実解析 I　追試　　2003 年 12 月 17 日　井上淳

お願い：今後の授業等に役立てたいので、授業、演習、試験、追試の**感想、悪評**を解答用紙に、記して下さい。

1. (a) 可測空間 $(X, \mathcal{M})$ の定義を述べ、例を一つ挙げよ。
(b) $(X, \mathcal{M})$ を可測空間とし、$g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は連続関数で次の条件 (♣) を満たすとする。

$$(\clubsuit) \quad x, y \in \mathbb{R},\ g(x) = g(y) \text{ かつ } h(x) = h(y) \Longrightarrow x = y.$$

このとき、関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し次を示せ。

$$g \circ f,\ h \circ f \text{ が共に } \mathcal{M} \text{ 可測} \Longrightarrow f \text{ が } \mathcal{M} - \text{可測}.$$

2. (a) 測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ の定義を述べ、例を一つ挙げよ。
(b) f を $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上の可積分関数とする。$\{x \in X \mid |f(x)| = \infty\}$ は測度 0 であることを示せ。また $\{x \in X \mid |f(x)| \neq 0\}$ は σ-有限集合であることを示せ。

3. (a) 測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ 上の可積分関数の定義を述べ、例を一つ挙げよ。
(b) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とし、f を X 上の可積分関数とする。このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して、$E \in \mathcal{M}$ が $\mu(E) < \delta$ を満たせば、$\int_E f d\mu < \epsilon$ が成り立つことを示せ。

4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、f_n と f をその上の可積分関数とする (以下 $\|g\| = \int_X |g(x)| d\mu(x)$ と記す)。$n \to \infty$ のとき、μ-a.e. で $f_n \to f$ かつ $\|f_n\| \to \|f\|$ とするならば、

(a) 任意の $E \in \mathcal{M}$ に対して $\int_E |f_n| d\mu \to \int_E |f| d\mu$、(hint: Fatou の補題)

(b) $\|f_n - f\| \to 0$、(hint: Egorov の定理及び上の問題 3 の (b))

(c) 任意の有界可測な ϕ に対して $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \phi d\mu = \int_X f \phi d\mu$、

となることを示せ。

%%%%

メモ：以下の Fatou の補題と Egoroff's Theorem は、上の問題 **4** を解くときにのみ証明なしで用いて良い。他の問題にこれらを適用するときには、証明を要求する。

定理 0.1 (Fatou の補題) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$L^+ = \{f : X \to [0, \infty] \mid f \text{ は可測 }\}$ とする。任意の関数列 $\{f_n\} \subset L^+$ に対し

$$\int \varliminf_{n\to\infty} f_n \leq \varliminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

定理 0.2 (Egoroff's Theorem) $\mu(X) < \infty$ とする。f_n、f を X 上の複素数値可測関数で $f_n \to f$（$a.e.$）なるものとする。任意の $\epsilon > 0$ に対し $\mu(E) < \epsilon$ なる集合 $E \subset X$ があって、E^c 上一様に $f_n \to f$ となる。