微分方程式概論　試験問題解答例 – 2002 年 7 月 26 日〜8 月 27 日　井上淳

注意：採点は 1 題 50 点, 計 150 点満点で採点し、x 点の場合、60 点以上 120 点未満の場合は $60+2(x-60)/3$ 点を、120 点以上はすべて 100 点とした。最終回の講義で述べた問題のレポート提出を参照して最終的な点数報告をする。

尚、**問題 2 の仮定にミスプリントがあった**が、それについては解答のところで詳しく述べた。

$\boxed{\mathbf{1}}$ $A(t)=(a_{ij}(t))$ を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 $a_{ij}(t)$ を成分とする $n\times n$ 行列とし，微分方程式系

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t)x(t), \qquad x(t)\in\mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

を考える．

(i) 任意の点 $\xi\in\mathbb{R}^n$ に対して，$\mathbb{R}^n$ 値の関数列 $\{x_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ を

$$\begin{cases} x_0(t)=\xi, \\ x_m(t)=\xi+\displaystyle\int_0^t A(s)x_{m-1}(s)ds \quad (m=1,2,\dots) \end{cases} \tag{1.2}$$

によって定義する．この関数列は任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して収束し，その極限関数 $x(t)=\lim_{m\to\infty}x_m(t)$ は微分方程式 (1.1) の初期条件 $x(0)=\xi$ を満たすただひとつの解であることを証明せよ．

(ii) (1.1) の解全体は $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間をなすことを証明せよ．

略解: (i) （存在）[25] 任意に $T>0$ を固定し、$\|x\|=\sum_{j=1}^n|x_j|$ と定める。また、$A(t)=(a_{ij}(t))$ に対し $\|A(t)\|=\sup_{i,j}|a_{ij}(t)|$ と定めると、$M_T=\sup_{t\in[0,T]}\|A(t)\|<\infty$ であり

$$x_m(t)-x_n(t)=\int_0^t A(s)(x_{m-1}(s)-x_{n-1}(s))ds$$

より、$t\le T$ に対し

$$\|x_1(t)-x_0(t)\|\le tM_T\|\xi\|, \quad \|x_2(t)-x_1(t)\|\le\int_0^t\|A(s)\|\|x_1(s)-x_0(s)\|ds\le M_T^2\frac{t^2}{2}\|\xi\|,$$

となる。これより

$$\|x_m(t)-x_{m-1}(t)\|\le\frac{M_T^m t^m}{m!}\|\xi\|,$$

と想定でき、これは帰納法で容易に証明できる。

$$\|x_m(t)-x_\ell(t)\|\le\sum_{j=m}^{\ell-1}\|x_{j+1}(t)-x_j(t)\|\le\sum_{j=m}^{\ell-1}\frac{M_T^{j+1}t^{j+1}}{(j+1)!}\|\xi\|,$$

より $N\le m\le\ell$ なる N を充分大きく取ることにより $\{x_m(t)\}$ が $[0,T]$ 上の一様収束で Cauchy 列をなすことが示される。$[0,T]$ 上の一様収束位相で $\lim_{m\to\infty}x_m(t)=x_\infty(t)$ が存在する。

$$A(s)x_m(s)\to A(s)x_\infty(s) \quad \text{も一様収束だから} \quad \int_0^t A(s)x_m(s)ds\to\int_0^t A(s)x_\infty(s)ds$$

となる。これより、(1.2) の第 2 式において $m\to\infty$ とすることにより $x_\infty(t)$ が

$$x_\infty(t)=\xi+\int_0^t A(s)x_{\infty(s)}ds \tag{1.3}$$

を満たすことが分かる。この式の右辺の積分は t について微分することができ、微分したものが連続で、左辺も微分でき、これより $x_\infty(t)$ は連続微分可能で (1.1) を満たすことが示される。また、(1.3) を満たす連続関数 $x(t)$ は $t\to0$ として、$x(0)=\xi$ なることも明らかであろう。

（一意性）[10] (1.3) 式を満たす連続関数を $x(t), y(t)$ とする。

$$x(t) - y(t) = \int_0^t A(s)(x(s) - y(s))ds$$

に対し、上の存在定理と同様に逐次近似的に、或いは Gronwall の不等式を用いて $x(t) \equiv y(t)$ なることが示される（詳細は省略する）。

（解の延長可能性）T を任意に固定したが、初期条件を T でとり直し、更に、解の一意性を用いて接続していくことにより、任意の t に対して解が構成できることになる。

(ii) [15] (1.1) の解全体を $\mathcal{X}_0$ と書くと、これがベクトル空間をなすことは明らか。実際、２つの $\mathcal{X}_0$ の元を足しても、或いは何倍かしてもやはり $\mathcal{X}_0$ に属することが分かるからである。

任意に ξ を取る。(1.1) の解で初期条件 $x(0) = \xi$ を満たすものは唯一つ定まる。この解を $x = x(\cdot) = x(\cdot, 0; \xi) = \Phi_0(\xi)$ と書く。解の一意性により Φ_0 は $\mathbb{C}^n$ から $\mathcal{X}_0$ への線形写像である。一方、任意の $x \in \mathcal{X}_0$ に対し $t = 0$ での値 $x(0)$ を対応させる写像 $E_0 x = x(0)$ を定めると、$\mathcal{X}_0$ から $\mathbb{C}^n$ への線形写像で $x = \Phi_0(E_0 x)$ を満たす。故に、Φ_0 は $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^n$ の上への同型写像である。　□

注意：この問題は平成 12 年 8 月の大学院入試問題であるが、内容は講義で説明したものである。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x,y)$ を平面 $\mathbb{R}^2$ 上で定義され、$f(0,0) = 0$ かつ任意の $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ に対して条件

(2.1) $$|f(x,y) - f(x',y')| \le k|y - y'| \quad (k \text{ は } 0 < k < 1 \text{ をみたす定数})$$

を満たす実数値連続関数とする。このとき、$\mathbb{R}$ 上の連続関数 $\varphi(x)$ で $\varphi(0) = 0$ かつ方程式 $\varphi(x) = f(x, \varphi(x))$ を満たすものがただ一つ存在することを証明せよ。

注意: この問題は平成 9 年 8 月の大学院入試問題として出題されたものの一部だが、仮定 (2.1) は**私が写し間違った**。問題の仮定 (2.1) は

『$f(x,y)$ を平面 $\mathbb{R}^2$ 上で定義され、$f(0,0) = 0$ かつ任意の $(x,y), (x,y') \in \mathbb{R}^2$ に対して条件

(2.2) $$|f(x,y) - f(x,y')| \le k|y - y'| \quad (k \text{ は } 0 < k < 1 \text{ をみたす定数})$$

を満たす実数値連続関数とする。』

と変えるべきである。以下の証明は仮定 (2.2) として与える。

Y 君はこの仮定のミスに気づき適切に対応している。素晴らしい！

略解: （存在）[30] x を任意に一つとって固定する。更に、任意に y_0 をとり $n \ge 1$ に対して

$$y_1 = f(x, y_0), \quad y_{n+1} = f(x, y_n) \quad n \ge 1$$

と定めると、仮定から $\{y_n\}$ が Cauchy 列となる。実際、

$$|y_{n+1} - y_n| = |f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})| \le k|y_n - y_{n-1}| \le k^2|y_{n-1} - y_{n-2}| \le \cdots \le k^n|y_1 - y_0|$$

を用い、任意の整数 n, p に対し

$$\begin{aligned}|y_{n+p} - y_n| &= |\sum_{j=1}^{p} y_{n+j} - y_{n+j-1}| \le k \sum_{j=1}^{p} |y_{n+j-1} - y_{n+j-2}| \le (k^n + k^{n+1} + \cdots + k^{n+p-1})|y_1 - y_0| \\ &\le \frac{k^n}{1-k}|y_1 - y_0|\end{aligned}$$

となる。故に、極限 $\lim_{n\to\infty} y_n = y_\infty$ が存在する。$f(x,y)$ は y に関し連続だから定義式 $y_{n+1} = f(x, y_n)$ において $n \to \infty$ として $y_\infty = f(x, y_\infty)$ となる。また、$\tilde{y}$ を $\tilde{y} = f(x, \tilde{y})$ となる元とすると

$$|y_\infty - \tilde{y}| = |f(x, y_\infty) - f(x, \tilde{y})| \le k|y_\infty - \tilde{y}|$$

より $\tilde{y} = y_\infty$ となる。即ち、任意の x に対して $y = f(x,y)$ となる y が一意的に存在するのでこれを $y = \varphi(x)$ と記す。即ち、$\varphi(x) = f(x, \varphi(x))$ となる。また、x に対する y の一意性と $f(0,0) = 0$ より $\varphi(0) = 0$ となる。

（一意性）[10] $\psi(x)$ を $\psi(x) = f(x, \psi(x))$ を満たす連続関数とすると、

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = |f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x))| \leq k|\varphi(x) - \psi(x)|$$

より、$\psi(x) = \varphi(x)$ となる。

（連続性）[10] x' を任意にとると

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - \varphi(x')| &= |f(x, \varphi(x)) - f(x', \varphi(x')| \leq |f(x, \varphi(x)) - f(x', \varphi(x)| + |f(x', \varphi(x)) - f(x', \varphi(x'))| \\ &\leq |f(x, \varphi(x)) - f(x', \varphi(x))| + k|\varphi(x) - \varphi(x')|\end{aligned}$$

より

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \frac{1}{1-k}|f(x, \varphi(x)) - f(x', \varphi(x))| \tag{2.2}$$

となる。f の連続性より上式右辺は $x' \to x$ のとき 0 に行くので、$\varphi(x') - \varphi(x) \to 0$ となる。 □

注意：院入試問題としては、「さらに、$f(x,y)$ が C^1 級ならば $\varphi(x)$ も C^1 級であることを証明せよ。」を加えて出題された。これは、(2.2) の両辺を $|x - x'| \neq 0$ で割って、微分可能性を示し、それを用いて式 $\varphi(x) = f(x, \varphi(x))$ を x について微分すると

$$\dot{\varphi}(x) = f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x))\dot{\varphi}(x)$$

となる。ここで仮定より $|f_y(x,y)| \leq k$ だから、$1 - f_y(x, \varphi(x)) \neq 0$ となり上式より

$$\dot{\varphi}(x) = \frac{f_x(x, \varphi(x))}{1 - f_y(x, \varphi(x))}$$

を得る。この式の右辺は x に関し連続だから、$\varphi(x)$ は C^1 級である。

同僚の O 氏による注意：[50] 恒等的に 0 な関数が解となる。

証明：[存在] 条件式で $x' = y = y' = 0$ とすると $f(x,0) = 0$ となる。したがって、 $\varphi(x) \equiv 0$ は、$f(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$ を満たす。以上で、存在が言えた。（この φ が連続であることを示さなくてはいけないかな？(冗談)）

[一意性] 条件式で $x' = y' = 0$ とすると $|f(x,y)| \leq k|y|$ となる。したがって、 実数 x, y が $f(x,y) = y$ を満たすならば、$y = 0$ となる。したがって、解ならば $\varphi(x) = y = 0$ でなくてはならない。　証明終わり

コメント：(あ) 条件式で $y = y'$ とすると $f(x,y) = f(x',y)$ となるから $f(x,y)$ は x に依存しない。(い) 解の条件 $\varphi(0) = 0$ は必要ない。自動的に出てくる。(う) f の連続性も条件式から出てくるので言及する必要はない。(え) 解析な感じがしないんですが､､､

3 $f(t,x)$ を (t,x) に関し滑らかな関数とし、初期値問題

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ x(a) = b \tag{3.1}$$

の解を $x(t,a,b)$ とする。

(i) この時、

$$\frac{\partial x(t,a,b)}{\partial a}, \quad \frac{\partial x(t,a,b)}{\partial b}$$

を計算せよ。

(ii) この計算結果を、連続関数を係数に持つ線形微分方程式

$$\dot{x}(t) = \phi(t)x(t) + \psi(t),\ x(a) = b \tag{3.2}$$

の解を具体的に書き下すことによって、確かめよ。

(iii) (3.2) において、$\phi(t) = \sin t$, $\psi(t) = \gamma \sin(2t)$, $\gamma \in \mathbb{R}$ とするとき、ある $T > 0$ があって、任意の t に対し $x(t) = x(t+T)$ となることを確かめよ。

略解: (i) [20] 与えられた方程式 (3.1) を形式的に、偏微分する：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{d}{dt}x(t,a,b)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial a}x(t,a,b) = f_x(t,x(t,a,b))\frac{\partial}{\partial a}x(t,a,b),\\ \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{d}{dt}x(t,a,b)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial b}x(t,a,b) = f_x(t,x(t,a,b))\frac{\partial}{\partial b}x(t,a,b).\end{aligned} \tag{3.3}$$

同様に

$$x(a,a,b) = b \quad \text{より} \quad \frac{\partial}{\partial b}x(a,a,b) = 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial a}x(a,a,b) = \frac{\partial}{\partial t}x(t,a,b)\bigg|_{t=a} + \frac{\partial}{\partial a}x(t,a,b)\bigg|_{t=a} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial}{\partial a}x(t,a,b)\bigg|_{t=a} = -f(a,b).$$

故に、(3.3) を解いて

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}x(t,a,b) &= -f(a,b)\mathrm{exp}\left[\int_a^t ds\, f_x(s,x(s,a,b))\right],\\ \frac{\partial}{\partial b}x(a,a,b) &= \exp\left[\int_a^t ds\, f_x(s,x(s,a,b))\right].\end{aligned} \tag{3.4}$$

(ii) [20] (3.2) の解は定数変化法を用いて

$$x(t,a,b) = b\exp\left[\int_a^t ds\,\phi(s)\right] + \int_a^t ds\,\psi(s)\exp\left[\int_s^t d\tau\,\phi(\tau)\right]$$

と表示される。$f(t,x) = \phi(t)x + \psi(t)$ に注意すれば $f(a,b) = \phi(a)b + \psi(a)$ であり

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}x(t,a,b) &= -(\phi(a)b + \psi(a))\exp\left[\int_a^t ds\,\phi(s)\right],\\ \frac{\partial}{\partial b}x(a,a,b) &= \exp\left[\int_a^t ds\,\phi(s)\right].\end{aligned}$$

確かに、上の公式 (3.4) が成立している。

(iii) [10] $\phi(t) = \sin t$, $\psi(t) = \gamma\sin(2t)$ より

$$x(t,a,b) = b\exp[-\cos t + \cos a] + \int_a^t ds\,\gamma\sin(2s)\exp[-\cos t + \cos s]$$

となる。$z = \cos s$ と変数変換して

$$\int_a^t ds\, 2\sin s\cos s\exp[\cos s] = -2\int_{\cos a}^{\cos t} dz\, ze^z = -2[\cos t\, e^{\cos t} - \cos a\, e^{\cos a} - e^{\cos t} + e^{\cos a}]$$

だから

$$b(1 - e^{\cos a - \cos t}) = -2\gamma[\cos t - \cos a\, e^{\cos a - \cos t} - 1 + e^{\cos a - \cos t}]$$

となる。これより、$T = 2\pi$, 即ち $t = a + 2\pi$ とすれば、任意の b, a, γ に対して $x(a+2\pi,a,b) = x(a,a,b) = b$ となる。　□

注意：この問題 3 の (i), (ii) は去年出題したものと同一であったが、特別出来が良かったわけではない。

最初 30 名近くいた受講生がどんどん減り最終的には 5, 6 名にまでなった。試験には 12 名程参加し、うち 6 名がこの試験で 60 点以上であった。また、レポート問題に答え、その答によって加点された者、総合点で合格者があり、最終的には 9 名が合格した。レポートには素晴らしいものもあった。