スーパー解析学入門第 11 回講義予定– 07.07.02　　井上淳

9　線形代数入門

10　微分積分入門

11　Wigner の半円則について

11.1　概要

$$\langle\rho_N(\lambda)\rangle_N = \pi^{-1}\Im\int_{\mathfrak{Q}} dQ\left(\{(\lambda - i0)I_2 - Q\}^{-1}\right)_{bb}\exp\left[-N\mathcal{L}(Q)\right] \tag{11.1}$$

11.2　The derivation of $\langle\rho(\lambda - i\epsilon)\rangle_N$ ($\epsilon > 0$ fixed) and its consequences

まず

$$\delta(q) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\Im\frac{1}{q - i\epsilon} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{q - i\epsilon} - \frac{1}{q + i\epsilon}\right] = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{q^2 + \epsilon^2} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

即ち、任意の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$\pi^{-1}\Im\int_{\mathbb{R}} dq\,\frac{\phi(q)}{q - i\epsilon} = \pi^{-1}\int_{\mathbb{R}} dq\,\frac{\epsilon\phi(q)}{q^2 + \epsilon^2} = \pi^{-1}\int_{\mathbb{R}} dq\,\frac{\phi(\epsilon q)}{1 + q^2} \to \phi(0) = \langle\phi, \delta\rangle \quad \text{as } \epsilon \to 0$$

となることに注意する。故に、任意に固定した $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対し、

$$\begin{aligned}
\int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\langle\phi(\cdot), \frac{1}{N}\sum_{\alpha=1}^N \delta(\cdot - E_\alpha(H))\rangle &\overset{\text{def}}{=} \int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} d\lambda\,\phi(\lambda)\frac{1}{\pi N}\sum_{\alpha=1}^N \frac{\epsilon}{(\lambda - E_\alpha(H))^2 + \epsilon^2} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\int_{\mathbb{R}} d\lambda\,\phi(\lambda)\frac{1}{\pi N}\sum_{\alpha=1}^N \frac{\epsilon}{(\lambda - E_\alpha(H))^2 + \epsilon^2} \quad \text{by Lebesgue's dom. conv. theorem} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} d\lambda\,\phi(\lambda)\int_{\mathfrak{U}_N} d\mu_N(H)\frac{1}{\pi N}\sum_{\alpha=1}^N \frac{\epsilon}{(\lambda - E_\alpha(H))^2 + \epsilon^2} \quad \text{by Fubini's theorem}
\end{aligned}$$

となる。

実際、２番目の等式は、任意の $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ をとると、任意の $\epsilon > 0$ と $H \in \mathfrak{U}_N$ に対し

$$\left|\int_{\mathbb{R}} d\lambda\,\phi(\lambda)\frac{1}{\pi N}\sum_{\alpha=1}^N \frac{\epsilon}{(\lambda - E_\alpha(H))^2 + \epsilon^2}\right| \le \max|\phi(\lambda)|.$$

となることより従う。ここで $\int_{\mathbb{R}} d\lambda\,\epsilon(\lambda^2 + \epsilon^2)^{-1} = \pi$ なることを用いている。更に、第３の等式は

$$\left|\phi(\lambda)\frac{1}{\pi N}\sum_{\alpha=1}^N \frac{\epsilon}{(\lambda - E_\alpha(H))^2 + \epsilon^2}\right| \le \epsilon^{-1}|\phi(\lambda)|,$$

であり、この右辺は、<u>任意に固定した $\epsilon > 0$</u> に対し、積測度 $d\lambda\, d\mu_N(H)$ に関し積分可能なことより従う。

上式最後のラインで、$d\lambda$ に関し積分する前に極限が取れるかどうかは以下の量を詳しく調べれば良い。

$$g(\lambda,\epsilon,N)=\int_{\mathfrak{U}_N} d\mu(H)\frac{1}{\pi N}\Im\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{\lambda-i\epsilon-E_\alpha(H)}. \tag{11.2}$$

この小節で

(i) 任意の $\epsilon>0$ と $N\in\mathbb{N}$ に対し $g(\lambda,\epsilon,N)$ は λ の関数となっている、

(ii) 任意の $N\in\mathbb{N}$ に対し、$\lim_{\epsilon\to 0} g(\cdot,\epsilon,N)$ は $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ の意味で存在し、$\big\langle\rho_N(\lambda)\big\rangle_N$ と表記される、
を主張する。

さて

$$\begin{gathered}
z_j=x_j+iy_j,\ \overline{z}_j=x_j-iy_j,\ x_j,\,y_j\in\mathfrak{R}_{\mathrm{ev}};\ \theta_k,\overline{\theta}_k\in\mathfrak{R}_{\mathrm{od}}=\mathfrak{C}_{\mathrm{od}},\\
X={}^t(z,\theta),\ z={}^t(z_1,\cdots,z_N),\ \theta={}^t(\theta_1,\cdots,\theta_N),\\
X^*=(z^*,\theta^*),\ z^*=(\overline{z}_1,\cdots,\overline{z}_N),\ \theta^*=っq(\overline{\theta}_1,\cdots,\overline{\theta}_N).
\end{gathered}$$

とおき、θ_k と $\overline{\theta}_k$ は別の奇変数の組とする。

以下は良く知られた公式でキーとなるものである：

補題 11.1 $\mu=\lambda-i\epsilon$ $(\epsilon>0)$ とおく。

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\ \frac{1}{\mu I_N-H}&=\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{\mu-E_\alpha(H)}\\
&=i\int_{\mathfrak{C}^{N|2N}}\prod_{j=1}^{N}\frac{d\overline{z}_j\,dz_j}{2\pi i}\prod_{k=1}^{N}d\overline{\theta}_k d\theta_k\,(z^*\!\cdot z)\exp\,[-iX^*(I_2\otimes(\mu I_N-H))X].
\end{aligned}\tag{11.3}$$

これを示すために以下を用いる：

補題 11.2 Γ を対角行列でその成分を $(\gamma_1,\cdots,\gamma_N)$ で $\gamma_j\in\mathbb{R}$ なるものとする。$(z^*\!\cdot z)=\sum_{j=1}^{N}\overline{z}_j z_j=|z|^2$ とおくと

$$i\int_{\mathfrak{C}^{N|2N}}\prod_{j=1}^{N}\frac{d\overline{z}_j\,dz_j}{2\pi i}\prod_{k=1}^{N}d\overline{\theta}_k d\theta_k\,(z^*\!\cdot z)\exp\,[-iX^*(I_2\otimes(\Gamma-i\epsilon I_N))X]=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\gamma_j-i\epsilon}. \tag{11.4}$$

証明：変数が分離しているので、公式

$$i\int_{\mathfrak{C}^{N|0}}\prod_{j=1}^{N}\frac{d\overline{z}_j\,dz_j}{2\pi i}\,(z^*\!\cdot z)\exp\,[-iz^*(\Gamma-i\epsilon I_N)z]=\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{\gamma_j-i\epsilon}\right)\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{\epsilon+i\gamma_j},$$

（振動積分として）と

$$\int_{\mathfrak{C}^{0|2N}}\prod_{k=1}^{N}d\overline{\theta}_k d\theta_k\ \exp\,[-i\theta^*(\Gamma-i\epsilon I_N)\theta]=\prod_{k=1}^{N}(\epsilon+i\gamma_k),$$

より (11.4) はすぐに求まる。 □

補題 11.1 の証明: 任意の $N\times N$-エルミート行列 H に対し、Γ として λI_N-H の対角化をとれば、直ちに (11.3) が求まる。 □

補題 11.3 $\mu=\lambda-i\epsilon\ (\epsilon>0)$ とすると、

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathrm{tr}\ \frac{1}{\mu I_N-H}\Big\rangle_N = i\int\prod_{j=1}^N\frac{d\bar{z}_j\,dz_j}{2\pi i}\prod_{k=1}^N d\bar{\theta}_k d\theta_k\,(z^*\!\cdot z)\exp\,[-iX^*(I_2\otimes\mu I_N)X] \\ \times\exp\,[-\frac{J^2}{2N}\sum_{j,k=1}^N(\bar{z}_jz_k+\bar{\theta}_j\theta_k)(\bar{z}_kz_j+\bar{\theta}_k\theta_j)].\end{aligned} \tag{11.5}$$

証明: 定義から

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{tr}\ \frac{1}{\mu I_N-H}\rangle_N=\int_{\mathfrak{U}_N}d\mu_N(H)\big[i\int\prod_{j=1}^N\frac{d\bar{z}_j\,dz_j}{2\pi i}\prod_{k=1}^N d\bar{\theta}_k d\theta_k \\ \times(z^*\!\cdot z)\exp\,[-iX^*(I_2\otimes(\mu I_N-H)X]\big].\end{aligned} \tag{11.6}$$

ところで $X^*(I_2\otimes H)X=H_{jk}(\bar{z}_jz_k+\bar{\theta}_j\theta_k)$, だから、

$$\Big\langle\exp\,[\pm i\sum_{j,k=1}^N H_{jk}(\bar{z}_jz_k+\bar{\theta}_j\theta_k)]\Big\rangle_N=\exp\,\big[-\frac{J^2}{2N}\sum_{j,k=1}^N(\bar{z}_jz_k+\bar{\theta}_j\theta_k)(\bar{z}_kz_j+\bar{\theta}_k\theta_j)\big]. \tag{11.7}$$

積分の順序を変更し、(11.7) を (11.6) に代入して (11.5) を得る。 □

ここまでの計算と、式 (11.5) から Wigner 半円則を導く方法は少なくとも 2 つある:
方法 (I) では $\epsilon\to 0$ とすることは簡単で、それは簡明ではない公式を導くが計算可能である、
別の方法 (II) は美しい公式 (11.1) を形式的に導くのだが、その公式で $\epsilon\to 0$ として数学的正当化するために Hermite 多項式が出てくるまで変形していくと式 (11.1) の美しさは失われてしまう。

================ ここまでが前回分 ====================

(I) 以下の計算は E. Brézin [4], [5] による:

$$\sum_{j,k=1}^N(\bar{z}_jz_k+\bar{\theta}_j\theta_k)(\bar{z}_kz_j+\bar{\theta}_k\theta_j)=(z^*\!\cdot z)^2+2(\theta^*\!\cdot z)(z^*\!\cdot\theta)-(\theta^*\!\cdot\theta)^2,$$

となるので

$$\exp\,[\frac{J^2}{2N}(\theta^*\!\cdot\theta)^2]=\left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\ \exp\,[-\tau(\theta^*\!\cdot\theta)-\frac{N}{2J^2}\tau^2].$$

この関係式を (11.6) に代入すると

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathrm{tr}\ \frac{1}{\mu I_N-H}\Big\rangle_N =&i\int\prod_{j=1}^N\frac{d\bar{z}_j\,dz_j}{2\pi i}\prod_{k=1}^N d\bar{\theta}_k d\theta_k\,(z^*\!\cdot z) \\ &\times\exp\,[-iX^*(I_2\otimes\mu I_N)X-\frac{J^2}{2N}((z^*\!\cdot z)^2+2(\theta^*\!\cdot z)(z^*\!\cdot\theta))] \\ &\times\left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\ \exp\,[-\tau(\theta^*\!\cdot\theta)-\frac{N}{2J^2}\tau^2].\end{aligned}$$

命題 11.1 以下の公式が得られる*:*

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathrm{tr}\ \frac{1}{(\lambda-i0)I_N-H}\Big\rangle_N &= i\frac{1}{(N-1)!}\left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2}\left(\frac{N}{J^2}\right)^{N+1}\int_0^\infty ds\,s^N\exp\,[-\frac{N}{2J^2}(2i\lambda s+s^2)] \\ &\quad\times\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\,(\tau+i\lambda)^{N-1}(\tau+i\lambda+s)\exp\,[-\frac{N}{2J^2}\tau^2] \\ &=i\frac{1}{(N-1)!}\left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2}\left(\frac{N}{J^2}\right)^{N+1}\iint_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}}dsd\tau\,(1+(\tau+i\lambda)^{-1}s) \\ &\quad\times\exp\,[-N(\frac{1}{2J^2}(\tau^2+2i\lambda s+s^2)-\log\,s(\tau+i\lambda))].\end{aligned} \tag{11.8}$$

証明：まず

$$-i\mu(\theta^*\!\cdot\theta)-\frac{J^2}{N}(\theta^*\!\cdot z)(z^*\!\cdot\theta)-\tau(\theta^*\!\cdot\theta)=-\sum_{a,b}\overline{\theta}_a((\tau+i\mu)\delta_{ab}+\frac{J^2}{N}z_a\overline{z}_b)\theta_b,$$

となることと、以下に述べる補題 11.4 を用いて

$$\int\prod_{k=1}^{N}d\overline{\theta}_k d\theta_k\ \exp\,[-i\mu(\theta^*\!\cdot\theta)-\frac{J^2}{N}(\theta^*\!\cdot z)(z^*\!\cdot\theta)-\tau(\theta^*\!\cdot\theta)]=(\tau+i\mu)^{N-1}(\tau+i\mu+\frac{J^2}{N}(z^*\!\cdot z)). \tag{11.9}$$

表現式 (11.9) より

$$\begin{aligned}\big\langle\,\mathrm{tr}\ \frac{1}{\mu I_N-H}\big\rangle_N=&i\int\prod_{j=1}^{N}\frac{d\overline{z}_j\,dz_j}{2\pi i}(z^*\!\cdot z)\exp\,[-i\mu(z^*\!\cdot z)-\frac{J^2}{2N}(z^*\!\cdot z)^2]\\&\times\left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\,(\tau+i\mu)^{N-1}(\tau+i\mu+\frac{J^2}{N}(z^*\!\cdot z))\exp\,[-\frac{N}{2J^2}\tau^2].\end{aligned}$$

$\mathbb{C}^N=\mathbb{R}^{2N}$ を $z_j=x_j+iy_j$, $\overline{z}_j=x_j-iy_j$, $d\overline{z}_j\wedge dz_j=2idx_j\wedge dy_j$ と同一視し、極座標 $(r,\omega)\in\mathbb{R}_+\times S^{2N-1}$ を用い $\prod_{j=1}^{N}\frac{d\overline{z}_j\,dz_j}{2\pi i}=\prod_{j=1}^{N}\frac{dx_jdy_j}{\pi}=\pi^{-N}r^{2N-1}dr\,d\omega$, $\int_{S^{2N-1}}d\omega=\mathrm{vol}(S^{2N-1})=2\pi^N/(N-1)!$ とすると、

$$\begin{aligned}\big\langle\,\mathrm{tr}\ \frac{1}{\mu I_N-H}\big\rangle_N=&i\frac{1}{(N-1)!}\int_0^{\infty}dr^2\,r^{2N}\exp\,[-i\mu r^2-\frac{J^2}{2N}r^4]\\&\times\left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\,(\tau+i\mu)^{N-1}(\tau+i\mu+\frac{J^2}{N}r^2)\exp\,[-\frac{N}{2J^2}\tau^2].\end{aligned}$$

ここで、独立変数を $r^2=(N/J^2)\tilde{r}$ と取り替え、$\epsilon\to0$、即ち、$\mu\to\lambda-i0$ として結果が従う。上での積分記号下での極限移行 $\epsilon\to0$ は Lebesgue の有界収束定理が保証する。 □

系 11.1 このとき $\lambda=0$ に対し、

$$\big\langle\rho_N(0)\big\rangle_N=\frac{1}{\pi J}[1-(-1)^N\frac{1}{4}N^{-1}+\frac{1}{32}N^{-2}+(-1)^N\frac{5}{128}N^{-3}+O(N^{-4})]. \tag{11.10}$$

証明 ：まず、任意の $\ell>0$ と $n=0,1,2,3,\cdots$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\,e^{-\ell t^2}t^{2n+1}=0,\quad\int_0^{\infty}dt\,e^{-\ell t^2}t^{2n+1}=\frac{n!}{2\ell^{n+1}}, \tag{11.11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt\,e^{-\ell t^2}t^{2n}=\ell^{-n-\frac12}\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\ell^{-n-\frac12}\frac{(2n)!}{n!2^{2n}}\pi^{\frac12}. \tag{11.12}$$

が成り立つ。これより

$$\begin{aligned}\big\langle\rho_N(0)\big\rangle_N&=\frac{1}{\pi N}\Im\big\langle\,\mathrm{tr}\ \frac{1}{-i0I_N-H}\big\rangle_N\\&=\frac{1}{\pi N!}\left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2}\left(\frac{N}{J^2}\right)^{N+1}\int_0^{\infty}ds\,s^N\exp\,[-\frac{N}{2J^2}s^2]\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\,\tau^{N-1}(\tau+s)\exp\,[-\frac{N}{2J^2}\tau^2]\\&=\frac{1}{\pi N!}\left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2}\left(\frac{N}{J^2}\right)^{N+1}\times\begin{cases}\frac12\left(\frac{N}{2J^2}\right)^{-N-1}\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)^2, & N\text{=even},\\ \frac12\left(\frac{N}{2J^2}\right)^{-N-1}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\Gamma\left(\frac{N+2}{2}\right), & N\text{=odd},\end{cases}\end{aligned}$$

であり、あとは Stirling の公式 (11.19) を用いれば良い。 □

上式 (11.9) を示すために以下を用意する：

補題 11.4 $M_{ab} = \alpha\delta_{ab} + \beta z_a \overline{z}_b$ となる行列 $M = (M_{ab})$ に対し、

$$\det M = \alpha^{N-1}(\alpha + \beta|z|^2), \quad |z|^2 = z^* \cdot z.$$

証明：u が $Mu = \gamma u$ を満たすとすると、

$$\overline{z} \cdot Mu = \gamma \overline{z} \cdot u, \quad \overline{u} \cdot Mu = \gamma \overline{u} \cdot u. \tag{11.13}$$

この最初の式から

$$(\gamma - \alpha - \beta|z|^2) \sum_{j=1}^{N} u_j \overline{z}_j = 0$$

となる。もし $\sum_{j=1}^{N} u_j \overline{z}_j \neq 0$ ならば、$\gamma = \alpha + \beta|z|^2$ となる。一方、$\sum_{j=1}^{N} u_j \overline{z}_j = 0$ のときは、(11.13) の２番目の式から、$\gamma = \alpha$ となる。多重度を考慮すれば求める式となる。 □

(II) 表現式 (11.1) を得るには以下のようにする。

$$A_X = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} \overline{z}_j z_j & \sum_{j=1}^{N} \overline{\theta}_j z_j \\ \sum_{j=1}^{N} \theta_j \overline{z}_j & \sum_{j=1}^{N} \overline{\theta}_j \theta_j \end{pmatrix},$$

とおくと

$$\mathrm{str}\ A_X^2 = \sum_{j,k=1}^{N} (\overline{z}_j z_k + \overline{\theta}_j \theta_k)(\overline{z}_k z_j + \overline{\theta}_k \theta_j).$$

一方、以下の補題は Hubbard-Stratonovich の公式と呼ばれる：

補題 11.5 A を偶 2×2 スーパー行列とすると、

$$\exp\,[-\frac{J^2}{2N}\,\mathrm{str}\ A^2] = \int_{\mathfrak{Q}} dQ\ \exp\,[-\frac{N}{2J^2}\,\mathrm{str}\ Q^2 \pm i\,\mathrm{str}\,(QA)]. \tag{11.14}$$

証明：行列 $A = \begin{pmatrix} a & \theta_1 \\ \theta_2 & b \end{pmatrix}$ を $a, b \in \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}}$ かつ $\theta_1, \theta_2 \in \mathfrak{R}_{\mathrm{od}}$ なるものとする。任意の $\gamma > 0$ に対し

$$\int_{\mathfrak{Q}} dQ\ \exp\,[-\frac{1}{2}\,\mathrm{str}\,(\gamma Q \pm i\gamma^{-1}A)^2] = 1$$

となる。更に、

$$\mathrm{str}\,(\gamma Q \pm i\gamma^{-1}A)^2 = \gamma^2(x_1^2 + x_2^2 + 2\rho_1\rho_2) \pm 2i(x_1 a + \rho_1\theta_2 - \rho_2\theta_1 - ix_2 b) - \gamma^{-2}(a^2 - b^2 + 2\theta_1\theta_2)$$

となることは分かるから

$$\int d\rho_1 d\rho_2\ \exp\,[-\gamma^2\rho_1\rho_2 \mp i(\rho_1\theta_2 - \rho_2\theta_1) + \gamma^{-2}\theta_1\theta_2] = (\gamma^2 - \theta_1\theta_2)(1 + \gamma^{-2}\theta_1\theta_2) = \gamma^2,$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx_1 dx_2}{2\pi}\ \exp\,[-\frac{\gamma^2}{2}(x_1^2 + x_2^2) \mp i(x_1 a - ix_2 b) + \frac{\gamma^{-2}}{2}(a^2 - b^2)] \\ &= \int \frac{dx_1 dx_2}{2\pi}\ \exp\,[-\frac{1}{2}(\gamma x_1 \pm i\gamma^{-1}a)^2 - \frac{1}{2}(\gamma x_2 \pm \gamma^{-1}b)^2] = \gamma^{-2}. \end{aligned}$$ □

(11.14) で $A = A_X$ とし、それを (11.5) に代入し $\mathrm{str}\,(QA_X) = X^*(Q \otimes I_N)X$ を用い、積分順序を変更しその積分の一部分を見ると、

$$\begin{aligned} &i\int \prod_{j=1}^{N} \frac{d\overline{z}_j\, dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^{N} d\overline{\theta}_k d\theta_k\, (z^* \cdot z) \exp\,[-iX^*\big((\mu I_2 - Q) \otimes I_N\big)X] \\ &= \sum_{j=1}^{N} (\{\mu I_2 - Q) \otimes I_N\}^{-1})_{bb,jj}\, \mathrm{sdet}^{-1}(i(\mu I_2 - Q) \otimes I_N) \end{aligned}$$

となる。故に、

補題 11.6 $\mu = \lambda - i\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ に対して

$$\langle \operatorname{tr} \frac{1}{\mu I_N - H} \rangle_N = \int_{\mathfrak{Q}} dQ \sum_{j=1}^{N} (\{(\mu I_2 - Q) \otimes I_N\}^{-1})_{bb,jj} \operatorname{sdet}^{-1}(i(\mu I_2 - Q) \otimes I_N). \tag{11.15}$$

ここで $(C)_{bb,jj}$ は（偶）スーパー行列 C のボゾンーボゾン部分の j-番目の対角成分とする。

簡単な計算で

$$(\{\mu I_2 - Q) \otimes I_N\}^{-1})_{bb,jj} = (\{\mu I_2 - Q\}^{-1})_{bb} \quad \text{for any} \quad j = 1, 2, \cdots, N,$$
$$\operatorname{sdet}^{-1}(i(\mu I_2 - Q) \otimes I_N) = \operatorname{sdet}^{-N}(\mu I_2 - Q),$$
$$\operatorname{str}(AB) = \operatorname{str}(BA), \quad \operatorname{str}(A+B) = \operatorname{str} A + \operatorname{str} B, \quad \log(\operatorname{sdet}^{\ell} A) = \ell \operatorname{str}(\log A) \quad \text{for} \quad \ell \in \mathbb{Z},$$

となるから、

$$\langle \operatorname{tr} \frac{1}{\mu I_N - H} \rangle_N = \int_{\mathfrak{Q}} dQ\, N\big(\{\mu I_2 - Q\}^{-1}\big)_{bb} \exp\,[-N\mathcal{L}(\mu; Q)] \tag{11.16}$$

と表現される。ここで

$$\mathcal{L}(\mu; Q) = \operatorname{str}[(2J^2)^{-1}Q^2 + \log(\mu I_2 - Q)],$$
$$\big(\{\mu I_2 - Q)\}^{-1}\big)_{bb,11} = \frac{\mu - ix_2}{(\mu - x_1)(\mu - ix_2) - \rho_1\rho_2} = \frac{(\mu - x_1)(\mu - ix_2) + \rho_1\rho_2}{(\mu - x_1)^2(\mu - ix_2)},$$
$$\mathfrak{Q} = \big\{Q = \begin{pmatrix} x_1 & \rho_1 \\ \rho_2 & ix_2 \end{pmatrix} \bigm| x_1, x_2 \in \mathfrak{R}_{\mathrm{ev}},\ \rho_1, \rho_2 \in \mathfrak{R}_{\mathrm{od}}\big\}.$$

注意 11.1 上式 (11.16) で直接的に $\epsilon \to 0$ とできれば「望みの式」(11.1) が求まる。

11.3 The proof of semi-circle law and beyond that

以下の積分の N に関する漸近挙動を調べよう：

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{tr} \frac{1}{(\lambda - i0) I_N - H} \rangle_N &= i \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2} \left(\frac{N}{J^2}\right)^{N+1} (I_1 + I_2), \\
I_1 &= \int_0^\infty ds\, s^N \exp\,[-\frac{N}{2J^2}(2i\lambda s + s^2)] \int_{-\infty}^\infty d\tau\, (\tau + i\lambda)^N \exp\,[-\frac{N}{2J^2}\tau^2], \\
I_2 &= \int_0^\infty ds\, s^{N+1} \exp\,[-\frac{N}{2J^2}(2i\lambda s + s^2)] \int_{-\infty}^\infty d\tau\, (\tau + i\lambda)^{N-1} \exp\,[-\frac{N}{2J^2}\tau^2].
\end{aligned} \tag{11.17}$$

定理 11.1 $|\lambda| < 2J$ とする。$\theta = -\arg \tau_+$, $\tau_+ = 2^{-1}(-i\lambda + \sqrt{4J^2 - \lambda^2})$ とおくと、

$$I_1 + I_2 = 2\pi e^{-N} J^{2(N+1)} \left[e^{-i\theta} N^{-1} + \frac{1}{12}\left(e^{-i\theta} - (-1)^N \frac{3e^{-iN(\sin 2\theta + 2\theta)}}{\cos^2\theta} \right) N^{-2} + O(N^{-3}) \right] \tag{11.18}$$

となる。

Stirling の公式

$$(N-1)! = e^{-N} N^{N-1/2} \sqrt{2\pi} (1 + \frac{1}{12}N^{-1} + \frac{1}{288}N^{-2} - \frac{139}{51840}N^{-3} - \frac{571}{2488320}N^{-4} + O(N^{-5})),$$

即ち、

$$\frac{1}{(N-1)!} = \frac{e^N N^{-N+1/2}}{\sqrt{2\pi}}(1-\frac{1}{12}N^{-1}-\frac{1}{96}N^{-2}+O(N^{-3})) \tag{11.19}$$

より、

$$\begin{aligned}\Big\langle \mathrm{tr}\,\frac{1}{(\lambda{-}i0)I_N-H}\Big\rangle_N &= i\frac{1}{(N-1)!}\left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2}\left(\frac{N}{J^2}\right)^{N+1}(I_1+I_2),\\ &= i\frac{N^2}{J}\left(e^{-i\theta}N^{-1}+\frac{1}{12}[e^{-i\theta}-(-1)^N\frac{3e^{-iN(\sin 2\theta+2\theta)}}{\cos^2\theta}]N^{-2}+O(N^{-3})\right)(1-\frac{1}{12}N^{-1}+O(N^{-2}))\\ &= i\frac{N}{J}\left(e^{-i\theta}-\frac{(-1)^N}{4}\frac{e^{-iN(\sin 2\theta+2\theta)}}{\cos^2\theta}N^{-1}+O(N^{-2})\right).\end{aligned}$$

故に定理 1.2 の前半部分は証明された。 $\square$

$|\lambda|\geq 2J$ の場合の、関係式 (11.20) も同様に証明される：即ち、

定理 11.2 $\lambda > 2J$ とする。定数 $k(\lambda)>0$ と $C(\lambda)>0$ があって

$$I_1+I_2 = J^{2N}e^{-N}K(N) + \textit{pure imaginary part} \quad \textit{with} \quad \big|K(N)\big| \leq C(\lambda)N^{-\frac{1}{2}}e^{-k(\lambda)N}. \tag{11.20}$$

この評価を $\big\langle\rho_N(\lambda)\big\rangle_N$ の定義に代入して

$$\begin{aligned}\big\langle\rho_N(\lambda)\big\rangle_N &= \Im\frac{1}{\pi N}\Big\langle \mathrm{tr}\,\frac{1}{(\lambda{-}i0)I_N-H}\Big\rangle_N\\ &= \Im i\frac{1}{\pi N!}\left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2}\left(\frac{N}{J^2}\right)^{N+1}(I_1+I_2),\\ &= \Im i\frac{1}{\pi N!}\left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2}\left(\frac{N}{J^2}\right)^{N+1}J^{2N}e^{-N}\,(K(N)+\text{pure imaginary part})\\ &= \frac{1}{\pi N!}\left(\frac{N}{2\pi J^2}\right)^{1/2}\left(\frac{N}{J^2}\right)^{N+1}J^{2N}e^{-N}K(N).\end{aligned}$$

Stirling の公式 (11.19) を上式の最後の行に代入して、式 (11.20) の評価を得る。 $\square$

11.4 Edge mobility

$|z|\leq 1$ に対し $N\to\infty$ のときの、$\big\langle\rho_N(2J-zN^{-2/3})\big\rangle_N$ とか $\big\langle\rho_N(-2J+zN^{-2/3})\big\rangle_N$ の漸近挙動を調べる。ここでは公式 (**??**) を用いる:

$$\begin{aligned}\big\langle\rho_N(2J-zN^{-2/3})\big\rangle_N = \frac{N^{N+1/2}}{(2\pi)^{3/2}(N-1)!J^{2N+1}}\iint_{\mathbb{R}^2}dt\,ds\,\exp\,[-N\phi_+(t,s,2J-zN^{-2/3})]\\ \times a_+(t,s,2J-zN^{-2/3};N),\end{aligned} \tag{11.21}$$

$$\begin{aligned}\big\langle\rho_N(-2J+zN^{-2/3})\big\rangle_N = \frac{N^{N+1/2}}{(2\pi)^{3/2}(N-1)!J^{2N+1}}\iint_{\mathbb{R}^2}dt\,ds\,\exp\,[-N\phi_-(t,s,-2J+zN^{-2/3})]\\ \times a_-(t,s,-2J+zN^{-2/3};N).\end{aligned} \tag{11.22}$$

ここで

$$\begin{aligned}\phi_\pm(t,s,\lambda) &= \frac{1}{2J^2}(t^2+s^2+\lambda^2)-\log(\lambda\mp it)(\lambda\mp is),\\ a_\pm(t,s,\lambda;N) &= \frac{2(\lambda\mp it)(\lambda\mp is)-(1-N^{-1})[(\lambda\mp it)^2+(\lambda\mp is)^2]}{2(\lambda\mp it)^2(\lambda\mp is)^2}.\end{aligned} \tag{11.23}$$

命題 11.2 $|z| \le 1$ に対し、

$$\left\langle \rho_N(2J - zN^{-2/3}) \right\rangle_N = \frac{N^{-1/3}}{8\pi^2 J^5} \iint_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, (x-y)^2 \exp\, [-\frac{i}{3J^3}(x^3 + y^3 - 3zJ(x+y))] + O(N^{-2/3}). \tag{11.24}$$

但し、上式右辺は振動積分と解釈する。

証明：ここでは、ϕ_+ と a_+ の添字 $+$ を省略する。

$u = N^{-1/3}$ とおく。$\lambda = 2J - zu^2$ に対し変数変換 $s = -iJ + yu,\, t = -iJ + xu$ すると、

$$\varphi(x, y, z; u) = \phi(-iJ + xu, -iJ + yu, 2J - zu^2) = h(u) - \log\, g(u)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} h(u) &= \frac{1}{2J^2}((-iJ + xu)^2 + (-iJ + yu)^2 + (2J - zu^2)^2) \\ &= 1 - \frac{i(x+y)}{J}u + \frac{x^2 + y^2 - 4zJ}{2J^2}u^2 + \frac{z^2}{2J^2}u^4, \\ g(u) &= (2J - zu^2 - i(-iJ + xu))(2J - zu^2 - i(-iJ + yu)) \\ &= J^2 - iJ(x+y)u - (xy + 2zJ)u^2 + iz(x+y)u^3 + z^2u^4. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \alpha(x, y, z; u) &= a(-iJ + xu, -iJ + yu, 2J - zu^2; u^{-3}) \\ &= \frac{(x-y)^2u^2 + u^3[2J^2 - 2iJ(x+y)u - (x^2 + y^2 + 4zJ)u^2 + 2i(x+y)zu^3 + 2z^2u^4]}{2g^2(u)} \end{aligned}$$

とおく。

$\varphi(x, y, z; u)$ を u に関して $u = 0$ で Taylor 展開すると

$$\varphi(x, y, z; u) = 1 - \log\, J^2 + \frac{i}{3J^3}[x^3 + y^3 - 3zJ(x+y)]u^3 + R(u),$$

ここで

$$R(u) = \frac{u^4}{3!}\int_0^1 d\tau\, (1-\tau)^3 \varphi^{(4)}(x, y, z; \tau u),$$

$$\varphi^{(4)}(x, y, z; u) = \frac{4!z^2}{g(u)} - \frac{3(g''(u)^2 + g'(u)g^{(3)}(u))}{g(u)^2} + \frac{12g'(u)^2g''(u)}{g(u)^3} - \frac{6g'(u)^4}{g(u)^4},$$

$$|\partial_x^k \partial_y^\ell R(u)| \le C_{k,\ell}u^4 \quad \text{for } u \ge 0,\, x,\, y \in \mathbb{R},\, |z| \le 1,\, k + \ell \le 2.$$

更に、

$$e^{-NR(u)} = 1 + S(u), \quad S(u) = -u^{-2}\int_0^1 d\tau\, R'(\tau u),$$

$$R'(u) = \frac{2u^3}{3}\int_0^1 d\tau\, (1-\tau)^3 \varphi^{(4)}(x, y, z; \tau u) + \frac{u^5}{6}\int_0^1 d\tau\, (1-\tau)^3 \varphi^{(5)}(x, y, z; \tau u).$$

故に

$$\exp\, [-N\varphi(x, y, z; N^{-1/3})] = e^{-N}J^{2N} \exp\, [-\frac{i}{3J^3}(x^3 + y^3 - 3zJ(x+y))]e^{-NR(N^{-1/3})}.$$

一方

$$g(u)^{-2} = J^{-4} - 2u\int_0^1 d\tau\, g'(\tau u)g(\tau u)^{-3},$$

だから、

$$\alpha(x,y,z;u) = \frac{(x-y)^2}{2J^4}u^2 + A(u), \quad A(u) = -u^3(x-y)^2\int_0^1 d\tau\, g'(\tau u)g(\tau u)^{-3}.$$

であり以下を満たす。

$$|\partial_x^k\partial_y^\ell A(u)| \le C_{k,\ell}u^3 \quad \text{for } u \ge 0,\ x,\ y \in \mathbb{R},\ |z| \le 1,\ k+\ell \le 2.$$

これらから

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^2} dt\, ds\, \exp\,[-N\phi(t,s,2J - zN^{-2/3})]\, a(t,s,2J - zN^{-2/3};N) \\
&\quad = N^{-2/3}\iint_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, \exp\,[-N\varphi(x,y,z;N^{-1/3})]\alpha(x,y,z;N^{-1/3}) \\
&\quad = e^{-N}J^{2N}N^{-2/3}\iint_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, \exp\,[-\frac{i}{3J^3}(x^3+y^3-3zJ(x+y))] \\
&\qquad\qquad \times (1+S(N^{-1/3}))\left(\frac{(x-y)^2}{2J^4}N^{-2/3} + A(N^{-1/3})\right) \\
&\quad = e^{-N}J^{2N}\left[N^{-4/3}\iint_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, \frac{(x-y)^2}{2J^4}\exp\,[-\frac{i}{3J^3}(x^3+y^3-3zJ(x+y))] + O(N^{-5/3})\right].
\end{aligned} \tag{11.25}$$

ここで、以下に述べる補題を適用して

$$f(x,y) = A(u),\ A(u)S(u),\ S(u)\frac{(x-y)^2}{2J^2}u^2,$$

となり、最後の項が $O(N^{-5/3})$ となる。

更に、Stirling 公式 (11.19) を用いて上の式 (11.25) を書き換えると

$$\left\langle \rho_N(2J - zN^{-2/3})\right\rangle_N = \frac{N^{-1/3}}{8\pi^2J^5}\iint_{\mathbb{R}^2} dx\, dy\, \times \exp\,[-\frac{i}{3J^3}(x^3+y^3-3zJ(x+y))](x-y)^2 + O(N^{-2/3}). \qquad \Box$$

補題 11.7 もし f が

$$|\partial_x^k\partial_y^\ell f(x,y)| \le C_{k,\ell}$$

を満たすならば、

$$\left|\iint_{\mathbb{R}^2} dxdy\, f(x,y)\exp\,[-\frac{i}{3J^3}(x^3+y^3-3zJ(x+y))]\right| \le C < \infty.$$

証明：Lax の手法を用いて振動積分を評価を行う：それは

$$\Phi(x,y) = 1 + 18z^2J^2 + \frac{2i(x+y)}{J^3} + \frac{6z(x^2+y^2)}{J^2} + \frac{x^4+y^4}{J^6}$$

とおくとき、

$$(1-\partial_x^2-\partial_y^2)\exp\,[-\frac{i}{3J^3}(x^3+y^3-3zJ(x+y))] = \Phi(x,y)\exp\,[-\frac{i}{3J^3}(x^3+y^3-3zJ(x+y))]$$

となることに注意する。故に、

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathbb{R}^2} dxdy\, f(x,y)\exp\,[-\frac{i}{3J^3}(x^3+y^3-3zJ(x+y))] \\
&\qquad = \iint_{\mathbb{R}^2} dxdy\, (1-\partial_x^2-\partial_y^2)\frac{f(x,y)}{\Phi(x,y)}\exp\,[-\frac{i}{3J^3}(x^3+y^3-3zJ(x+y))].
\end{aligned}$$

仮定より、$(1-\partial_x^2-\partial_y^2)(f(x,y)/\Phi(x,y))$ は測度 $dxdy$ に関して可積分だから、望みの結果が従う。 $\Box$

Airy 関数を以下のように定義する

$$\mathrm{Ai}(z)=\int_{\mathbb{R}}dx\,\exp\,[-\frac{i}{3}x^3+izx]=\int_{\mathbb{R}}dx\,\exp\,[\frac{i}{3}x^3-izx]=\overline{\mathrm{Ai}(z)}\quad\text{for } z\in\mathbb{R}$$

と

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}dx\,\exp\,[-\frac{ix^3}{3J^3}+\frac{izx}{J^2}]&=J\,\mathrm{Ai}(\frac{z}{J}),\\ \int_{\mathbb{R}}dx\,x\,\exp\,[-\frac{ix^3}{3J^3}+\frac{izx}{J^2}]&=-iJ^2\,\mathrm{Ai}'(\frac{z}{J}),\\ \int_{\mathbb{R}}dx\,x^2\,\exp\,[-\frac{ix^3}{3J^3}+\frac{izx}{J^2}]&=-J^3\,\mathrm{Ai}''(\frac{z}{J}).\end{aligned}$$

それ故

$$\left\langle\rho_N(2J-zN^{-2/3})\right\rangle_N=N^{-1/3}f(zJ^{-1})+O(N^{-2/3}),$$

但し、

$$f(z)=\frac{1}{4\pi^2J}(\mathrm{Ai}'(z)\,\mathrm{Ai}'(z)-\mathrm{Ai}''(z)\,\mathrm{Ai}(z)).\qquad\square$$

系 11.2 $|z|\le 1$ に対し

$$\left\langle\rho_N(-2J+zN^{-2/3})\right\rangle_N=-N^{-1/3}f(zJ^{-1})+O(N^{-2/3}).$$

注意 11.2 *Brézin and Kazakov* は *Brézin* の公式 (11.8) を用いて上記と同様の結果を得ているようだが少なくとも私は彼らの証明 *(48) of [5]* を理解できなかった。

参考文献

[1] E.B. Bogomolny and J.P. Keating, Random matrix theory and the Riemann zeros I: three and four points correlations, Nonlinearity 8(1995), pp. 1115-1131.

[2] ——-, Random matrix theory and the Riemann zeros II: n-point correlations, Nonlinearity 9(1996), pp. 911-935.

[3] E.B. Bogomolny and P. Leboeuf, Statistical properties of the zeros of zeta functions –beyond the Riemann case, Nonlinearity 7(1994), pp. 1155-1167.

[4] E. Brézin, Grassmann variables and supersymmetry in the theory of disordered systems, in Applications of field theory to statistical mechanics, ed. L. Garrido, Lecture Notes in Physics 216 (1985) pp 115-123.

[5] E. Brézin and V.A. Kazakov, Exactly solvable field theories of closed strings, Physics Letters B, 236(1990) pp 144-150.

[6] E. Brézin and A. Zee, Universality of the correlations between eigenvalues of large random matrices, Nucl.Phys. B402(1993) pp 613-627.

[7] K.B. Efetov, Supersymmetry and theory of disordered metals, Advances in Physics 32(1983) pp. 53-127.

[8] *P.J. Forrester, The spectrum edge of random matrix ensembles, Nucl.Phys. B402[FS](1993) pp. 709-728.*

[9] *Y.V. Fyodorov, Basic features of Efetov's supersymmetry approach, Les Houches, Session LXI, Physique Quantique Mésoscopique (eds. E. Akkermans, G. Montambaux, J.L. Pichand and J. Zinn-Justin), 1994 Elsevier pp. 493-532.*

[10] *A. Inoue and Y. Nomura, Some refinements of Wigner's semi-circle law for Gaussian Random Matrices using superanalysis, Asymptotic Analysis 23(2000) pp. 329-375.*

[11] *A. Matytsin, On the large-N limit of the Itzykson-Zuber integral, Nuclear Physics, B411(1994), pp. 805-820.*

[12] *M.L. Mehta, Random Matrices, 2nd ed, Boston, Academic Press, 1991.*

[13] *M.L. Mehta and M. Gaudin, On the density of eigenvalues of a random matrix, Nuclear Phys.18(1960), pp. 420-427.*

[14] *P.A. Mello, Theory of Random Matrices: spectral statistics and scattering problems, Les Houches, Session LXI, Physique Quantique Mésoscopique (eds. E. Akkermans, G. Montambaux, J.L. Pichand and J. Zinn-Justin), Elsevier 1994 pp. 435-491.*

[15] *C.A. Tracy and H. Widom, Random unitary matrices, permutations and Painlevé, Commun.Math.Phys. 207(1999), pp. 665-685.*

[16] *M.R. Zirnbauer, Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory, J.Math.Phys.37(1996) pp. 4986-5018.*

[17] *A. Zvonkin, Matrix integrals and map enumeration: An accesiible Introduction, Mathl.Comput.Modelling 26(1997), pp. 281-304.*