

「2006年度微分方程式概論」中間試験

2006.6.16. 10.40-12.10 担当 井上 淳

1 関数 $u(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ で条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$u(r_0) = a, \quad u(r_1) = b, \quad (\text{但し } 0 < r_0 < r_1)$$

を満たすものを求めよ。

2 $f \in C([a, b])$ 、 $K \in C([a, b] \times [a, b])$ とする。このとき、 u に対する積分方程式

$$u(x) = \int_a^x K(x, y)u(y)dy + f(x), \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

は一意的な解 $u \in C([a, b])$ を持つことを示せ (ヒント: (1) の右辺を $(Tu)(x)$ とおくと、十分大きな自然数 m に対して T^m が縮小写像となる)。