実解析 I　期末試験解答例

2003 年 8 月 15 日 (修正)　井上淳

====

◎ 測度論をスッキリ分かった気がしなかった人々のために輪講形式で勉強会をする予定です。詳しくは 10 月に入ったら数学科掲示板に貼り出します。嫌なことから逃げるのではなく「こん畜生」と立ち向かってみませんか？

今回の試験には失敗したが、是非とも単位を欲しいと言う人には、この勉強会に出席し発表することを最低の課題にします。

====

(1) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とし、f を X 上の非負、実数値、有界な $\mathcal{A}$-可測関数とする。$\alpha = \inf\{f(x) \mid x \in X\}$、$\beta = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$ とし、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_j = \left\{ x \in X \;\middle|\; \alpha + \frac{(j-1)(\beta-\alpha)}{n} \le f(x) < \alpha + \frac{j(\beta-\alpha)}{n} \right\} \quad (j = 1, 2, \cdots, n-1),$$

$$A_n = \left\{ x \in X \;\middle|\; \alpha + \frac{(n-1)(\beta-\alpha)}{n} \le f(x) \le \beta \right\},$$

と定義する。f の Lebesgue 和を

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha + \frac{(j-1)(\beta-\alpha)}{n} \right) \mu(A_j)$$

と定めるとき、

$$s_n \to \int_X f d\mu \quad (n \to \infty)$$

となることを示せ。

解答：単関数を

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha + \frac{(j-1)(\beta-\alpha)}{n} \right) \chi_{A_j}(x)$$

と定義すると、f が非負、実数値であるから $\varphi_n \ge 0$ であり、$\int_X \varphi_n(x) d\mu(x) = s_n$ となる。以下を示す：

$$(i)\ \text{任意の}\ x \in X\ \text{に対して} \quad 0 \le \varphi_n(x) \le f(x),$$

$$(ii) \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

(i) の証明：$x \in A_j (j = 1, \cdots, n)$ とすると

$$\varphi_n(x) = \alpha + \frac{(j-1)(\beta-\alpha)}{n} \le f(x)$$

である。A_j の定義から $X = \cup_{j=1}^{n} A_j$ となるから、(i) が示された。

(ii) の証明：$x \in A_j$ に対し

$$\varphi_n(x) \le f(x) < \varphi_n(x) + \frac{\beta - \alpha}{n}$$

となる。故に、任意の $x \in X$ に対して

$$|\varphi_n(x) - f(x)| < \frac{\beta-\alpha}{n} \quad \text{より} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

もし、$\int_X f(x) d\mu(x) < \infty$ ならば、(i), (ii) より優収束定理が適用できて

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x)$$

が従う。また、$\int_X f(x) d\mu(x) = \infty$ のときは、(ii) と Fatou の補題より

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_X \liminf \varphi_n(x) d\mu(x) \le \liminf \int_X \varphi_n(x) d\mu(x) = \liminf s_n$$

だから、両辺 ∞ として $(*)$ が成立する。 $\square$

注意：一瞬 φ_n は n に関して単調増加なように感じることもあろうが、$n=2$ と $n=3$ の場合を比較すれば φ_n は n に関して単調増加ではないことが分る。勿論 φ_{2^k} とすれば、これは k に関して単調増加である。

=====

(2) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を有限測度空間とする。f は非負 $\mathcal{B}$-可測関数で $\int_X f d\mu = C < \infty$ なるものとする。このとき

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) d\mu = \begin{cases} \infty & 0 < \alpha < 1, \\ C & \alpha = 1, \\ 0 & 1 < \alpha < \infty \end{cases}$$

を示せ。（ヒント：(a) $\alpha \geq 1$ のとき、$x \geq 0$ に対し $(1+x)^\alpha \geq 1 + x^\alpha$ となることを示す。(b) $\alpha \geq 1$ のとき、$n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right)$ の $n \to \infty$ での極限が μ-a.e. で存在することを示せ。）

解答：$C = 0$ ならば $f = 0$-a.e. だから任意の $0 < \alpha$ に対して極限は 0 となる。以降、$C > 0$ を仮定する（試験中の質問に対しての答え）。$Z = \{x \mid f(x) = 0\}$ とおく。

● $\alpha = 1$ のとき

$$\int_X n \log\left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu = \int_{Z^c} n \log\left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu = \int_{Z^c} f \frac{n}{f} \log\left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu$$

に注意する。$y > 0$ のとき $y^{-1}\log(1+y) \leq 1$ だから、$0 < f(x) < \infty$ なる x に対して

$$f(x) \frac{n}{f(x)} \log\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right) \leq f(x)$$

であり、$\lim_{y\to 0} y^{-1}\log(1+y) = 1$ だから、優収束定理を用いて

$$\lim_{n\to\infty} \int_{Z^c} f \frac{n}{f} \log\left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu = \int_{Z^c} f d\mu = \int_X f d\mu.$$

● $\alpha > 1$ のとき、ヒント (a) を用いて

$$f(x) \frac{n}{f(x)} \log\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) \leq f(x) \frac{n}{f(x)} \log\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)^\alpha \leq \alpha f(x).$$

また

$$f(x) \frac{n}{f(x)} \log\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right) = f(x) \left(\frac{n}{f(x)}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{n}{f(x)}\right)^\alpha \log\left(1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right)$$

より、$0 < f(x) < \infty$ なる x に対して

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) = 0.$$

優収束定理より

$$\lim_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) d\mu = 0.$$

● $0 < \alpha < 1$ の場合、Fatou の補題より、$\lim_{n\to\infty} (\frac{f}{n})^{-\alpha}\log(1 + (\frac{f}{n})^\alpha) = 1$ に注意して

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) d\mu \geq \int_X \liminf_{n\to\infty} n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) d\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} n \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha = \infty. \qquad \square$$

或いは $E_N = \{x \in X \mid f(x) > 1/N\}$ とするとき

$$\begin{aligned} \int_X n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) d\mu &\geq \int_{E_N} n \log\left(1 + \left(\frac{f}{n}\right)^\alpha\right) d\mu \\ &\geq \int_{E_N} n \log\left(1 + \left(\frac{1}{nN}\right)^\alpha\right) d\mu \\ &= n \log\left(1 + \left(\frac{1}{nN}\right)^\alpha\right) \mu(E_N) \to \infty, \quad n \to \infty \end{aligned}$$

ここで $m=(nN)^{\alpha}$ とおけば

$$n\log\left(1+\left(\frac{1}{nN}\right)^{\alpha}\right)=N^{-1}m^{1/\alpha}\log(1+1/m)\to\infty \quad n\to\infty$$

を用いた。

反省：問題の仮定「$(X,\mathcal{B},\mu)$ を有限測度空間」の「有限」は必要なかったし、「$0<\int_X fd\mu=C<\infty$」とすべきであった。

=====

(3) (a) f,g が $\mathbb{R}$ 上可積分ならば、a.e. x に対して

$$f*g(x)\equiv\int_{\mathbb{R}}f(x-y)g(y)dy$$

は有限で、$f*g$ も $\mathbb{R}$ 上可積分であることを示せ。

(b) f,g,h を $\mathbb{R}$ 上の可積分関数とする。このとき

$$f*g(x)=g*f(x)\ \text{(a.e. }x\text{)},\quad (f*g)*h(x)=f*(g*h)(x)\ \text{(a.e. }x\text{)}$$

を示せ。

解答：(a) Lebesgue 測度の平行移動不変性より、積分記号下での変数変換をして、

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|dx=\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx<\infty$$

に注意する。Fubini の定理と仮定より

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}|f(x-y)g(y)|dydx&=\int_{\mathbb{R}}|g(y)|\left[\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)|dx\right]dy\\&=\int_{\mathbb{R}}|g(y)|dy\cdot\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx<\infty.\end{aligned}$$

これより、Fubini の定理を再度用いて、殆ど到る所の x に対し

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x-y)g(y)|dy<\infty$$

であり $f*g$ も $\mathbb{R}$ 上可積分である。

(b) $\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}|f(x-y)g(y)|dydx<\infty$ より、$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ での変数変換 $z=x-y$, $x=x$ をして、

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}|f(x-y)g(y)|dydx=\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}|f(z)g(x-z)|dzdx.$$

(a) と同様にして $f*g(x)=g*f(x)$ $a.e.x$ が導かれる。

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}}|f(x-z-y)g(y)||h(z)|dzdydx=\int_{\mathbb{R}}|g(y)|dy\cdot\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx\cdot\int_{\mathbb{R}}|h(z)|dz<\infty,$$

なることより、Fubini の定理を用い (a) と同様にして結合側が示される。　□

=====

(4) f を $\mathbb{R}$ 上の複素数値可積分関数とする。$\mathbb{R}$ 上の任意のコンパクト台をもつ複素数値連続関数 h に対して $\int_{\mathbb{R}}f(x)h(x)dx=0$ となるならば、$f(x)=0$ $(a.e.)$ となる、ことを示せ。

（ヒント：極めて気楽に h として、$h=\overline{f}/|f|$（複素共役）と『とれれば』$\int|f|=0$ となるから、結論が得られる。そこで、まず (i) 仮定が満たされているとき、任意の有界可積分関数 g に対して $\int fg=0$ となることを示し、(ii) g_n を $\{x\mid |x|\le n\}\cap\{x\mid 0<|f(x)|<n\}$ 上で $\overline{f(x)}/|f(x)|$、それ以外で 0 と定義し、(i) を用いよ。尚、(i) の証明では、任意の可積分関数 g に対してコンパクト台をもつ複素数値連続関数列 h_n で $\sup|h_n|\le\sup|g|$ と

解答：(i) 任意の有界可積分関数 g に対して $M=\sup|g(x)|$ とおく。一方、『任意の可積分関数 g に対してコンパクト台をもつ複素数値連続関数列 h_n で $\sup|h_n|\le\sup|g|$ となるものがあって、$\lim_{n\to\infty}\int|g-h_n|=0$ とできる』。その $\{h_n(x)\}$ をとると、$\{h_n(x)\}$ は L^1 での収束列だから『$\{h_n(x)\}$ の適当な部分列があって a.e.x で $g(x)$ に収束する』。その部分列を考えることにして、以降『$\{h_n(x)\}$ が a.e.x で $g(x)$ に収束する』とすると、

$$\lim_{n\to\infty} f(x)h_n(x)=f(x)g(x)\quad (a.e.).$$

$\{h_n(x)\}$ の作り方から、$|f(x)h_n(x)|\le M|f(x)|$ かつ $f\in L^1$。故に優収束定理より

$$\int f(x)g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int f(x)h_n(x)dx=0.$$

(ii) $S_n=\{x\mid |x|<n\}$ とおき $g_n(x)$ をヒントのように定義する。(i) の g として g_n をとることにより

$$\int f(x)g_n(x)dx=0.$$

故に

$$f(x)g_n(x)=\begin{cases}|f(x)| & x\in S_n\cap\{x\mid 0<|f(x)|<n\}\text{ のとき},\\ 0 & \text{その他}.\end{cases}$$

$\{f(x)g_n(x)\}$ は n について単調増加で $|f(x)|$ に近づくので、単調収束定理を用いて

$$\int|f(x)|dx=\lim_{n\to\infty} f(x)g_n(x)dx=0.$$

故に $f(x)=0$ a.e.x. $\square$

注意：主張『任意の可積分関数 g に対してコンパクト台をもつ複素数値連続関数列 h_n があって、$\lim_{n\to\infty}\int|g-h_n|=0$ とできる』の証明の概略を述べる。ここに、測度の正則性が使われていることに注意して欲しいからである。

(a) （測度論から）E を可測集合とするとき、任意の ϵ に対して閉集合 F と開集合 G で $F\subset E\subset G$ かつ $\mu(G-F)<\epsilon$ となるものが存在する。

(b) （集合と位相から）(a) の閉集合 F と開集合 G に対し有界な開集合 U があって $G\subset U$ となるとき、$\mathbb{R}$ 上の連続関数 h で以下の性質を満たすものが作れる。

$$0\le h(x)\le 1\quad\text{かつ}\quad h(x)=\begin{cases}1 & F\text{ 上で},\\ 0 & G\text{ の外で}.\end{cases}$$

(c) 『コンパクト台をもつ複素数値連続関数の空間は可積分関数の空間 $L^1(\mathbb{R})$ の中で稠密である』
(c) の証明：$f\in L^1$ とする。$f=u+iv$ ($u=\Re f$,$v=\Im f$) と分解すると、$u^{\pm}$, $v^{\pm}$ も L^1 に属する。各々に付いて主張を示せば良いので、$f\ge 0$ と仮定して主張を証明する。

$\int|f|<\infty$ だから、任意の $\epsilon>0$ に対し n を十分大きく取ると

$$\int_{\mathbb{R}\setminus S_n}|f|<\epsilon$$

である。そこで

$$f_n=\begin{cases}f(x) & x\in S_n,\\ 0 & x\notin S_n,\end{cases}$$

と定めると

$$\|f-f_n\|=\int_{\mathbb{R}}|f(x)-f_n(x)|dx=\int_{\mathbb{R}\setminus S_n}|f(x)-f_n(x)|dx<\epsilon.$$

この $f_n\ge 0$ に対し非負単関数の単調増加列で f_n を極限関数とするもの g がとれる。

$$f_n(x)\ge g(x)\ge 0,\quad \|f_n-g\|=\int(f_n(x)-g(x))dx<\epsilon$$

ここで、g は以下のように表示される：E_j は可測集合で

$$g(x)\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\chi_{E_j}(x), \qquad \alpha_j>0,\ E_j\subset S_n.$$

(a) における ϵ として $\epsilon/(N\alpha_j)$ をとり、(b) における閉集合 F と開集合 G を閉集合 F_j と開集合 G_j とする。

$$\|\chi_{E_j}-h_j\|=\int|\chi_{E_j}(x)-h_j(x)|dx\le\int_{G_j\setminus F_j}1dx=\mu(G_j\setminus F_j)<\epsilon/(N\alpha_j).$$

そこで、

$$h(x)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j h_j(x)$$

とおくと、h は連続なコンパクト台をもつ関数である（$x\notin S_n$ ならば $h(x)=0$）。

$$\|g-h\|\le\sum_{j=1}^{N}|\alpha_j|\,\|\chi_{E_j}-h_j\|<\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\epsilon/(N\alpha_j)=\epsilon$$

より、$\|f-h\|\le 3\epsilon$ となる。　　□

=====

数名の諸君から感想と悲鳴が寄せられた。参考のために以下に内容のみを記す。

● 実解析第一については自分では相当勉強したつもりなので、どうしても単位が欲しいので、ダメだった場合には救済レポートなどの措置をとってほしいです。試験問題（２）なんかは、家で勉強しててハマッテ解けてなかった問題だったので、今回試験として出題されて、やっぱり解けなくてくやしかったです。やっぱり演習の補コウはやってほしかったです。

● 卒業する為に講義の単位が取れなくても、演習の単位が取れるように宜しくお願いします。

● 講義には１度しか出席していないので、何もいえることがないのですが、３年生のときにまじめに勉強しておけばよかったとつくづく思います。２度もよくわからない試験を受けるのは、なかなかの苦痛です。たぶん単位取得できる点数ではないと思うので、できれば追試を行なっていただきたいと思います。また、卒業を控えながら単位があまり足りていないので、どうしても単位をいただきたいと思っています。ぜひともお願いします。テストに関しては、もう少しヒントがほしいと思いました。他の人はいらないかもしれませんが…。

● 講義：「ルベーグ積分とは？」と講義を受ける前は全くもって興味がわかなかったのですが、こうしてテストが終わってみると、案外使い勝手の良いもののような気がしてきました。講義としては、初めの方は学生に気を遣っていらしたのですが、最終回に近づくにつれ、殆ど黒板の方しか向いて下さらなかったのが、とても残念です。雑談も面白かったです。

演習：かなり丁寧に教えていただけたのは良かったのですが、１回の演習で２人しか発表できなかったりするのはいかがなものでしょうか？本人にとってはいいのですけれども、もう少し、１回の演習で発表できる回数があると良いと思います。