

解析学演習 C 1-5 (Lebesgue 測度再考、Fubini の定理他)

2003.7.7

69. 実数列 $\{x_n\}$ が任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{ix_n t} = 1$$

を満たせば $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ であることを示せ。

70. (X, \mathcal{M}, μ) を測度空間とし、 f を X 上の可積分関数とする。このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して、 $E \in \mathcal{M}$ が $\mu(E) < \delta$ を満たせば、 $\int_E f d\mu < \epsilon$ が成り立つことを示せ。

71. f を \mathbf{R} 上の一様連続関数で、かつ \mathbf{R} 上の Lebesgue 可積分関数とする。このとき、

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

を示せ。

72. 以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が \mathbf{R}^n 上の Lebesgue 可測関数ならば、任意の $a \in \mathbf{R}^n$ に対して $f(x+a)$ 、および $f(-x)$ も Lebesgue 可測であることを示せ。

(2) $f(x)$ が \mathbf{R}^n 上 Lebesgue 可積分ならば $f(x+a)$ 、および $f(-x)$ も Lebesgue 可積分であり、

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x+a) dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(-x) dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx$$

が成り立つことを示せ。

72. f を \mathbf{R}^n 上の Lebesgue 可積分関数とする。このとき

$$\lim_{|a| \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+a) - f(x)| dx = 0$$

を示せ。

73. 以下の問いに答えよ。

(1) f が \mathbf{R}^n 上で Lebesgue 可積分ならば、関数

$$\varphi(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx$$

は \mathbf{R}^n の有界連続関数であることを示せ。

(2) f を (1) と同じとする。 f がさらに自然数 m に対して、

$$\int_{\mathbf{R}^n} |x|^m |f(x)| dx < \infty$$

を満たせば、 φ は \mathbf{R}^n 上で C^m -級であることを示せ。

74. f が \mathbb{R} 上で Lebesgue 可積分であって、 $\text{supp } f \equiv \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$ ¹ が有界集合ならば、

$$\varphi(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\zeta x} f(x) dx$$

は $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ の正則関数であることを示せ。

75. f を \mathbb{R} 上の有界連続関数であるとする。 $K(t, x) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ とおく (Heat kernel (熱核) と呼ばれる。)。 $u(t, x) \equiv \int_{\mathbb{R}} K(t, x-y) f(y) dy$ とおくと、 u は次の熱方程式の初期値問題の解であることを示せ。

$$\begin{cases} \lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = f(x) & \text{for } x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) & \text{for } t > 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

76. 集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ が正の Lebesgue 測度を持てば、集合 $\tilde{A} \equiv \{x-y : x, y \in A\}$ は \mathbb{R}^n の原点を内点として含むことを示せ。

77. f を \mathbb{R}^n 上の可積分関数とする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、台がコンパクトな連続関数 f_ε が存在して

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f_\varepsilon| dx < \varepsilon$$

を満たすことを示せ。

78. f を \mathbb{R}^n 上の可積分関数とする。このとき

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx \rightarrow 0$$

を示せ。

79. $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $0 = \delta_1 < \delta_2 < \dots < \delta_n < \dots$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 1$ とし、 g_n ($n = 1, 2, \dots$) を $[0, 1]$ 上の実数値連続関数で台が (δ_n, δ_{n+1}) に入り、

$$\int_0^1 g_n(t) dt = 1$$

を満たすとする。

$$f(x, y) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y)$$

と定義する。このとき f の Lebesgue 測度に関する逐次積分について考察せよ。

¹ $\text{supp } f$ を f の台と呼ぶ。

80. $X = Y = [0, 1]$ 、 μ を X 上の Lebesgue 測度とし

$\mathcal{M} \equiv \{\text{Lebesgue 可測な } X \text{ の部分集合}\}$ とする。

$\mathcal{N} \equiv \{Y \text{ の部分集合}\}$ 、 λ は counting measure 即ち $E \in \mathcal{N}$ に対し

$$\lambda(E) = \begin{cases} \infty & \text{if } \#(E) = \infty, \\ \#(E) & \text{if } \#(E) < \infty \end{cases}$$

とする。

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y, \\ 0 & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

を $(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \times \lambda)$ 上の可測関数としたとき、逐次積分を考察せよ。

81. f, g が可積分ならば、a.e. x に対して

$$f * g(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

は有限で、 $f * g$ も \mathbb{R}^n 上可積分であることを示せ。

82. f, g, h を \mathbb{R}^n 上の可積分関数とする。このとき

$$f * g(x) = g * f(x) \text{ (a.e. } x), \quad (f * g) * h(x) = f * (g * h)(x) \text{ (a.e. } x)$$

を示せ。