# 実解析 I　第 14 回講義 7 月 14 日 積分論入門 8

## 積分記号下での変数変換則について、続き

● 線形変換下での Lebesgue 積分：線形写像 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を行列 $(T_{ij})=(Te_j,e_i)$（$\{e_i\}$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底）と同一視する。

**定理 0.1** $T\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ とする。

*(a)* $f$ を $\mathbb{R}^n$ 上の *Lebesgue* 可測関数とすると、$f\circ T$ もそうである。$f\geq 0$ か $f\in L^1(\lambda)$ ならば、

$$\int f(x)dx=|\det T|\int f\circ T(x)dx. \tag{1}$$

*(b)* $E\in\mathcal{L}^n$ ならば $T(E)\in\mathcal{L}^n$ であり $\lambda(T(E))=|\det T|\lambda(E)$.

**系 0.2** *Lebesgue* 測度は回転不変である。

● 定理 0.1 を線形写像から微分可能写像に拡張することを考える。

**定義 0.1** $G=(g_1,\cdots,g_n)$ を開集合 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ の中への写像で、各成分 $g_j$ は $C^1$ 級とする。各点 $x$ での微分を $D_xG=((\partial g_i/\partial x_j)(x))$ と書く。$G$ が 1 対 1 で、任意の $x\in\Omega$ で $D_xG$ が可逆のとき $G$ を $C^1$ 微分同型（*diffeomorphism*）という。

注意：陰関数定理より、$G^{-1}:G(\Omega)\to\Omega$ も $C^1$ 微分同型、かつ任意の $x\in\Omega$ で $D_xG^{-1}=(D_{G^{-1}(x)}G)^{-1}$ となる。

**定義 0.2 立方体（cube）**とは、ある $a\in\mathbb{R}^n$ と $h>0$ で $\{x\mid a_j\leq x_j\leq a_j+h\}$ となるものをいう。二つの立方体が**殆ど互いに疎（almost disjoint）**というのを、二つの立方体の内部が交わらないことと定める。

注意：立方体の境界は超平面の有限和に含まれるから Lebesgue 測度は零、だから殆ど互いに疎の立方体は測度論的には互いに疎と扱ってよい。

注意：$\mathbb{R}^n$ に

$$\|x\|=\max_{1\leq j\leq n}|x_j|$$

とノルムを入れると以下の記述に便利である。実際、集合 $\{x\in\mathbb{R}^n\mid\|x-a\|\leq h\}$ は $a$ を中心とする一辺 $2h$ の立方体となる。更に、線形写像 $T=(T_{ij})$ に対しそのノルムを

$$\|T\|=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|T_{ij}|$$

で決めると、任意の $x\in\mathbb{R}^n$ に対し $\|Tx\|\leq\|T\|\|x\|$ が成立する。

**補題 0.3** 任意の開集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ は可算個の殆ど互いに疎な立方体の和で表される。

証明：$k\in\mathbb{N}$ に対し $\mathcal{Q}_k$ で側面幅 $2^{-k}$ で頂点が $m2^{-k}$（$m\in\mathbb{Z}$）にある立方体の集まりとする（$\mathcal{Q}_k$ は $\mathcal{Q}_{k-1}$ の側面を 2 分割して作られたものである)。故に、$\cup_{k=1}^{\infty}\mathcal{Q}_k$ の二つの立方体は片方がもう一方に含まれない限り、殆ど互いに疎である。$F_1$ で、$U$ に含まれる $\mathcal{Q}_1$ の立方体の和集合とする。帰納的に、$F_k$ で、$U$ に含まれる $\mathcal{Q}_k$ の立方体の和集合でその内部が $\cup_{j=1}^{k-1}F_j$ と交わらないものと定義する。すると、$\cup_{j=1}^{\infty}F_j$ は $U$ に含まれる可算個の互い

に疎な立方体の和である。これが $U$ と一致することを示す。実際、$x \in U$ とするならば、$\delta = \inf\{\|x-y\| \mid y \in U\}$ は正、もし $2^{-k} < \delta$ ならば $x$ を含む立方体 $Q \in \mathcal{Q}_k$ は $U$ の部分集合である。故に、$F_k$ の構成より、これらの立方体は $F_k$ の部分集合か或いは $\cup_{j=1}^{k-1} F_j$ に含まれる立方体の部分集合である。どちらの場合も、$x \in \cup_{j=1}^{k} F_j$ となる。
□

**定理 0.4** $\Omega$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合、$G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ を $C^1$ 微分同型とする。

*(a)* $f$ が $G(\Omega)$ 上の *Lebesgue* 可測関数ならば、$f \circ G$ は $\Omega$ 上の *Lebesgue* 可測関数である。もし $f \geq 0$ 或いは $f \in L^1(G(\Omega), \lambda)$ ならば

$$\int_{G(\Omega)} f(x)dx = \int_{\Omega} f \circ G(x) |\det D_x G| dx.$$

*(b)* $E \subset \Omega$ で $E \in \mathcal{L}^n$ ならば、$G(E) \in \mathcal{L}^n$ であり $\lambda(G(E)) = \int_E |\det D_x G| dx$ となる。

証明：定理 0.1 の証明より、Borel 可測関数と集合について上記を証明すれば良い。また、$G$ も $G^{-1}$ も連続なので、可測性について問題は起こらない。

$Q$ を $\Omega$ 内の立方体で、例えば、$Q = \{x \mid \|x-a\| \leq h\}$ とする。平均値の定理より、ある $y = tx + (1-t)a (t \in [0,1])$ があって $g_i(x) - g_i(a) = \sum_j (x_j - a_j)(\partial g_i / \partial x_j)(y)$ となる。故に、$x \in Q$ に対し $\|G(x) - G(a)\| \leq h(\sup_{y \in Q} \|D_y G\|)$。即ち、$G(Q)$ は (側面幅 $\sup_{y \in Q} \|D_y G\|$)$\times$($Q$ の側面幅) の立方体に含まれる。そこで定理 0.1 を用いて、$\lambda(G(Q)) \leq (\sup_{y \in Q} \|D_y G\|)^n \lambda(Q)$ となる。$T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ とし、この評価を $G$ の代わりに $T^{-1} \circ G$ とし定理 0.1 を用いて、

$$\lambda(G(Q)) = |\det T| \lambda(T^{-1}(G(Q))) \leq |\det T| (\sup_{y \in Q} \|T^{-1} D_y G\|)^n \lambda(Q). \tag{2}$$

$D_y G$ は $y$ に関し連続だから、任意の $\epsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ があって $\|y-z\| \leq \delta$ $(y, z \in Q)$ ならば $\|(D_z G)^{-1} D_y G\|^n \leq 1 + \epsilon$ となる。$Q$ をその側面幅が高々$\delta$ で中心が $x_1, \cdots, x_N$ なる殆ど互いに疎な立方体 $Q_1, \cdots, Q_N$ に分割する。式(2) を、$Q$ を $Q_j$ に置き換え $T = D_{x_j} G$ として、

$$\begin{aligned}
\lambda(G(Q)) &\leq \sum_{j=1}^{N} \lambda(G(Q_j)) \\
&\leq \sum_{j=1}^{N} |\det D_{x_j} G| \big[\sup_{x \in Q_j} \|(D_{x_j} G)^{-1} D_y G\|\big]^n \lambda(Q_j) \leq (1+\epsilon) \sum_{j=1}^{N} |\det D_{x_j} G| \lambda(Q_j)
\end{aligned}$$

この最後の和は $\int_Q |\det D_x G| dx$ の Riemann 和である。$D_x G$ は $x$ に関し連続で、$\epsilon \to 0$ かつ $\delta \to 0$ として

$$\lambda(G(Q)) \leq \int_Q |\det D_x G| dx$$

上式が $\Omega$ 内の任意の Borel 集合に対して成立することを示す。$\Omega$ の開集合 $U \subset \Omega$ をとると、補題 0.3 より、$Q_j$ を殆ど互いに疎な立方体で $U = \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$ とできる。故に、

$$\lambda(G(U)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(G(Q_j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{Q_j} |\det D_x G| dx \leq \int_U |\det D_x G| dx.$$

更に、$E \subset \Omega$ を測度有限な Borel 集合とすると、可測集合の性質に関する定理 [1] より、測度有限な開集合 $U_j \subset \Omega$ で単調減少で $E \subset \cap_{j=1}^{\infty} U_j$ かつ $\lambda(\cap_{j=1}^{\infty} U_j \setminus E) = 0$ なるものがとれる。故に、優収束定理 (The dominated convergence

[1] $E$ を可測集合とすると、$m(E) = \inf\{m(U) \mid U \supset E, U \text{ は開集合 }\} = \sup \inf\{m(K) \mid K \subset E, K \text{ はコンパクト }\}$

theorem)[2]を用いて

$$\lambda(G(E)) \le \lambda(G(\cap_{j=1}^{\infty} U_j)) = \lim_{j\to\infty} \lambda(G(U_j))$$
$$\le \lim_{j\to\infty} \int_{U_j} |\det D_x G| dx = \int_E |\det D_x G| dx.$$

$\lambda$ は $\sigma$-有限測度だから、任意の Borel 集合 $E \subset \Omega$ に対し $\lambda(G(E)) \le \int_E |\det D_x G| dx$ となる。

$f = \sum a_j \chi_{A_j}$ を $G(\Omega)$ 上の非負階段関数とすると、

$$\int_{G(\Omega)} f(x)dx = \sum a_j \lambda(A_j) \le \sum a_j \int_{G^{-1}(A_j)} |\det D_x G| dx = \int_\Omega f\circ G(x) |\det D_x G| dx.$$

定理[3] と単調収束定理より、任意の非負関数 $f$ に対し

$$\int_{G(\Omega)} f(x)dx \le \int_\Omega f\circ G(x)|\det D_x G|dx$$

上記の論法は $G$ を $G^{-1}$ に、$f$ を $f\circ G$ に置き換えても成立するから、

$$\int f\circ G(x)|\det D_x G|dx \le \int_{G(\Omega)} f\circ G\circ G^{-1}(x)|\det D_{G^{-1}(x)}G||\det D_x G^{-1}|dx = \int_{G(\Omega)} f(x)dx$$

これらより、$f \ge 0$ のとき (a) が成立することを、そして $f \in L^1$ に対しても (a) が成立することも示している。$f = \chi_{G(E)}$ のとすると、(b) は (a) の特別な場合だから成立する。 □

● もっとも重要な非線形座標変換として極座標変換がある。そこで、単位球面 $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ 上の測度を定めることを考える。

$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $r = |x|$、$\omega = x/|x|$ とすると、$\Phi(x) = (r, \omega)$ は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ から $(0,\infty)\times S^{n-1}$ への連続な全単射となる。その逆関数は $\Phi^{-1}(r,\omega) = r\omega$ と与えられる。$\lambda_*$ を $(0,\infty)\times S^{n-1}$ 上の Borel 測度で $\Phi$ により Lebegue 測度から導かれたものとする、即ち、$\lambda_*(E) = \lambda(\Phi^{-1}(E))$ とする。更に、$(0,\infty)$ 上の測度 $\rho = \rho_n$ を $\rho(E) = \int_E r^{n-1}dr$ で定める。

**定理 0.5** $S^{n-1}$ 上に一意的な *Borel* 測度 $\sigma = \sigma_{n-1}$ で $\lambda_* = \rho\times\sigma$ となるものが存在する。$f$ を $\mathbb{R}^n$ 上の *Borel* 可測関数で $f \ge 0$ 或いは $f \in L^1(\lambda)$ とすると、

$$\int f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(r\omega) r^{n-1} d\sigma(\omega) dr. \tag{3}$$

証明：$f$ が特性関数のとき、式(3) は $\lambda_* = \rho\times\sigma$ の言い換えである。一般の $f$ に対して式(3) が成立することは、線形性と近似によって示される。これより、この定理の最初の主張を示せばよい。$E$ を $S^{n-1}$ 上の Borel 集合とし $a > 0$ とし、

$$E_a = \Phi^{-1}((0,a]\times E) = \{r\omega \mid 0 < r \le a,\ \omega \in E\}$$

を考える。もし式(3) が $f = \chi_{E_1}$ に対して成立するとすると

$$\lambda(E_1) = \int_0^1 \int_E r^{n-1} d\sigma(\omega) dr = \sigma(E)\int_0^1 r^{n-1}dr = n^{-1}\sigma(E)$$

となるから、$\sigma(E) = n\lambda(E_1)$ と定義する。写像 $E \to E_1$ は Borel 集合を Borel 集合に写し、集合の積、和、補集合をとる操作と可換であるから、$\sigma$ は $S^{n-1}$ 上の Borel 測度である。$E_a$ は $E_1$ の写像 $x \to ax$ による像であるから、定理 0.1 より $\lambda(E_a) = a^n\lambda(E_1)$ となる。もし、$0 < a < b$ ならば、

$$\lambda_*((a,b]\times E) = \lambda(E_b \setminus E_a) = n^{-1}(b^n - a^n)\sigma(E) = \sigma(E)\int_a^b r^{n-1}dr = \rho\times\sigma((a,b]\times E).$$

[2]今までの講義で、有界収束定理といっていたのだが、日本では一般に「Lebesgue の収束定理」と言っているようである。私はより忠実な訳として「有界」といったつもりだが、誤解を招くようである。しかし、多くの英語の教科書には、「Lebesgue's convergence theorem」という記述はなく、あるとすると「Lebesgue's dominated convergence theorem」である。そこで、Cauchy-Kowalevski の定理に関する「優級数」をもじって、「優収束定理」と言ってみる

[3]可測関数の単関数による近似

$E\in\mathcal{B}_{S^{n-1}}$ を固定し、$\mathcal{A}_E$ で集合 $(a,b]\times E$ の互いに疎な有限和のなす集合族とする。命題[4] より、$\mathcal{A}_E$ は $(0,\infty)\times E$ 上の集合代数で、$\sigma$-代数 $\mathcal{M}_E=\{A\times E \mid A\in\mathcal{B}_{(0,\infty)}\}$ を生成する。前の計算で $\mathcal{M}_E$ 上で $\lambda_*=\rho\times\sigma$ となることは示されている。しかし、$\cup\{\mathcal{M}_E \mid E\in\mathcal{B}_{S^{n-1}}\}$ は $(0,\infty)\times S^{n-1}$ 上の Borel 長方形だから、再度、一意性定理より、任意の Borel 集合上で $\lambda_*=\rho\times\sigma$ となる。 □

注意：式(3) は測度 $\sigma$ の完備化を考慮すれば、Lebesgue 可測関数に対しても拡張される。

注意：球面 $S^{n-1}$ 上の球面測度 $\sigma$ は以下のように具体的に計算される：$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ とするとき、$S^{n-1}$ を $(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-2},\theta)$（$0\le\varphi_j\le\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi$）で径数表示すると

$$x_1=\cos\varphi_1,\quad x_2=\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\quad x_3=\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,$$
$$x_{n-1}=\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\theta,\quad x_n=\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\theta,$$

となる。すると、

$$\sigma(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-2},\theta)=\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}d\varphi_1\cdots d\varphi_{n-2}d\theta.$$

**系 0.6** $f$ を $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数で非負か可積分であり、$(0,\infty)$ 上のある関数 $g$ を用いて $f(x)=g(|x|)$ と書けているとする。

$$\int f(x)dx=\sigma(S^{n-1})\int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr.$$

**系 0.7** 任意の $a>0$ に対して $B_a=\{x\in\mathbb{R}^n \mid |x|<a\}$ とし、$f$ を $\mathbb{R}^n$ 上の可測関数とする。*(a)* ある $C>0$ と $\alpha<n$ があって、$B_a$ 上で $|f(x)|\le C|x|^{-\alpha}$ となるならば、$f\in L^1(B_a)$ である。もし $B_a$ 上で $|f(x)|\ge C|x|^{-n}$ となるならば、$f\notin L^1(B_a)$ である。*(b)* ある $C>0$ と $\alpha>n$ があって、$B_a^c$ 上で $|f(x)|\le C|x|^{-\alpha}$ となるならば、$f\in L^1(B_a^c)$ である。もし $B_a^c$ 上で $|f(x)|\ge C|x|^{-n}$ となるならば、$f\notin L^1(B_a^c)$ である。

証明： 関数 $|x|^{-\alpha}\chi_{B_a}$ と $|x|^{-\alpha}\chi_{B_a^c}$ に系 0.6 を適用せよ。 □

**命題 0.8** 任意の $a>0$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-a|x|^2}dx(=I_n)=\left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}.$$

証明：系 0.6 より $I_2=\pi/a$ が分かる。一方、$e^{-a|x|^2}=\prod_{j=1}^n e^{-ax_j^2}$ だから、Tonelli の定理より $I_n=(I_1)^n$ が従い、更に、$I_1=(I_2)^{1/2}$ だから、望みの値が求まる。 □

Gamma 関数を

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \quad (x>0)$$

と定義する。$\Gamma(1)=1$、$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$、$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ なる性質を持つことは良く知られている。それから

$$\Gamma(n)=n!,\quad \Gamma(n+\frac{1}{2})=(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2})\sqrt{\pi}.$$

**命題 0.9**

$$\sigma(S^{n-1})=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

証明：系 0.6 と命題 0.8 と置換 $s=r^2$ により

$$\pi^{n/2}=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|x|^2}dx=\sigma(S^{n-1})\int_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2}dr=\frac{\sigma(S^{n-1})}{2}\int_0^\infty s^{(n-2)/2}e^{-s}ds=\frac{\sigma(S^{n-1})}{2}\Gamma(\frac{n}{2}). \qquad \square$$

[4] 基本族から加法族を生成する

**系 0.10** $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ とおくと

$$\lambda(B^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma((n/2)+1)}.$$

証明：

$$\lambda(B^n) = \sigma(S^{n-1}) \int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{\sigma(S^{n-1})}{n} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma((n/2)+1)}. \qquad \square$$

## 何故、積分表示が大切なのか？

### 典型例としての Stirling の公式

Stirling の公式として以下が知られている。

$$n! = \Gamma(n) = \sqrt{2\pi} n^{n-2^{-1}} e^{-n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \qquad (n \to \infty).$$

これを、Laplace の方法で説明する。

(i) 任意の正整数 $k$ に対し

$$I_\delta(x) = \int_{-\delta}^{\delta} e^{-xs^2} ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xs^2} ds + o(x^{-k}) \qquad (x \to +\infty).$$

これは $I_\delta(x)$ の値は $x$ が十分大きいとき $s=0$ の近くだけで殆ど決まることを示している。

(ii) $\varphi \in C^m([-\delta, \delta])$ とし、任意の正整数 $j$ に対し

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-xs^2} \varphi(s) ds = \sum_{k=0}^{[2^{-1}(m-1)]} \frac{\Gamma(k+2^{-1})}{(2k)!} \varphi^{(2k)}(0) + O(x^{-2^{-1}(m+1)}) + o(x^{-j}) \qquad (x \to +\infty).$$

(iii) $h$ を十分滑らかで下に凸な関数で $s=a$ で最小値を持つとすると

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta} e^{-xh(s)} \varphi(s) ds = e^{-xh(a)} \left\{ \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{x}} \varphi(a) \frac{1}{\sqrt{h''(a)}} \big(1 + O(x^{-1})\big) + o(x^{-j}) \right\}.$$

(iv) $\Gamma$ 関数の積分表示に対し、変数変換

$$t = xs, \quad h(s) = s - \log s, \quad \varphi(s) = \frac{1}{s}$$

をし

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt = x^x \int_0^\infty e^{-xh(s)} \varphi(s) ds$$

を得る。これに (iii) の結果を適用し、$x = n+1$ とおけば、望みの公式が得られる。

この例でも明らかなように、積分記号下での座標変換、部分積分が極めて重要な計算技術となっている。

注意（Stirling の公式の別法）：$a_n = \frac{n!}{n^{n+1}e^n} \to \sqrt{2\pi}$ とおくと

$$\log \frac{a_n}{a_{n+1}} = (n + \frac{1}{2}) \log(1 + \frac{1}{n}) - 1$$

となる。関数 $y = 1/x$ は凸なることを用いて面積を比較して

$$\frac{1}{1+1/n} < \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}).$$

故に

$$0 < \log\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{4n(n+1)}.$$

$n$ から $2n-1$ まで加えあわせて

$$0 < \log\frac{a_n}{a_{2n}} < \frac{1}{4}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}) = \frac{1}{8n}.$$

故に、$a_n/a_{2n} \to 1$ となる。$n! = n^{n+1/2}e^{-n}a_n$ だから、Wallice の公式を用いて

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi} &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\frac{n^{2n+1}e^{-2n}a_n^2}{(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}a_{2n}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2}}\frac{a_n}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

積分の評価に停留点の方法 (stationary phase method)、鞍点法 (saddle point method)、最速降下法 (method of steepest descent)、等が良く用いられる。

少々独断的だが、解析学の基礎は Taylor 展開、Fourier 変換、部分積分、積分記号下での座標変換、が柱である。Taylor 展開以外は積分が必要なのだから、無限次元空間での積分論が出来ない限り、無限次元空間上の解析学の将来はない！

問題：経路積分は無限次元空間での停留点の方法を用いて Bohr の対応原理を導きだしている。これを数学の枠組みで捉えることができるような積分論を探せ！

## Lebesgue 積分とそれから

前回の講義でも少し述べたように、少なくとも私は「測度論」があまり好きになれない。Riemann 積分より都合が良く使いやすい積分論として Lebesgue 積分を教え込まれ、必要な道具として測度論も飲み込まされてきた。もうすぐ還暦という歳になって、幸運にも実解析第 1 を受け持つことになり、「積分論とは何か？」を見直す機会に恵まれた。結果として、積分論と測度論は分けて考えられるのではないか？ということになってきた。

以下にその新しい積分論の由来と可能性の極く一部だが、述べてみたい。

例えば、積分

$$\int_{10^{-3}}^{10^3} t^{-1}\sin t^{-1}dt$$

の値を求めることを考える。区間 $[10^{-3},10^3]$ において、$[10^{-3},1]$ の部分は細かく、$[1,10^3]$ の部分は粗く分割して積分を近似する方が効率的で、このような分割を局所的に細かい分割といい、Riemann 積分の一様に細かい分割とは大いに異なる結果を生み出す。

**定義 0.3** 任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対し

$$[a,b] = \{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$$

を**区間**と呼ぶ。$a\ge b$ のとき $[a,b]$ は**退化区間**と言い、**非退化な区間**を**セル、室**という。また、内部が互いに疎の区間の集まりを**非重複**という。

**定義 0.4** $S\subset\mathbb{R}$ 上で定義された $F$ をとり、区間 $[a,b]\subset S$ に対し

$$F([a,b]) = \begin{cases} F(b)-F(a) & if\ a\le b \\ 0 & if\ a>b. \end{cases}$$

とおく。$S$ の部分区間に対しても同様に定義し $F$ を**随伴区間関数**という。

**定義 0.5** $S \subset \mathbb{R}$ 上の増加関数 $\alpha$ をとる。このとき、$\alpha$ の随伴区間関数は非負であり、それを $S$ の中での**長さ**という。$S$ の任意の部分区間 $B$ に対し、非負な数 $\alpha(B)$ を $B$ の **$\alpha$-長さ**という。

特に $\lambda(x) = x$ のとき、$\mathbb{R}$ での $\lambda$ に随伴した長さを **Lebesgue 長さ**という。

**定義 0.6** $A_1, \cdots, A_p$ が非重複なセルで、点 $x_1, \cdots, x_p$ が $\mathbb{R}$ に属するとき、集まり

$$P = \{(A_1, x_1), (A_2, x_2), \cdots, (A_p, x_p)\}$$

を、**Lebesgue 仕切り**或いは単に**仕切り（partition）**という。特に、任意の $i \in \{1, \cdots, p\}$ に対し $x_i \in A_i$ なるとき $P$ を **Perron 仕切り**或いは **P-仕切り (or a tagged partition)** という。

**定義 0.7** $E \subset \mathbb{R}$ 上で定義された正の関数 $\delta$ をとる。$\{x_1, \cdots, x_p\} \subset E$ なる仕切り $\{(A_1, x_1), \cdots, (A_p, x_p)\}$ が **$\delta$-細**とは、任意の $i \in \{1, \cdots, p\}$ に対し $A_i \subset U(x_i, \delta(x_i))$ となることである。$\{(A_1, x_1), \cdots, (A_p, x_p)\}$ を仕切り、$A$ をセルとする。$\{x_1, \cdots, x_p\}$ と $\cup_{i=1}^p A_i$ とが $A$ の部分集合のとき、$P$ を $A$ の**中の**仕切り、特に $A = \cup_{i=1}^p A_i$ のとき $P$ を $A$ **の**仕切りと呼ぶ。

**命題 0.11 (Cousin の補題: Prop.1.2.4, p.6, Pfeffer)** *セル $A$ 上の任意の正関数 $\delta$ に対し $\delta$-細なる $A$ の Perron 仕切りが存在する*

証明：$A = [a, b]$ とし $c \in (a, b)$ とするとき、$P_a$ と $P_b$ を、それぞれ $[a, c]$ と $[c, b]$ の $\delta$-細 P-仕切りとすると、$P = P_a \cup P_b$ は $A$ の $\delta$-細 P-仕切りとなる。これに注意し、補題の主張を背理法で証明する。

補題が偽として、セルを 2 等分すると、少なくとも片方には $\delta$-細 P-仕切りが存在しない。そこで、セルを以下を満たすように作る。

$$A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots$$

であって、$n = 0, 1, \cdots$ に対して $A_n$ には $\delta$-細 P-仕切りが存在せず、その長さが $\lambda(A_n) = (b - a)2^{-n}$ を満たす。区間縮小法で $\cap_{n=0}^{\infty} A_n = \{z\}$ なる $z \in A$ が存在する。$\delta(z) > 0$ だから整数 $k \geq 0$ があって $\lambda(A_k) < \delta(z)$ となるから、$\{(A_k, z)\}$ は $A_k$ の $\delta$-細 P-仕切りであり、背理法の仮定に矛盾する。 □

**命題 0.12 (Fineness Theorem:p.257. of Bartle)** *$I = [a, \infty]$ とし、$\delta$ を $I$ 上の正の関数とすると、$I$ の $\delta$-細仕切りが存在する。*

**系 0.13** *セル $A$ 上の正関数 $\delta$ をとる。任意の $A$ の中の $\delta$-細仕切り $P$ は $A$ の $\delta$-細仕切り $Q$ の部分集合である。ここで、$P$ が Perron ならば $Q$ も Perron ととれる。*

**定義 0.8 (Stieltjes 和)** セル $A$ 上の増加関数 $\alpha$ と $A$ の中の仕切り $P = \{(A_1, x_1), \cdots, (A_p, x_p)\}$ をとる。$\{x_1, \cdots, x_p\}$ 上の任意の関数 $f$ に対し、

$$\sigma(f, P, \alpha) = \sum_{i=1}^{p} f(x_i)\alpha(A_i)$$

とおき、この数を $P$ に随伴した $f$ の **$\alpha$-Stieltjes 和**或いは **Stieltjes 和**と呼ぶ。

## 0.1 McShane 積分

### 0.1.1 McShane 積分の定義

**定義 0.9** $\alpha$ をセル $A$ 上の増加関数とする。$A$ 上の関数 $f$ が $\alpha$ に関し $A$ 上**可積分**とは、以下の性質を持つ実数 $I$ が存在することである：任意の $\epsilon > 0$ に対し $A$ 上の正関数 $\delta$ があって、$A$ の任意の $\delta$-細仕切り $P$ に対し

$$|\sigma(f, P; \alpha) - I| < \epsilon$$

となる。

**注意**： Cousin の補題より、上の定義の数 $I$ は一意的に定まるので、それを

$$I = \int_a^b f d\alpha, \quad \int_A f d\alpha,$$

と表示し、**McShane 型 Riemann 積分**或いは単に **McShane 積分**という。特に、$\alpha$ に関し $A$ 上で可積分な関数全体を $\mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A, \alpha)$ と書く。

**補題 0.14** セル $A$ 上の関数が $\mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A, \alpha)$ に属しているとは、任意の $\epsilon > 0$ に対し、以下の性質を満たすセル $A$ 上の正関数 $\delta$ があることである：任意の $A$ の $\delta$-細仕切り $R = \{(A_1, x_1), \cdots, (A_n, x_n)\}$ と $S = \{(A_1, y_1), \cdots, (A_n, y_n)\}$ に対して

$$|\sigma(f, R; \alpha) - \sigma(f, S; \alpha)| < \epsilon$$

となる。

**補題 0.15 (Henstock lemma)** $A$ をセルとし、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A, \alpha)$ とする。任意の $\epsilon > 0$ に対し、以下の性質を満たすセル $A$ 上の正関数 $\delta$ が存在する：$A$ の中の $\delta$-細仕切り $\{(A_1, x_1), \cdots, (A_p, x_p)\}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{p} \left| f(x_i)\alpha(A_i) - \int_{A_i} f d\alpha \right| < \epsilon.$$

**Riemann 積分不可能な関数でも局所的に細かい仕切りを用いると McShane 積分可能となることがある。** 例えば、Dirichlet 関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

は区間 $[0, 1]$ 上で Riemann 積分可能ではない。しかし、任意の $\epsilon > 0$ をとり $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_1, r_2 \cdot \cdots\}$ と並べるとき、$[0, 1]$ 上の関数を

$$\delta(x) = \begin{cases} \epsilon 2^{-n-1} & \text{if } x = r_n \text{ and } n = 1, 2, \cdots \\ 1 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

と定める。そこで、$P = \{(A_1, x_1), (A_2, x_2), \cdots, (A_p, x_p)\}$ を $[0, 1]$ の $\delta$-細仕切りをとる。もし $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ が $r_n$ に一致するならば

$$\cup_{j=1}^{k} A_{i_j} \subset U(r_n, \delta(r_n))$$

であり

$$\sum_{j=1}^{k} f(x_{i_j})\lambda(A_{i_j}) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(A_{i_j}) < \epsilon 2^{-n}$$

となる。$x$ が無理数のとき $f(x) = 0$ だから

$$0 \le \sigma(f, P, \lambda) < \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 2^{-n} = \epsilon.$$

### 0.1.2 McShane 積分での収束定理

**定理 0.16 (単調収束定理)** $f$ をセル $A$ 上の関数とし、$\{f_n\}$ を $\mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A, \alpha)$ 内の関数列とする。もし $f_n \nearrow f$ であり $\lim \int_A f_n d\alpha$ が有限ならば、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A, \alpha)$ であり

$$\int_A f d\alpha = \lim \int_A f_n d\alpha.$$

証明：任意に $\epsilon > 0$ と $n = 1, 2, \cdots$ をとる。Henstock の補題を用いると、$A$ 上の正関数 $\delta_n$ があって、$A$ の中の任意の $\delta_n$-細仕切り $\{(B_1, y_1), \cdots, (B_q, y_q)\}$ に対し

$$\sum_{i=1}^{q} \left| f_n(y_i)\alpha(B_i) - \int_{B_i} f_n \right| < \epsilon 2^{-n}$$

となる。$I = \lim \int_A f_n$ とし、正整数 $r$ を $\int_A f_r > I - \epsilon$ なるようにとる。各 $x \in A$ に対し $|f_{n(x)}(x) - f(x)| < \epsilon$ なる整数 $n(x) \geq r$ を選ぶ。$A$ 上の関数 $\delta$ を、$x \in A$ に対し $\delta(x) = \delta_{n(x)}(x)$ と定める。

Claim: $A$ の任意の $\delta$-細仕切り $P = \{(A_1, x_1), \cdots, (A_p, x_p)\}$ に対し

$$|\sigma(f, P; \alpha) - I| < \epsilon[2 + \alpha(A)]$$

まず

$$|\sigma(f, P; \alpha) - \sum_{i=1}^{p} f_{n(x_i)}(x_i)\alpha(A_i)| \leq \sum_{i=1}^{p} |f(x_i) - f_{n(x_i)}(x_i)|\alpha(A_i) \leq \epsilon \sum_{i=1}^{p} \alpha(A_i) = \epsilon\alpha(A).$$

整数 $\{n(x_i)\}$ は必ずしも異なっていなくとも良い。もし

$$\{n(x_1), \cdots, n(x_p)\} = \{k_1, \cdots, k_s\} \quad k_1 < \cdots < k_s$$

とすると、$T_j = \{i \mid n(x_i) = k_j\}$ とおいて $\{1, \cdots, p\} = \cup_{j=1}^{s} T_j$ となることに注意する。各 $i \in T_j$ にたいし

$$A_i \subset U(x_i, \delta(x_i)) = U(x_i, \delta_{n(x_i)}(x_i)) = U(x_i, \delta_{k_j}(x_i))$$

となることより、$\{(A_i, x_i) \mid i \in T_j\}$ は $A$ の中で $\delta_{k_j}$-細仕切りである。故に、

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{p} f_{n(x_i)}(x_i)\alpha(A_i) - \sum_{i=1}^{p} \int_{A_i} f_{n(x_i)} \right| &\leq \sum_{j=1}^{s} \sum_{i \in T_j} \left| f_{k_j}(x_i)\alpha(A_i) - \int_{A_i} f_{k_j} \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{s} \epsilon 2^{-k_j} < \sum_{k=1}^{|infty} \epsilon 2^{-k} = \epsilon.
\end{aligned}$$

$r \leq n(x_i) \leq k_s i = 1, \cdots, p$ 積分の線形性、正値性と区間分割可能性より

$$I - \epsilon < \int_A f_r = \sum_{i=1}^{p} \int_{A_i} f_r \leq \sum_{i=1}^{p} \int_{A_i} f_{n(x_i)} \leq \sum_{i=1}^{p} \int_{A_i} f_{k_s} = \int_A f_{k_s} \leq I < I + \epsilon$$

となる。故に

$$\left| \sum_{i=1}^{p} \int_{A_i} f_{n(x_i)} - I \right| < \epsilon. \qquad \square$$

**補題 0.17** セル $A$ 上で $f_n, g \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A, \alpha)$ とする。任意の $n = 1, 2, \cdots$ に対し $f_n \geq g$ ならば、$\inf f_n \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A, \alpha)$ である。

**命題 0.18 (Fatou の補題)** $f$ をセル $A$ 上の関数とし、$f_n, g \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A, \alpha)$ とし、$n = 1, 2, \cdots$ に対し $f_n \geq g$ とする。もし $f = \liminf f_n$ と $\liminf \int_A f_n d\alpha$ が有限ならば、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A, \alpha)$ であり、

$$\int_A f d\alpha \leq \liminf \int_A f_n d\alpha.$$

**系 0.19 (優収束定理)** $A$をセルとし、$f_n, g \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A, \alpha)$ で $n = 1, 2, \cdots$ に対し $|f_n| \leq g$と仮定する。もし $f = \lim f_n$ ならば、$f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A, \alpha)$ であり

$$\int_A f d\alpha = \lim \int_A f_n d\alpha.$$

### 0.1.3　McShane 積分での基本定理と部分積分公式

**定理 0.20** $f \in \mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A,\alpha)$ とし、各 $x \in [a,b]$ に対し $F(x) = \int_a^x f d\alpha$ とおく。もし $A$ 上 $F$ が連続、かつ $G$ を増加関数とすると、$fG$ は $\mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A,\alpha)$ に、$F$ は $\mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A,G)$ に属し、

$$\int_a^b fGd\alpha = F(b)G(b) - \int_a^b FdG.$$

**命題 0.21** $u$ と $v$ をセル $A$ 上で微分可能とする。もし共に $u'$ と $v'$ が $\mathcal{R}_{\mathrm{M}}(A,\lambda)$ に属するならば、$u'v$ と $uv'$ もそうであり

$$\int_a^b u'vd\lambda = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv'd\lambda.$$

**定理 0.22 (積分の第一中間値定理)** $f$ が $A$ 上連続ならば、$\xi \in A$ があって

$$\int_A fd\alpha = f(\xi)\alpha(A).$$

**定理 0.23 (積分の第二中間値定理)** $A$ 上、$F$ を連続、$G$ を単調とするならば、$\xi \in A$ があって

$$\int_a^b fGd\alpha = G(a)\int_a^\xi fd\alpha + G(b)\int_\xi^b fd\alpha.$$

以上が 1 次元空間での McShane 積分と呼ばれる Riemann 積分の拡張である。これをもう少し改良したものが Henstock-Kurzweil 積分或いは一般化 Riemann 積分と呼ばれるものである。勿論、多次元への拡張もあり、そのメリットもあるようだが、ここでは、述べない。

Bartle の序文に書かれた事柄を信じれば、測度論と位相無しでの積分論の構築が可能とのこと。これが正しければ、経路積分に新しい道が開けるかもしれない！

# 参考文献

[1] R.G. Bartle, A Modern Theory of Integration, Graduate Studies in Mathematics, vol.32 Amer.Math.Soc. Providence,2001.

[2] E.J. McShane, *A unified theory of integration*, Amer.Math.Soc.Monthly 80(1973), pp. 349-359.

[3] ———, Unified Integration, Academic Press, New York, 1983.

[4] W. K. Pfeffer: The Riemann Approach to Integration, Cambridge University Press, New York, 1993.