C_{t,loop}$$

となることは、経路の足し算を経路をつなげることとすれば明らかだろう。γ として $\underline{q}$ と $\bar{q}$ を結ぶ直線 $\gamma(s) = (1-s)\underline{q} + s\bar{q}$ を採れば良い。

さて Hamilton 関数 $H(q,p)$ を Legendre 変換して Lagrange 関数 $L(\gamma,\dot{\gamma})$ を

$$L(\gamma,\dot{\gamma}) = \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 - V(\gamma) \in C^\infty(T\mathbb{R}^m)$$

とする。そして任意の $\gamma \in C_{t,\bar{q},\underline{q}}$ に対し、$S_t(q^{(k)},\ldots,q^{(0)})$ を作用関数 $S_t(\gamma)$ の Riemann 和と見なせば

$$S_t(\gamma) = \int_0^t L(\gamma(\tau),\dot{\gamma}(\tau))d\tau = \lim_{k\to\infty} S_t(q^{(k)},\cdots,q^{(0)})$$

となる。ここで $k \to \infty$ としたとき測度 $dq^{(1)}\cdots dq^{(k-1)}$ の極限を

$$d_F\gamma = \prod_{0<\tau<t} d\gamma(\tau)$$

と書き、経路空間 $C_{t,\bar{q},\underline{q}}$ 上の測度と考えてしまおう：

$$F(t,\bar{q},\underline{q}) = \int_{C_{t,\bar{q},\underline{q}}} d_F\gamma\, e^{i\hbar^{-1}\int_0^t L(\gamma(\tau),\dot{\gamma}(\tau))d\tau}.$$

すると、形式的に <u>停留点の方法</u>[5]を用いれば、$\hbar \to 0$ での解の振る舞いの主要項を与える経路 γ_c は

$$\delta \int_0^t L(\gamma(\tau),\dot{\gamma}(\tau))d\tau = \frac{d}{d\epsilon}\int_0^t L((\gamma_c+\epsilon\phi)(\tau),(\dot{\gamma}_c+\epsilon\dot{\phi})(\tau))d\tau\Big|_{\epsilon=0} = 0 \quad \forall\phi \in C_{t,loop}$$

となる。故に <u>Bohr の対応原理が見事に導きだされた</u> ことになろう。

[レポート問題 1-3 (Campbell-Hausdorff の公式とその応用)]：
(1) まずは、Google で「Campbell Hausdorff」と打ち込んで色々眺めてみよ。
(2) それを行列

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 1 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 1 \\ \Omega^2-\mu^2 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & \Omega^2-\mu^2 & -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

に対する指数関数 $e^{t\mathbb{X}}$ の計算に応用し、具体的に書いてみよ。行列を対角化しようとせずに、適当に分解して Campbell-Hausdorff の公式を用いると良い。
(3) Lie-Trotter-Kato の公式について調べてみよ。

[レポート問題 1-4]: 絶対連続関数とは何か？どんな性質を持つのか調べよ。

[5] stationary phase method, 後に説明する予定である

1.2 "Feynman 測度" の非存在

この美しい経路積分表示の考え方の大いなる数学的な障害[6]は、「一般には、無限次元樽型局所凸線形空間[7]に自明でない Feynman 的な測度は存在しない」と証明されたことである。

この非存在の感触は以下の定理[8]で拡大解釈して了解して欲しい。とはいえ、経路空間 $C_{t,loop}$ は Hilbert 空間ではないのでは、と気になってしまう人は Smolyanov-Fomin の論文[9]を見よ。

用語を忘れてしまった人のために少し思い出しておこう：

定義 1.1 (集合族) 空間 X の部分集合族 $\mathcal{B}$ で

- $\emptyset \in \mathcal{B},$
- $A \in \mathcal{B} \Longrightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{B},$
- $A_n \in \mathcal{B} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$

を満たすものを、完全加法族と呼ぶ。

定義 1.2 (測度) 空間 X 上の完全加法族 $\mathcal{B}$ で定義された集合関数 μ が

- $0 \leq \mu(A) \leq \infty, \quad \mu(\emptyset) = 0,$
- $A_n \in \mathcal{B},\ A_j \cap A_k = \emptyset\ (j \neq k) \Longrightarrow \mu\big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

を満たすとき、測度という。

定義 1.3 (Borel 集合族) 位相空間 X の集合族 $\mathcal{B}(X)$ で以下の条件を満たす最小[10]のものを *Borel* 集合族という：

- $A \in \mathcal{B}(X) \Longrightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{B}(X),$

[6]「積分論の構築にはまず測度が必要である」という考え方は万古不変なのか？奇変数に関する「積分」には測度はいらない！

[7]locally convex space をどこかで聞き齧っておくことは無意味ではないだろう。樽型という言葉で検索するのもよい

[8]H.H. Kuo, Gaussian Measures in Banach Spaces, Lecture Notes in Mathematics 463, Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1975. に従う。

[9]O.G. Smolyanov and S.V. Fomin, *Measures on linear topological spaces*, Russian Math.Surveys 31(1976), pp. 1-53.

[10]集合の包含関係で順序を入れる

- $A_n \in \mathcal{B}(X) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(X)$,
- $\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{B}(X)$.

定義 1.4 *Borel* 測度[11]は以下の条件を満たすとき *Lebesgue* 的と言われる：
(1) 任意の有界な *Borel* 集合の測度は有限で、空でない限り正である。
(2) 測度は平行移動で不変である[12]。

定理 1.1 可分な無限次元 *Hilbert* 空間には非自明な *Lebesgue* 的な *Borel* 測度は存在しない。

証明：H は可分だから、可算個の直交基底 $\{e_1, e_2, \cdots\}$ がとれる[13]。H の Borel 集合族 $\mathcal{B}(H)$ 上の非自明な Lebesgue 的な Borel 測度 μ があったと仮定する。開集合を

$$B_n = \{u \in H \,\big|\, \|u - e_n\| < \frac{1}{2}\} \quad \text{であり} \quad B = \{u \in H \,\big|\, \|u\| < 2\}.$$

と定めると、$n \neq m$ ならば $B_n \cap B_m = \emptyset$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \subset B$ である。Lebesgue 的（この場合は回転不変でもよい）と仮定しているので、

$$0 < \mu(B_1) = \mu(B_2) = \cdots < \infty, \quad \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \mu(B) < \infty. \quad \text{矛盾 !}\square$$

1.3 既存の結果の整理

$$\boxed{\text{Lagrange 力学}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Hamilton 力学}}$$

$$L(\gamma, \dot{\gamma}) \overset{\text{Legendre 変換}}{\longleftrightarrow} H(q, p)$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Liouville 方程式}} \arrow[r, "\text{量子化}"] \arrow[d] & \boxed{\text{Heisenberg 描像}} \arrow[d] \\
\boxed{\text{Hamilton 方程式}} \arrow[r, "\text{量子化}"] & \boxed{\text{Schrödinger 描像}}
\end{tikzcd}$$

古典力学

$$\boxed{\text{Hamilton 方程式}} \begin{cases} \dot{q} = H_p(q, p), \\ \dot{p} = -H_q(q, p), \end{cases} \quad \text{with} \quad \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{q} \\ \underline{p} \end{pmatrix},$$

[11] Borel 集合族上の測度
[12] 位相空間 X には平行移動という概念が定義されているとして！
[13] Hilbert-Schmidt の直交化は底が可算無限個でも成立するが、もし連続濃度だったら？ついでに可分でない Hilbert 空間についても調べてみよ

$$\text{i.e.}\quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \mathbb{J}\begin{pmatrix} H_q \\ H_p \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Liouville 方程式}}\ \dot{\phi} = \{\phi, H\} = \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial\phi}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial\phi}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\right) \quad \text{with} \quad \phi(0,q,p) = \underline{\phi}(q,p).$$

$\boxed{\textbf{量子力学}}$ "$L(\gamma,\dot{\gamma})$ or $H(q,p) \to \hat{H} = \hat{H}(q, -i\hbar\partial_q)$"

(S) 状態関数 $u(t)$ の時間的変動を規制する方法：

$$\boxed{\text{Schrödinger 描像}}\ i\hbar\frac{\partial u(t)}{\partial t} = \hat{H}u(t) \quad \text{with} \quad u(0) = \underline{u},$$

i.e. $u(t) = e^{-i\hbar^{-1}t\hat{H}}\underline{u}$.

(H) 力学量演算子 $\hat{F}(t)$ の時間的変動を規制する方法：

$$\boxed{\text{Heisenberg 描像}}\ i\hbar\frac{d}{dt}\hat{F}(t) = [\hat{F}(t), \hat{H}] \quad \text{with} \quad \hat{F}(0) = \underline{\hat{F}}.$$

(F) Bohr の対応原理を明確にする経路積分表示：

$$\boxed{\text{Feynman 描像}}\ u(t,q) = \int d\underline{q}\, E(t,0,q,\underline{q})\underline{u}(\underline{q})$$

with

$$E(t,0,q,\underline{q}) = \int_{C_{t,q,\underline{q}}} \exp\big(i\hbar^{-1}\int_0^t L(\gamma(s),\dot{\gamma}(s))ds\big) d_F\gamma(\cdot).$$

但し、Feynmann 測度 $D_F\gamma$ は存在しないので、差し当たり

$$E(t,0,q,\underline{q}) \sim D(t,0,q,\underline{q})^{1/2}e^{i\hbar^{-1}S(t,0,q,\underline{q})}, \quad D(t,0,q,\underline{q}) = \det\left(\frac{\partial^2 S(t,0,q,\underline{q})}{\partial q\partial\underline{q}}\right)$$

として「近似」積分作用素を決める。

問題 1. できるだけ広いクラスの Lagrangian L に対して

$$\int d_F\gamma\, e^{i\hbar^{-1}\int_0^t L(\gamma(\tau),\dot{\gamma}(\tau))d\tau}$$

に意味を与えよ！これに対して、藤原大輔[14]は $|\partial_q^\alpha V(q)| \le C_\alpha\,(|\alpha| \ge 2)$ の場合に一つの答えを与えた。
(i) 最も知りたい Coulomb ポテンシャルの場合、即ち、水素原子については、ポテンシャルの特異点のためかできていない！例えば、

[14] D. Fujiwara, *A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation*, J. D'Analyse Math. 35 (1979), pp. 41-96.

(a) $1/|q|$ を $\epsilon > 0$ として $1/(|q|^2+\epsilon)^{1/2}$ と考え計算し最後に ϵ をゼロとするとどうなるか？別の可能性は

(b) 「3 次元 Coulomb ポテンシャルは 4 次元調和振動子の射影として得られる」をどう解釈するか？[15]

(ii) また、$-\Delta + |q|^4$ は本質的に自己共役となることは種々の方法で調べられているが、数学的に基本解を古典的対応物を用いて書き上げることはできていない[16]。
(iii) 藤原の方法で $|\partial_q^\alpha V(q)| \le C_\alpha\ (|\alpha| \ge 2)$ なる場合、parametrix 作用素列の収束は一様であるが、もともとの Lie-Trotter-Kato 積公式は強収束であった。この差をどういう表現形態ならば明確に表示しうるか？一つの可能性は non-standard analysis を用いて経路積分は何をしているのか見ることであろう。

[レポート問題 1-5]:　本質的に自己共役とは何か？Reed-Simon vol I を調べてみよ。

問題 2. この経路積分の Hamilton 的な対応物[17] [18] [19] はどうなるのか：

$$\iint d_F q d_F p\, e^{i\hbar^{-1}\int_0^t H(q(\tau),p(\tau))d\tau}\ ?$$

できるだけ広いクラスの Hamililtonian $H(q,p)$ に対して考察せよ。

1.4 Feynman の呟き

Feynman と Hibbs の教科書[20] の最後 p.355 に以下のような記述がある（下線は私が加えたもの）。

> $\cdots$ <u>path integrals suffer grievously from a serious defect</u>. They do not permit a discussion of spin operators or other such operators in a simple and lucid way. They find their greatest use in systems for which coordinates and their conjugate momenta are adequate. Nevertheless, spin is a simple and vital part of real quantum-mechanical systems. It is a serious limitation that the half-integral spin of the electron does not find a simple and ready representation. <u>It can be handled if the amplitudes and quantities are considered as quarter-</u>

[15]例えば、N.E. Hurt, Geometric Quantization in Action, Reidel Pub.Co., 1983.

[16]とはいえ、S. Albeverio and S. Mazzucchi, *Feynman path integrals for polynomially growing potentials*, J.Functional Analysis 221(2005), 83-121.

[17]C. Garrod, *Hamiltonian Path-Integral Methods*, Review of Modern Physics 38(1966), pp. 483-494.

[18]A. Intissar: *A Remark on the convergence of Feynman path integrals for Weyl pseudo-differential operators on* $\mathbb{R}^n$, Commun. in Partial Differential Equations 7 (1982) pp. 1403-1437.

[19]A. Inoue: *On a "Hamiltonian path-integral" derivation of the Schrödinger equation*, Osaka J.Math.36(1999), pp. 111–150.

[20]R. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, New York, McGraw-Hill Book Co. 1965.

nions instead of ordinary complex numbers, but the lack of commutativity of such numbers is a serious complication.

問題意識：この呟きを数学の問題としてどう処理したら良いのか？

Schrödinger 方程式に対しては対応する古典力学がすぐに作られた（寧ろ元々あった）が、Dirac や Weyl 方程式の場合は一体どうなるのか？もう少し言っておくと、古典力学の量子化で Schrödinger 方程式は得られたが、Dirac や Weyl 方程式に対応する古典力学はあるのか？

この講義の目的は、この問題に肯定的に答えるための道具を揃え、概略を述べることである。問題点は二つある。

● 一つは偏微分方程式系に対応する古典力学とは何か？であり

● もう一つは Hamilton 関数が p に関し 2 次でないと配位空間における任意に与えられた 2 点を結ぶ経路は考えられない、ということである。