

1  $A(t) = (a_{ij}(t))$  を  $\mathbb{R}$  上の実数値連続関数  $a_{ij}(t)$  を成分とする  $n \times n$  行列とし、微分方程式系

$$(*) \quad \frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$$

を考える.

(i) 任意の点  $\xi \in \mathbb{R}^n$  に対して、 $\mathbb{R}^n$  値の関数列  $\{x_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$  を

$$\begin{cases} x_0(t) = \xi, \\ x_m(t) = \xi + \int_0^t A(s)x_{m-1}(s)ds \quad (m = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

によって定義する. この関数列は任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して収束し、その極限関数  $x(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t)$  は微分方程式 (\*) の初期条件  $x(0) = \xi$  を満たすただひとつの解であることを証明せよ.

(ii) (\*) の解全体は  $\mathbb{R}$  上の  $n$  次元ベクトル空間をなすことを証明せよ.

2  $f(x, y)$  を平面  $\mathbb{R}^2$  上で定義され、 $f(0, 0) = 0$  かつ任意の  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$  に対して条件

$$|f(x, y) - f(x', y')| \leq k|y - y'| \quad (k \text{ は } 0 < k < 1 \text{ をみたく定数})$$

を満たす実数値連続関数とする. このとき、 $\mathbb{R}$  上の連続関数  $\varphi(x)$  で  $\varphi(0) = 0$  かつ方程式  $\varphi(x) = f(x, \varphi(x))$  を満たすものがただ一つ存在することを証明せよ.

3  $f(t, x)$  を  $(t, x)$  に関し滑らかな関数とし、初期値問題

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(a) = b$$

の解を  $x(t, a, b)$  とする.

(i) この時、

$$\frac{\partial x(t, a, b)}{\partial a}, \quad \frac{\partial x(t, a, b)}{\partial b}$$

を計算せよ.

(ii) この計算結果を、連続関数を係数に持つ線形微分方程式

$$(**) \quad \dot{x}(t) = \phi(t)x(t) + \psi(t), \quad x(a) = b$$

の解を具体的に書き下すことによって、確かめよ.

(iii) (\*\*) において、 $\phi(t) = \sin t$ ,  $\psi(t) = \gamma \sin(2t)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$  とするとき、ある  $T > 0$  があって、任意の  $t$  に対し  $x(t) = x(t+T)$  となることを確かめよ.