スーパー解析学入門第10回講義内容– 07.06.25　井上淳

9 線形代数入門

10 微分積分入門

10.1 スーパー空間上の関数の微分

10.2 スーパー空間上の関数の積分

10.2.1 積分の定義

10.2.2 "Berezin 測度" と "Rothstein 測度"

10.2.3 Fourier 変換

11 Wigner の半円則について

11.1 概要

$N\times N$-エルミート行列の集合 $\mathfrak{U}_N$ を位相空間として $\mathbb{R}^{N^2}$ と同一視し、確率測度 $d\mu_N(H)$ を

$$
\begin{gathered}
d\mu_N(H)=\prod_{k=1}^N d(\Re H_{kk})\prod_{j<k}^N d(\Re H_{jk})d(\Im H_{jk})P_{N,J}(H),\\
P_{N,J}(H)=Z_{N,J}^{-1}\exp\big[-\frac{N}{2J^2}\,\mathrm{tr}\ H^*H\big]
\end{gathered}
\tag{11.1}
$$

と定める。ここで、$H=(H_{jk})$, $H^*=(H^*_{jk})=(\overline{H}_{kj})={}^t\overline{H}$ とし、$\prod_{k=1}^N d(\Re H_{kk})\prod_{j<k}^N d(\Re H_{jk})d(\Im H_{jk})$ は $\mathbb{R}^{N^2}$ 上の Lebesgue 測度、$Z_{N,J}^{-1}$ は規格化定数で $Z_{N,J}=2^{N/2}(J^2\pi/N)^{3N/2}$ とする。

さて、$E_\alpha=E_\alpha(H)$ $(\alpha=1,\cdots,N)$ を $H\in\mathfrak{U}_N$ の実固有値、δ を Dirac のデルタ関数とし、

$$
\rho_N(\lambda)=\rho_N(\lambda;H)=N^{-1}\sum_{\alpha=1}^N\delta(\lambda-E_\alpha(H))
\tag{11.2}
$$

とおく。また、$\mathfrak{U}_N$ 上の関数 f に対して

$$
\big\langle f\big\rangle_N=\big\langle f(\cdot)\big\rangle_N=\int_{\mathfrak{U}_N}d\mu_N(H)\,f(H)
$$

とする。このとき、

定理 11.1 (Wigner's semi-circle law)

$$
\lim_{N\to\infty}\big\langle\rho_N(\lambda)\big\rangle_N=w_{sc}(\lambda)=\begin{cases}(2\pi J^2)^{-1}\sqrt{4J^2-\lambda^2} & \textit{for}\quad |\lambda|<2J,\\ 0 & \textit{for}\quad |\lambda|>2J.\end{cases}
\tag{11.3}
$$

注意：(11.3) の極限の意味は、任意の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して

$$\lim_{N\to\infty} \langle \phi, \int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\, N^{-1} \sum_{\alpha=1}^{N} \delta(\cdot - E_\alpha(H)) \rangle = \langle \phi, w_{sc} \rangle = \int_{\mathbb{R}} d\lambda\, \phi(\lambda) w_{sc}(\lambda)$$

とする。ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ と $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の双対を意味する。更に、$\int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\, N^{-1} \sum_{\alpha=1}^{N} \delta(\cdot - E_\alpha(H))$ の意味についても説明が必要だが、少し後に詳しく与える。

この定理の証明には方法が色々あるようだが Efetov [4] によって始められた奇変数を用いるものがこの節の対象である。それを少し分かり易くした、Fyodorov [6] や Brézin [1] (また, Mello [7], Zirnbauer [8]) を参考にした[1]。

新しい証明の副産物として

定理 11.2 (A refined version of Wigner's semi-circle law) *(i)* $|\lambda| < 2J$ なる各 λ に対し、$N \to \infty$ とするとき

$$\langle \rho_N(\lambda) \rangle_N = \frac{\sqrt{4J^2 - \lambda^2}}{2\pi J^2} - \frac{(-1)^N J}{\pi(4J^2 - \lambda^2)} \cos(N[\frac{\lambda\sqrt{4J^2-\lambda^2}}{2J^2} + 2\arcsin(\frac{\lambda}{2J})])N^{-1} + O(N^{-2}). \quad (11.4)$$

(ii) λ が $|\lambda| > 2J$ となるときは、定数 $C_\pm(\lambda) > 0$ と $k_\pm(\lambda) > 0$ があって

$$\left| \langle \rho_N(\lambda) \rangle_N \right| \le C_\pm(\lambda) \exp[-k_\pm(\lambda) N]. \quad (11.5)$$

但し、$\lambda \searrow 2J$ 或は $\lambda \nearrow -2J$ なるときそれぞれ $k_\pm(\lambda) \to 0$ かつ $C_\pm(\lambda) \to \infty$ となる。

定理 11.3 (The spectrum edge problem) $z \in [-1, 1]$ とする。

$$\begin{aligned} \langle \rho_N(2J - zN^{-2/3}) \rangle_N &= N^{-1/3} f(z/J) + O(N^{-2/3}) \qquad \textit{as } N \to \infty, \\ \langle \rho_N(-2J + zN^{-2/3}) \rangle_N &= -N^{-1/3} f(z/J) + O(N^{-2/3}) \qquad \textit{as } N \to \infty, \end{aligned} \quad (11.6)$$

ここで

$$f(w) = \frac{1}{4\pi^2 J}(\mathrm{Ai}'(w)^2 - \mathrm{Ai}''(w)\,\mathrm{Ai}(w)), \quad \mathrm{Ai}(w) = \int_{\mathbb{R}} dx\, \exp[-\frac{i}{3}x^3 + iwx].$$

(A) 前にも説明したように、キーになる表現は、補助の奇変数と偶変数を用いて

$$\langle \rho_N(\lambda) \rangle_N = \pi^{-1} \Im \int_{\mathfrak{Q}} dQ\, \left(\{(\lambda - i0)I_2 - Q\}^{-1}\right)_{bb} \exp[-N\mathcal{L}(Q)] \quad (11.7)$$

とすることにある。ここで I_n は $n \times n$-単位行列とし、

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(Q) = \mathrm{str}\,[(2J^2)^{-1}Q^2 + \log((\lambda - i0)I_2 - Q)], \\ \mathfrak{Q} = \left\{ Q = \begin{pmatrix} x_1 & \rho_1 \\ \rho_2 & ix_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2 \in \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}},\ \rho_1, \rho_2 \in \mathfrak{R}_{\mathrm{od}} \right\} \cong \mathfrak{R}^{2|2}, \ dQ = \frac{dx_1 dx_2}{2\pi} d\rho_1 d\rho_2, \\ \left(((\lambda - i0)I_2 - Q)^{-1}\right)_{bb} = \frac{(\lambda - i0 - x_1)(\lambda - i0 - ix_2) + \rho_1\rho_2}{(\lambda - i0 - x_1)^2(\lambda - i0 - ix_2)}. \end{gathered} \quad (11.8)$$

表現式 (11.7) において パラメータ N は一カ所にしか現れない！. この事実は、Feynman による経路積分を用いた表示、そこでもパラメータ $\hbar$ は一カ所にしか現れない、と同様に魅惑的だが、数学的正当化はまだできていない。少し正確に言うと、表現式 (11.7) で $\lambda - i\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ としたものは正しいのだが、$\epsilon = 0$ とした積分表示式を成立させるためには「新しい積分論」が必要に思われる。

[1]彼らの奇変数の構造は「簡単」であって構わない。

(B) 物理学者の文献、例えば [6],[8] では表示式 (11.7) が成立するものとし、これに直接最速降下の方法 (=method of steepest descent) を用い、更に $N\to\infty$ のときの主要項は「相関数」の臨界点であるとしている。臨界点は

$$\delta\mathcal{L}(Q)\tilde{Q}=\frac{d}{d\epsilon}\mathcal{L}(Q+\epsilon\tilde{Q})\Big|_{\epsilon=0},$$

となるから方程式

$$\delta\mathcal{L}(Q)=\mathrm{str}\,\big(\frac{Q}{J^2}-\frac{1}{\lambda-Q}\big)=0$$

の解を探すとしている。鞍点の起こり得る候補として

$$Q_c=(\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4J^2})I_2,$$

をとり、

$$\lim_{N\to\infty}\big\langle\rho_N(\lambda)\big\rangle_N=\pi^{-1}\Im(\lambda-Q_c)^{-1}_{bb}=w_{sc}(\lambda).\qquad\square$$

11.2 The derivation of (11.7) with $\lambda-i\epsilon$ ($\epsilon>0$ fixed) and its consequences

まず

$$\delta(q)=\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to0}\Im\frac{1}{q-i\epsilon}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to0}\left[\frac{1}{q-i\epsilon}-\frac{1}{q+i\epsilon}\right]=\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to0}\frac{\epsilon}{q^2+\epsilon^2}\quad\text{in }\mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

即ち、任意の $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$\pi^{-1}\Im\int_{\mathbb{R}}dq\,\frac{\phi(q)}{q-i\epsilon}=\pi^{-1}\int_{\mathbb{R}}dq\,\frac{\epsilon\phi(q)}{q^2+\epsilon^2}=\pi^{-1}\int_{\mathbb{R}}dq\,\frac{\phi(\epsilon q)}{1+q^2}\to\phi(0)=\langle\phi,\delta\rangle\quad\text{as }\epsilon\to0$$

となることに注意する。故に、任意に固定した $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対し、

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{U}_N}d\mu_N(H)\langle\phi(\cdot),\frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N\delta(\cdot-E_\alpha(H))\rangle&\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int_{\mathfrak{U}_N}d\mu_N(H)\lim_{\epsilon\to0}\int_{\mathbb{R}}d\lambda\,\phi(\lambda)\frac{1}{\pi N}\sum_{\alpha=1}^N\frac{\epsilon}{(\lambda-E_\alpha(H))^2+\epsilon^2}\\&=\lim_{\epsilon\to0}\int_{\mathfrak{U}_N}d\mu_N(H)\int_{\mathbb{R}}d\lambda\,\phi(\lambda)\frac{1}{\pi N}\sum_{\alpha=1}^N\frac{\epsilon}{(\lambda-E_\alpha(H))^2+\epsilon^2}\quad\text{by Lebesgue's dom. conv. theorem}\\&=\lim_{\epsilon\to0}\int_{\mathbb{R}}d\lambda\,\phi(\lambda)\int_{\mathfrak{U}_N}d\mu_N(H)\frac{1}{\pi N}\sum_{\alpha=1}^N\frac{\epsilon}{(\lambda-E_\alpha(H))^2+\epsilon^2}\quad\text{by Fubini's theorem}\end{aligned}$$

となる。

実際、２番目の等式は、任意の $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ をとると、任意の $\epsilon>0$ と $H\in\mathfrak{U}_N$ に対し

$$\Big|\int_{\mathbb{R}}d\lambda\,\phi(\lambda)\frac{1}{\pi N}\sum_{\alpha=1}^N\frac{\epsilon}{(\lambda-E_\alpha(H))^2+\epsilon^2}\Big|\le\max|\phi(\lambda)|.$$

となることより従う。ここで $\int_{\mathbb{R}}d\lambda\,\epsilon(\lambda^2+\epsilon^2)^{-1}=\pi$ なることを用いている。更に、第３の等式は

$$\Big|\phi(\lambda)\frac{1}{\pi N}\sum_{\alpha=1}^N\frac{\epsilon}{(\lambda-E_\alpha(H))^2+\epsilon^2}\Big|\le\epsilon^{-1}|\phi(\lambda)|,$$

であり、この右辺は、任意に固定した $\epsilon>0$ に対し、積測度 $d\lambda\,d\mu_N(H)$ に関し積分可能なことより従う。

上式最後のラインで、$d\lambda$ に関し積分する前に極限が取れるかどうかは以下の量を詳しく調べれば良い。

$$g(\lambda,\epsilon,N)=\int_{\mathfrak{U}_N} d\mu(H)\frac{1}{\pi N}\Im\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{\lambda-i\epsilon-E_\alpha(H)}. \tag{11.9}$$

この小節で

(i) 任意の $\epsilon>0$ と $N\in\mathbb{N}$ に対し $g(\lambda,\epsilon,N)$ は λ の関数となっている、

(ii) 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対し、$\lim_{\epsilon\to 0} g(\cdot,\epsilon,N)$ は $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の意味で存在し、$\langle\rho_N(\lambda)\rangle_N$ と表記される、
を主張する。

さて

$$\begin{gathered}
z_j=x_j+iy_j,\ \bar{z}_j=x_j-iy_j,\ x_j,\ y_j\in\mathfrak{R}_{\mathrm{ev}};\ \theta_k,\bar{\theta}_k\in\mathfrak{R}_{\mathrm{od}}=\mathfrak{C}_{\mathrm{od}},\\
X={}^t(z,\theta),\ z={}^t(z_1,\cdots,z_N),\ \theta={}^t(\theta_1,\cdots,\theta_N),\\
X^*=(z^*,\theta^*),\ z^*=(\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_N),\ \theta^*=(\bar{\theta}_1,\cdots,\bar{\theta}_N).
\end{gathered}$$

とおき、θ_k と $\bar{\theta}_k$ は別の奇変数の組とする。

以下は良く知られた公式でキーとなるものである：

補題 11.1 $\mu=\lambda-i\epsilon$ $(\epsilon>0)$ とおく。

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\ \frac{1}{\mu I_N-H}&=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{\mu-E_\alpha(H)}\\
&=i\int_{\mathfrak{C}^{N|2N}}\prod_{j=1}^{N}\frac{d\bar{z}_j\,dz_j}{2\pi i}\prod_{k=1}^{N}d\bar{\theta}_k d\theta_k\,(z^*{\cdot}z)\exp\,[-iX^*(I_2\otimes(\mu I_N-H))X].
\end{aligned} \tag{11.10}$$

これを示すために以下が必要である：

補題 11.2 Γ を対角行列でその成分を $(\gamma_1,\cdots,\gamma_N)$ で $\gamma_j\in\mathbb{R}$ なるものとする。$(z^*{\cdot}z)=\sum_{j=1}^{N}\bar{z}_j z_j=|z|^2$ とおくと

$$i\int_{\mathfrak{C}^{N|2N}}\prod_{j=1}^{N}\frac{d\bar{z}_j\,dz_j}{2\pi i}\prod_{k=1}^{N}d\bar{\theta}_k d\theta_k\,(z^*{\cdot}z)\exp\,[-iX^*(I_2\otimes(\Gamma-i\epsilon I_N))X]=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\gamma_j-i\epsilon}. \tag{11.11}$$

証明：公式

$$i\int_{\mathfrak{C}^{N|0}}\prod_{j=1}^{N}\frac{d\bar{z}_j\,dz_j}{2\pi i}\,(z^*{\cdot}z)\exp\,[-iz^*(\Gamma-i\epsilon I_N)z]=\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\gamma_j-i\epsilon}\right)\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\epsilon+i\gamma_j},$$

と

$$\int_{\mathfrak{C}^{0|2N}}\prod_{k=1}^{N}d\bar{\theta}_k d\theta_k\ \exp\,[-i\theta^*(\Gamma-i\epsilon I_N)\theta]=\prod_{k=1}^{N}(\epsilon+i\gamma_k),$$

より (11.11) はすぐに求まる。 □

補題 11.1 の証明: 任意の $N\times N$-エルミート行列 H に対し、Γ として λI_N-H の対角化をとれば、直ちに (11.10) が求まる。 □

補題 11.3 $\mu = \lambda - i\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ とすると、

$$\Big\langle \mathrm{tr}\, \frac{1}{\mu I_N - H} \Big\rangle_N = i \int \prod_{j=1}^{N} \frac{d\overline{z}_j\, dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^{N} d\overline{\theta}_k d\theta_k \, (z^{*}\!\cdot z) \exp\,[-iX^{*}(I_2 \otimes \mu I_N)X] \\ \times \exp\,[-\frac{J^2}{2N} \sum_{j,k=1}^{N} (\overline{z}_j z_k + \overline{\theta}_j \theta_k)(\overline{z}_k z_j + \overline{\theta}_k \theta_j)]. \tag{11.12}$$

証明: 定義から

$$\langle \mathrm{tr}\, \frac{1}{\mu I_N - H} \rangle_N = \int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H) \big[i \int \prod_{j=1}^{N} \frac{d\overline{z}_j\, dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^{N} d\overline{\theta}_k d\theta_k \\ \times (z^{*}\!\cdot z) \exp\,[-iX^{*}(I_2 \otimes (\mu I_N - H)X] \big]. \tag{11.13}$$

ところで $X^{*}(I_2 \otimes H)X = H_{jk}(\overline{z}_j z_k + \overline{\theta}_j \theta_k)$, だから、

$$\Big\langle \exp\,[\pm i \sum_{j,k=1}^{N} H_{jk}(\overline{z}_j z_k + \overline{\theta}_j \theta_k)] \Big\rangle_N = \exp\,\big[-\frac{J^2}{2N} \sum_{j,k=1}^{N} (\overline{z}_j z_k + \overline{\theta}_j \theta_k)(\overline{z}_k z_j + \overline{\theta}_k \theta_j) \big]. \tag{11.14}$$

積分の順序を変更し、(11.14) を (11.13) に代入して (11.12) を得る。 $\square$

参考文献

[1] E. Brézin, *Grassmann variables and supersymmetry in the theory of disordered systems*, in Applications of field theory to statistical mechanics, ed. L. Garrido, Lecture Notes in Physics 216 (1985) pp 115-123.

[2] E. Brézin and V.A. Kazakov, *Exactly solvable field theories of closed strings*, Physics Letters B, 236(1990) pp 144-150.

[3] E. Brézin and A. Zee, *Universality of the correlations between eigenvalues of large random matrices*, Nucl.Phys. B402(1993) pp 613-627.

[4] K.B. Efetov, *Supersymmetry and theory of disordered metals*, Advances in Physics 32(1983) pp. 53-127.

[5] P.J. Forrester, *The spectrum edge of random matrix ensembles*, Nucl.Phys. B402[FS](1993) pp. 709-728.

[6] Y.V. Fyodorov, *Basic features of Efetov's supersymmetry approach*, Les Houches, Session LXI, Physique Quantique Mésoscopique (eds. E. Akkermans, G. Montambaux, J.L. Pichand and J. Zinn-Justin), 1994 Elsevier pp. 493-532.

[7] P.A. Mello, *Theory of Random Matrices: spectral statistics and scattering problems*, Les Houches, Session LXI, Physique Quantique Mésoscopique (eds. E. Akkermans, G. Montambaux, J.L. Pichand and J. Zinn-Justin), Elsevier 1994 pp. 435-491.

[8] M.R. Zirnbauer, *Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory*, J.Math.Phys.37(1996) pp. 4986-5018.